

## ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 13 марта 2011 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

---

баллы задачи

- 4 1. Можно ли какой-нибудь шестиугольник разбить одной прямой на четыре равных треугольника?  
*Н. П. Стрелкова*
- 4 2. Через начало координат проведены прямые (включая оси координат), которые делят координатную плоскость на углы в  $1^\circ$ . Найдите сумму абсцисс точек пересечения этих прямых с прямой  $y = 100 - x$ .  
*А. В. Шаповалов*
- 5 3. У барона Мюнхгаузена есть 50 гирь. Веса этих гирь — различные натуральные числа, не превосходящие 100, а суммарный вес гирь — четное число. Барон утверждает, что нельзя часть этих гирь положить на одну чашу весов, а остальные — на другую чашу так, чтобы весы оказались в равновесии. Могут ли эти слова барона быть правдой?  
*А. К. Толтыго*
- 6 4. Докажите, что для любого натурального числа  $N$  найдутся такие две пары натуральных чисел, что суммы в парах одинаковы, а произведения отличаются ровно в  $N$  раз.  
*Б. Р. Френкин*
- 7 5. Дан остроугольный треугольник  $ABC$ ;  $AA_1$ ,  $BB_1$  — его высоты. Из точки  $A_1$  опустили перпендикуляры на стороны  $AC$  и  $AB$ , а из точки  $B_1$  опустили перпендикуляры на стороны  $BC$  и  $BA$ . Докажите, что основания перпендикуляров образуют равнобокую трапецию.  
*Г. Фельдман*
- 10 6. Два муравья проползли каждый по своему замкнутому маршруту на доске  $7 \times 7$ . Каждый полз только по сторонам клеток доски и побывал в каждой из 64 вершин клеток ровно один раз. Каково наименьшее возможное число таких сторон, по которым проползли и первый, и второй муравьи?  
*А. А. Заславский*
- 10 7. Дана квадратная таблица, в каждой клетке записано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна  $a$ , а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна  $b$ . Докажите, что  $a = b$ .  
*Р. В. Варат*

## ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 13 марта 2011 г.

(Итог подводится по трем задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, баллы за пункты одной задачи суммируются.)

---

баллы задачи

- 4 1. У барона Мюнхгаузена есть 50 гирь. Веса этих гирь — различные натуральные числа, не превосходящие 100, а суммарный вес гирь — четное число. Барон утверждает, что нельзя часть этих гирь положить на одну чашу весов, а остальные — на другую чашу так, чтобы весы оказались в равновесии. Могут ли эти слова барона быть правдой?  
*А. К. Толтыго*
- 6 2. В пространстве с декартовой системой координат дан прямоугольный параллелепипед, вершины которого имеют целочисленные координаты. Его объем равен 2011. Докажите, что ребра параллелепипеда параллельны координатным осям.  
*М. И. Малкин*
- 3 3. От балки в форме треугольной призмы с двух сторон отпилили (плоской пилой) по куску. Спилы не задели ни оснований, ни друг друга.  
4 а) Могут ли спилы быть подобными, но не равными треугольниками?  
4 б) Может ли один спил быть равносторонним треугольником со стороной 1, а другой — равносторонним треугольником со стороной 2?  
*А. В. Шаповалов — п. а), П. В. Сергеев — п. б)*
- 4 4. Даны  $N$  синих и  $N$  красных палочек, причем сумма длин синих палочек равна сумме длин красных. Известно, что из синих палочек можно сложить  $N$ -угольник, и из красных — тоже. Всегда ли можно выбрать одну синюю и одну красную палочки и перекрасить их (синюю — в красный цвет, а красную — в синий) так, что снова из синих палочек можно будет сложить  $N$ -угольник, и из красных — тоже? Решите задачу  
4 а) для  $N = 3$ ;  
4 б) для произвольного натурального  $N$ , большего 3.  
*А. В. Грибалко*
- 8 5. Боковые стороны  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  являются соответственно хордами окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , касающихся друг друга внешним образом. Градусные меры касающихся дуг  $AB$  и  $CD$  равны  $\alpha$  и  $\beta$ . Окружности  $\omega_3$  и  $\omega_4$  также имеют хорды  $AB$  и  $CD$  соответственно. Их дуги  $AB$  и  $CD$ , расположенные с той же стороны от хорд, что соответствующие дуги первых двух окружностей, имеют градусные меры  $\beta$  и  $\alpha$ . Докажите, что  $\omega_3$  и  $\omega_4$  тоже касаются.  
*Ф. А. Ивлев*
- 8 6. Дана квадратная таблица, в каждой клетке записано по числу. Известно, что в каждой строке таблицы сумма двух наибольших чисел равна  $a$ , а в каждом столбце таблицы сумма двух наибольших чисел равна  $b$ . Докажите, что  $a = b$ .  
*Р. В. Варат*
- 11 7. Две фирмы по очереди нанимают программистов, среди которых есть 11 гениев. Первого программиста каждая фирма выбирает произвольно, а каждый следующий должен быть знаком с кем-то из ранее нанятых данной фирмой. Если фирма не может нанять программиста по этим правилам, она прекращает прием, а другая может продолжать. Список программистов и их знакомств заранее известен, включая информацию о том, кто гений. Могут ли знакомства быть устроены так, что фирма, вступающая в игру второй, сможет нанять 10 гениев, как бы ни действовала первая фирма?  
*А. В. Шаповалов*