



Памятка

Вся геометрия

9 класса в кратком изложении

(к учебнику Л.С. Атанасяна и др.)

Вся геометрия

9 класса в кратком изложении

(к учебнику Л.С. Атанасяна и др.)

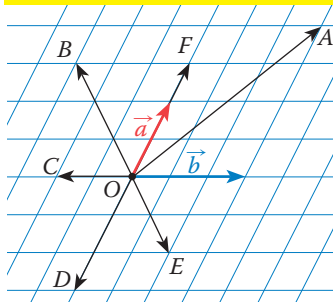
Памятка

СОДЕРЖАНИЕ

Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$	1
Декартовы координаты на плоскости	1
Действия над векторами	2
Нахождение координат вектора $\overrightarrow{AB}$	2
Расстояние между двумя точками	2
Уравнение окружности	2
Координаты середины отрезка	2
$\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$, где $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$	3
Теорема синусов и косинусов	3

Скалярное произведение векторов	4
Скалярное произведение векторов, заданных в координатах	4
Уравнение прямой в общем виде $ax + by = c$, где a, b, c – числа	4
Многоугольники. Длина окружности. Площадь круга	5
Формулы для правильного многоугольника	5
Движение	6
Многогранники	7
Тела вращения	7

Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$



$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OB} = 1,5\vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OC} = 0 \cdot \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OF} = 1,5\vec{a} - 0 \cdot \vec{b}$$

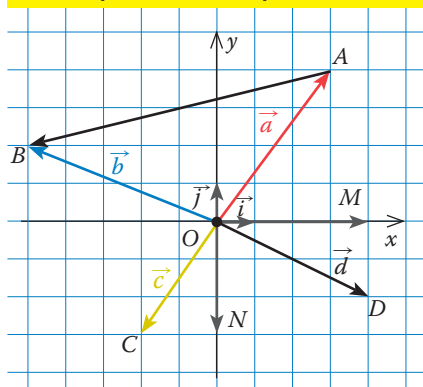
$$\overrightarrow{OE} = -\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

$\vec{p}$ – любой вектор;

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x и y – числа;

$\vec{p}$ разлагается единственным способом.

Декартовы координаты на плоскости



Координаты вектора

$$\vec{a} \{ 3; 4 \}$$

$$\vec{b} \{ -5; 2 \}$$

$$\overrightarrow{ON} \{ 0; -3 \}$$

$$\vec{d} \{ 4; -2 \}$$

$$\overrightarrow{OM} \{ 4; 0 \}$$

$$\overrightarrow{AB} \{ -8; -2 \}$$

$$\overrightarrow{CD} \{ 6; 1 \}$$

Разложение вектора

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\vec{b} = -5\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\overrightarrow{ON} = -3\vec{j}$$

$$\vec{d} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OM} = 4\vec{i}$$

$$\overrightarrow{AB} = -8\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\overrightarrow{CD} = 6\vec{i} + \vec{j}$$

Длина вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

$$|\overrightarrow{ON}| = 3$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$|\overrightarrow{OM}| = 4$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{68}$$

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{37}$$

$\vec{i}$ и $\vec{j}$ – координатные векторы;

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$$

$$\vec{a} \{ x; y \}; |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Действия над векторами

$$\vec{a} \{x_1; y_1\} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$$

$$\vec{b} \{x_2; y_2\} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$$

$$1. \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2) \vec{i} + (y_1 + y_2) \vec{j}$$

$$2. \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2) \vec{i} + (y_1 - y_2) \vec{j}$$

$$3. k\vec{a} \{kx_1; ky_1\}, \text{ где } k — \text{число}$$

Нахождение координат вектора $\vec{AB}$

Пусть O – начало координат,

$$B \{x_2; y_2\}, A \{x_1; y_1\}$$

Обозначим $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OA} = \vec{a}$

$$\text{Тогда } \vec{AB} = (\vec{b} - \vec{a}) \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

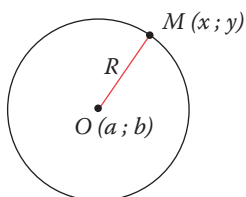
Расстояние между двумя точками

$$A \{x_1; y_1\}$$

$$B \{x_2; y_2\}$$

$$AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Уравнение окружности



$$OM = R = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

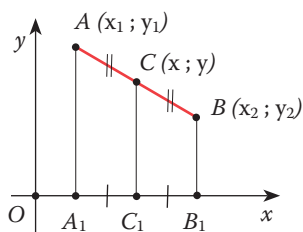
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

