

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 22 октября 2017 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 4 1. Имеется железная гиря в 6 кг, сахар и невесомые пакеты в неограниченном количестве, а также нестандартные весы с двумя чашами: весы находятся в равновесии, если грузы на левой и правой чашах относятся как 3:4. За одно взвешивание можно положить на весы любые уже имеющиеся грузы и добавить на одну из чаш пакет с таким количеством сахара, чтобы чаши уравнились (такие пакеты с сахаром можно использовать при дальнейших взвешиваниях). Удастся ли отмерить 1 кг сахара?

Григорий Гальперин

- 4 2. Даны две монеты радиуса 1 см, две монеты радиуса 2 см и две монеты радиуса 3 см. Можно положить две из них на стол так, чтобы они касались друг друга, и добавлять монеты по одной так, чтобы очередная касалась хотя бы двух уже лежащих. Новую монету нельзя класть на старую. Можно ли положить несколько монет так, чтобы центры каких-то трёх монет оказались на одной прямой?

Егор Бакаев

- 6 3. Аналитик сделал прогноз изменения курса доллара на каждый из трёх ближайших месяцев: на сколько процентов (число, большее 0% и меньше 100%) изменится курс за июль, на сколько — за август, и на сколько — за сентябрь. Оказалось, что про каждый месяц он верно предсказал, на сколько процентов изменится курс, но ошибся с направлением изменения (то есть, если он предсказывал, что курс увеличится на $x\%$, то курс падал на $x\%$, и наоборот). При этом через три месяца курс совпал с прогнозом. В какую сторону в итоге изменился курс?

Алексей Заславский

- 1 4. Было 100 дверей, у каждой свой ключ (отпирающий только эту дверь). Двери пронумерованы числами 1, 2, ..., 100, ключи тоже, но, возможно, с ошибками: номер ключа совпадает с номером двери или отличается на 1. За одну попытку можно выбрать любой ключ, любую дверь и проверить, подходит ли этот ключ к этой двери. Можно ли гарантированно узнать, какой ключ какую дверь открывает, сделав не более

- 3 а) 99 попыток;
4 б) 75 попыток;
в) 74 попыток.

Алексей Лебедев, Александр Шаповалов

- 9 5. Цифры натурального числа $n > 1$ записали в обратном порядке и результат умножили на n . Могло ли получиться число, записываемое только единицами?

Фёдор Петров

- 9 6. Вписанная окружность касается сторон AB , BC и AC треугольника ABC в точках N , K и M соответственно. Прямые MN и MK пересекают биссектрису внешнего угла B в точках R и S соответственно. Докажите, что прямые RK и SN пересекаются на вписанной окружности треугольника ABC .

Михаил Евдокимов

- 5 7. Город представляет из себя клетчатый прямоугольник, в каждой клетке стоит пятиэтажный дом. Закон о реновации позволяет выбрать две соседних по стороне клетки, в которых стоят дома, и снести тот дом, где меньше этажей (либо столько же). При этом над вторым домом надстраивается столько этажей, сколько было в снесенном доме. Какое наименьшее число домов можно оставить в городе, пользуясь законом о реновации, если город имеет размеры
- 5 а) 20×20 клеток;
5 б) 50×90 клеток?

Михаил Мурашкин

ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 22 октября 2017 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. Было 100 дверей, у каждой свой ключ (отпирающий только эту дверь). Двери пронумерованы числами $1, 2, \dots, 100$, ключи тоже, но, возможно, с ошибками: номер ключа совпадает с номером двери или отличается на 1. За одну попытку можно выбрать любой ключ, любую дверь и проверить, подходит ли этот ключ к этой двери. Можно ли гарантированно узнать, какой ключ какую дверь открывает, сделав не более
- 1 а) 99 попыток;
2 б) 75 попыток;
3 в) 74 попыток.

Алексей Лебедев, Александр Шаповалов

2. Дан правильный шестиугольник с центром O . Провели шесть равных окружностей с центрами в вершинах шестиугольника такие, что точка O находится внутри окружностей. Угол величины α с вершиной O отсекает на этих окружностях шесть дуг. Докажите, что суммарная величина этих дуг равна 6α .

Егор Бакаев

3. Аналитик сделал прогноз изменения курса доллара на каждый из 12 ближайших месяцев: на сколько процентов (число, большее 0% и меньше 100%) изменится курс за октябрь, на сколько — за ноябрь, ..., на сколько — за сентябрь. Оказалось, что про каждый месяц он верно предсказал, на сколько процентов изменится курс, но ошибся с направлением изменения (то есть, если он предсказывал, что курс увеличится на $x\%$, то курс падал на $x\%$, и наоборот). При этом через 12 месяцев курс совпал с прогнозом. В какую сторону в итоге изменился курс?

Алексей Заславский

4. Покажите, что для любой последовательности $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, состоящей из единиц и минус единиц, найдутся такие n и k , что

$$|a_0 \cdot a_1 \cdot \dots \cdot a_k + a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{k+1} + \dots + a_n \cdot a_{n+1} \cdot \dots \cdot a_{n+k}| = 2017.$$

Иван Митрофанов

5. Кусок сыра надо разрезать на части с соблюдением таких правил: 1) вначале режем сыр на 2 куска, затем один из них режем на 2 куска, затем один из трёх кусков опять режем на 2 куска, и т.д.; 2) после каждого разрезания части могут быть разными по весу, но отношение веса любой части к весу любой другой должно быть строго больше заданного числа R .
- 3 а) Докажите, что при $R = 0,5$ можно резать сыр так, что процесс никогда не остановится (после любого числа разрезов можно будет отрезать ещё один кусок).
4 б) Докажите, что если $R > 0,5$, то процесс резки когда-нибудь остановится.
4 в) На какое наибольшее число кусков можно разрезать сыр, если $R = 0,6$?

Алексей Толпыго

6. Дан треугольник ABC . Пусть I — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB , а A_1 и B_1 — точки касания двух других вневписанных окружностей со сторонами BC и AC соответственно. Пусть M — середина отрезка IC , а отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке N . Докажите, что точки N, B_1, A и M лежат на одной окружности.

Фёдор Ивлёв

7. Город имеет вид квадрата $n \times n$, разбитого на кварталы 1×1 . Улицы идут с севера на юг и с запада на восток. Человек каждый день утром идёт из юго-западного угла в северо-восточный, двигаясь только на север или восток, а вечером возвращается обратно, двигаясь только на юг или запад. Каждое утро он выбирает свой путь так, чтобы суммарная длина знакомых участков пути (тех, которые он уже проходил в том или ином направлении) была минимальна, и каждый вечер тоже. Докажите, что за n дней он пройдёт все улицы целиком.

Максим Дидин