ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 26 февраля 2012 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы		задачи
3	1.	Под одной из клеток доски 8×8 зарыт клад. Под каждой из остальных зарыта табличка, в которой указано, за какое наименьшее число шагов можно добраться из этой клетки до клада (одним шагом можно перейти из клетки в соседнюю по стороне клетку). Какое наименьшее число клеток надо перекопать, чтобы наверняка достать клад? *Н. П. Стрелкова*
4	2.	Существует ли натуральное число, у которого нечетное количество четных натуральных делителей и четное количество нечетных? *Г. Жуков*
4	3.	Дан параллелограмм $ABCD$. Вписанные окружности треугольников ABC и ADC касаются диагонали AC в точках X и Y. Вписанные окружности треугольников BCD и BAD касаются диагонали BD в точках Z и T. Докажите, что если все точки X, Y, Z, T различны, то они являются вершинами прямоугольника. *Р. К. Гордин*
	4.	В выражении $10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2 : 1$ расставили скобки так, что в результате вычислений получилось целое число. Каким
2	а)	наибольшим;
3	б)	наименьшим может быть это число? *И. Ф. Акулич*
5	5.	У Носорога на шкуре есть вертикальные и горизонтальные складки. Всего складок 17. Если Носорог чешется боком о дерево, то либо две горизонтальные, либо две вертикальные складки на этом боку пропадают, зато на другом боку прибавляются две складки: горизонтальная и вертикальная. (Если двух складок одного направления нет, то ничего не происходит.) Носорог почесался несколько раз. Могло ли случиться, что на каждом боку вертикальных складок стало столько, сколько там раньше было горизонтальных, а горизонтальных стало столько, сколько там было вертикальных? *И. Высоцкий*

ТРИДЦАТЬ ТРЕТИЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,
10 – 11 классы, базовый вариант, 26 февраля 2012 г.
(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)

баллы задачи

4 — 1. Из каждой вершины выпуклого многогранника выходят ровно три ребра, причем хотя бы два из этих трех ребер равны. Докажите, что многогранник имеет хотя бы три равных ребра.

В. В. Произволов

4 — 2. Дана клетчатая полоска из $2n$ клеток, пронумерованных слева направо следующим образом:

$$1,\ 2,\ 3, \ldots,\ n,\ -n,\ \ldots,\ -2,\ -1.$$

По этой полоске перемещают фишку, каждым ходом сдвигая ее на то число клеток, которое указано в текущей клетке (вправо, если число положительно, и влево, если отрицательно). Известно, что фишка, начав с любой клетки, обойдет все клетки полоски. Докажите, что число $2n+1$ простое.

А. В. Грибалко

5 — 3. На плоскости нарисовали кривые $y = \cos x$ и $x = 100\cos(100y)$ и отметили все точки их пересечения, координаты которых положительны. Пусть a — сумма абсцисс этих точек, b — сумма ординат этих точек. Найдите a/b.

И. И. Богданов

5 — 4. Четырехугольник $ABCD$ без параллельных сторон вписан в окружность. Для каждой пары касающихся окружностей, одна из которых имеет хорду AB, а другая — хорду CD, отметим их точку касания X. Докажите, что все такие точки X лежат на одной окружности.

фольклор, предложил А. Бердников

5 — 5. Белая ладья стоит на поле b2 шахматной доски 8×8, а черная — на поле c4. Игроки ходят по очереди, каждый — своей ладьей, начинают белые. Запрещается ставить свою ладью под бой другой ладьи, а также на поле, где уже побывала какая-нибудь ладья. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто из игроков может обеспечить себе победу, как бы ни играл другой? (За ход ладья сдвигается по горизонтали или вертикали на любое число клеток, и считается, что она побывала только в начальной и конечной клетках этого хода.)

А. К. Толпыго