уравнение окружности с центром в точке $(a; b)$ радиуса R

$$x^2 + y^2 = R^2$$

уравнение окружности с центром в начале координат $(0; 0)$ радиуса R

Координаты середины отрезка

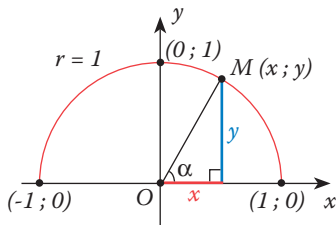


$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

по теореме Фалеса

$\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$, где $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$



1. α – острый угол, тогда $\sin \alpha = \frac{y}{1} = y$; $\cos \alpha = \frac{x}{1} = x$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

Получили формулы: $\sin \alpha = y$

$$\cos \alpha = x$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

2. Определим значения $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$ этими формулами для любого угла α , принадлежащего отрезку $[0^\circ; 180^\circ]$:

$$\sin 0^\circ = 0$$

$$\cos 0^\circ = 1$$

$$\operatorname{tg} 0^\circ = 0$$

$$\sin 90^\circ = 1$$

$$\cos 90^\circ = 0$$

$\operatorname{tg} 90^\circ$ не имеет смысла

$$\sin 180^\circ = 0$$

$$\cos 180^\circ = -1$$

$$\operatorname{tg} 180^\circ = 0$$

3. Формулы приведения. (Постарайтесь доказать эти формулы, используя чертежи).

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

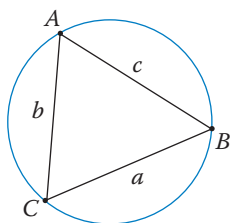
$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

4. Полуокружность является дугой окружности $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ выполняется для любого угла α , принадлежащего отрезку $[0^\circ; 180^\circ]$

Эта формула называется основным тригонометрическим тождеством

Теорема синусов и косинусов



Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Для доказательства использовать формулы:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \dots, \text{ а также задачу } \text{№ 1033}$$

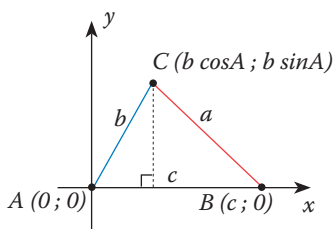
Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

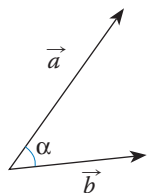
Доказательство

Запишем квадрат расстояния между точками B и C, координаты которых известны:

$$\begin{aligned} CB^2 &= (b \cos A - c)^2 + (b \sin A)^2 = b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A + c^2 + b^2 \sin^2 A = \\ &= b^2 (\underbrace{\cos^2 A + \sin^2 A}_{=1}) + c^2 - 2bc \cos A, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$



Скалярное произведение векторов



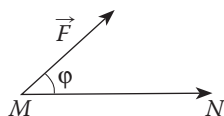
Определение: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$

1. $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|^2$

Скалярный квадрат вектора $\vec{a}$

Скалярное произведение векторов широко применяется в физике



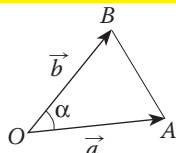
$\vec{F}$ – сила

$\vec{MN}$ – перемещение

A – работа

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{MN}| \cdot \cos \varphi$$

Скалярное произведение векторов, заданных в координатах



$\vec{a} \{x_1; y_1\}$; $\vec{b} \{x_2; y_2\}$ Доказать: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

Доказательство

1. По теореме косинусов

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2OB \cdot OA \cos \alpha$$

$$2. |\vec{AB}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2 \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$3. \vec{AB} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}; |\vec{AB}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$|\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2; |\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2$$

$$4. \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} (x_2^2 + y_2^2 + x_1^2 + y_1^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2) =$$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 \quad \text{ч.т.д.}$$

Следствие 1

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

Следствие 2

$$\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Свойства

$$1. \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$$

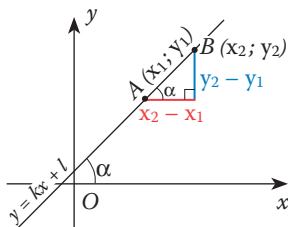
$$2. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$3. (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$4. (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Уравнение прямой в общем виде $ax + by = c$, где a, b, c – числа

1 При $b \neq 0$; $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, приняв $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{b} = l$, получим $y = kx + l$



Выясним геометрический смысл коэффициента k .

$$1. \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$2. \begin{cases} y_2 = kx_2 + l \\ y_1 = kx_1 + l \end{cases}$$

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$k = \operatorname{tg} \alpha$ – называется угловым коэффициентом

$k > 0$ (α – острый угол)

$k < 0$ (α – тупой угол)

$l = ?$; $x = 0$, тогда $y = l$

$(0; l)$ – точка пересечения прямой $y = kx + l$ с осью oy .

