ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 11 марта 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4 1. В строку выписаны 39 чисел, не равных нулю. Сумма любых двух соседних чисел положительна, а сумма всех чисел отрицательна. Каков знак произведения всех чисел?

Борис Френкин

5 2. У Аладдина есть несколько одинаковых слитков золота, и иногда он просит джинна увеличить их количество. Джинн добавляет тысячу таких же слитков, но после этого берёт за услугу ровно половину от получившейся общей массы золота. Мог ли Аладдин оказаться в выигрыше после десяти таких просьб, если ни один слиток не пришлось распиливать?

Александр Перепечко

6 3. Существуют ли такие 2018 положительных несократимых дробей с различными натуральными знаменателями, что знаменатель разности любых двух из них (после приведения к несократимому виду) меньше знаменателя любой из исходных 2018 дробей?

Максим Дидин

6 4. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC, AH — его высота. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую CO. Докажите, что прямая HP проходит через середину стороны AB.

Егор Бакаев

8 5. На улице дома стоят друг напротив друга, всего 50 пар. На правой стороне улицы расположены дома с чётными натуральными номерами, на левой — с нечётными натуральными номерами, номера возрастают от начала улицы к концу на каждой стороне, но идут не обязательно подряд (возможны пропуски). Для каждого дома на правой стороне улицы нашли разность между его номером и номером дома напротив, и оказалось, что все найденные числа различны. Наибольший номер дома на улице равен n. Найдите наименьшее возможное значение n.

Максим Дидин

10 6. В стране рыцарей (всегда говорят правду) и лжецов (всегда лгут) за круглым столом сидят в вершинах правильного десятиугольника 10 человек, среди которых есть лжецы. Путешественник может встать куда-то и спросить сидящих: «Каково расстояние от меня до ближайшего лжеца из вас?» После этого каждый отвечает ему. Какое минимальное количество вопросов должен задать путешественник так, чтобы гарантированно узнать, кто за столом лжецы? (Посторонних рядом нет, на стол вставать нельзя. Людей считайте точками. Все, включая путешественника, могут точно измерить любое расстояние.)

Максим Дидин

12 7. В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками «!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a?b$ обозначает одно из следующих: $a-b$, $b-a$ или $a+b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a, b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков «!», «?» записать выражение, которое гарантированно равно $20a-18b$.

Николай Белухов

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 11 марта 2018 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
4	1.	У Аладдина есть несколько одинаковых слитков золота, и иногда он просит джинна увеличить их количество. Джинн добавляет тысячу таких же слитков, но после этого берёт за услугу ровно половину от получившейся общей массы золота. Мог ли Аладдин оказаться в выигрыше после десяти таких просьб, если ни один слиток не пришлось распиливать? *Александр Перепечко*
5	2.	Существуют ли такие 2018 положительных несократимых дробей с различными натуральными знаменателями, что знаменатель разности любых двух из них (после приведения к несократимому виду) меньше знаменателя любой из исходных 2018 дробей? *Максим Дидин*
6	3.	В таблице 10×10 записано 100 различных чисел. За ход можно выбрать любой составленный из клеток прямоугольник и переставить все числа в нем симметрично относительно его центра («повернуть прямоугольник на 180°»). Всегда ли за 99 ходов можно добиться, чтобы числа возрастали в каждой строке слева направо и в каждом столбце — снизу вверх? *Александр Шаповалов*
	4.	Правильный треугольник, лежащий в плоскости α, ортогонально спроектировали на непараллельную ей плоскость β, полученный треугольник ортогонально спроектировали на плоскость γ и получили снова правильный треугольник. Докажите, что
4	а)	угол между плоскостями α и β равен углу между плоскостями β и γ;
4	б)	плоскость β пересекает плоскости α и γ по перпендикулярным друг другу прямым. *Лев Емельянов*
10	5.	В некотором государстве сложение и вычитание обозначаются знаками «!» и «?», но вам неизвестно, какой знак какой операции соответствует. Каждая операция применяется к двум числам, но про вычитание вам неизвестно, вычитается левое число из правого или правое из левого. К примеру, выражение $a?b$ обозначает одно из следующих: $a-b$, $b-a$ или $a+b$. Вам неизвестно, как записываются числа в этом государстве, но переменные a, b и скобки есть и используются как обычно. Объясните, как с помощью них и знаков «!», «?» записать выражение, которое гарантированно равно $20a - 18b$. *Николай Белухов*
10	6.	Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Лучи BA и CD пересекаются в точке P. Прямая, проходящая через P и параллельная касательной к окружности в точке D, пересекает в точках U и V касательные, проведённые к окружности в точках A и B. Докажите, что окружности, описанные около треугольника CUV и четырёхугольника $ABCD$, касаются. *Алексей Заславский*
12	7.	Король решил поощрить группу из n мудрецов. Их поставят в ряд друг за другом (чтобы все смотрели в одном направлении), на каждого наденут черную или белую шляпу. Каждый будет видеть шляпы всех впереди стоящих. Мудрецы по очереди (от последнего к первому) назовут цвет (белый или черный) и натуральное число по своему выбору. В конце подсчитывается число мудрецов, которые назвали цвет, совпадающий с цветом своей шляпы: ровно столько дней всей группе будут платить надбавку к жалованью. Мудрецам разрешили договориться заранее, как отвечать. При этом мудрецы знают, что ровно k из них безумны (кто именно — им неизвестно). Безумный мудрец называет белый или черный цвет и число вне зависимости от договоренностей. Какое максимальное число дней с надбавкой к жалованью могут гарантировать группе мудрецы, независимо от местонахождения безумных в очереди? *Иван Митрофанов*