Рассмотрим частные случаи:

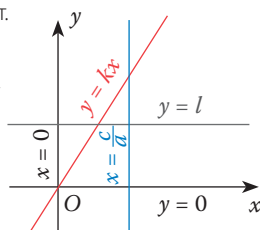
1. $b \neq 0$; $a \neq 0$; $c = 0$, тогда $y = kx$, график проходит через начало координат.

2. $b \neq 0$; $a = 0$; $c = 0$, тогда $y = 0$ – уравнение оси ox .

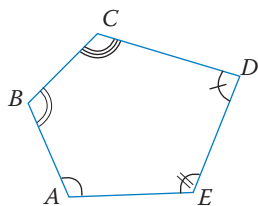
3. $b \neq 0$; $a = 0$; $c \neq 0$, тогда $y = l$ – уравнение прямой, параллельной оси ox .

2 $b = 0$; $a \neq 0$; $c \neq 0$; $x = \frac{c}{a}$ – уравнение прямой, параллельной оси oy

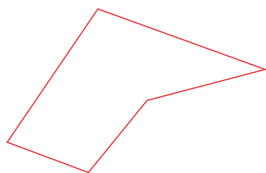
$b = 0$; $a \neq 0$; $c = 0$; $x = 0$ – уравнение оси oy



Многоугольники. Длина окружности. Площадь круга



Выпуклый



Невыпуклый

1. Сумма углов выпуклого n -угольника равна $180^\circ(n - 2)$

2. Сумма внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°

$C = 2\pi R$ – длина окружности;

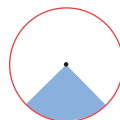
π – число иррациональное;

$$\pi \approx 3,14; \pi \approx \frac{22}{7}$$

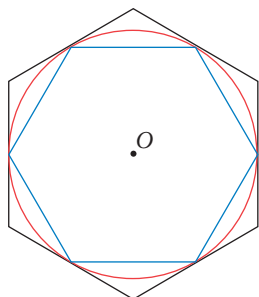
$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot n^\circ$ – длина дуги;

$S = \pi R^2$ – площадь круга;

$S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ$ – площадь сектора



Формулы для правильного многоугольника



В правильном многоугольнике:

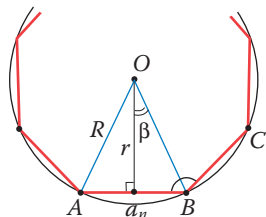
1. Все стороны и углы равны.

2. Точка O – центр вписанной и описанной окружности.

3. Правильные выпуклые n -угольники подобны $\Rightarrow$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{r_1}{r_2} = k \text{ (число); } \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

коэффициент подобия



$\angle ABC = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ – внутренний угол n -угольника

$\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$ – центральный угол n -угольника

$$a_n = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$S = \frac{1}{2} \rho_n \cdot r$$

$$r = R \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}$$

$a_6 = R$	$r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	$a_6 = \frac{2\sqrt{3}r}{3}$	$S_6 = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$
$a_4 = R\sqrt{2}$	$r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$a_4 = 2r$	$S_4 = a^2$
$a_3 = R\sqrt{3}$	$r = \frac{1}{2}R$	$a_3 = 2r\sqrt{3}$	$S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Движение

Определение

Движение – отображение плоскости на себя, при котором сохраняются расстояния между точками.

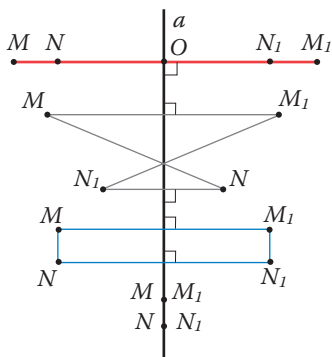
Свойства движений

1. Прямая отображается на прямую, луч – на луч, отрезок – на отрезок.
2. Отрезок отображается на равный отрезок, угол – на равный угол, треугольник – на равный ему треугольник.

Примеры движения

1. Осевая симметрия
2. Центральная симметрия
3. Параллельный перенос
4. Поворот

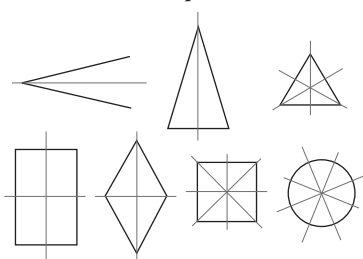
ОСЕВАЯ СИММЕТРИЯ (Обозначим Sa)



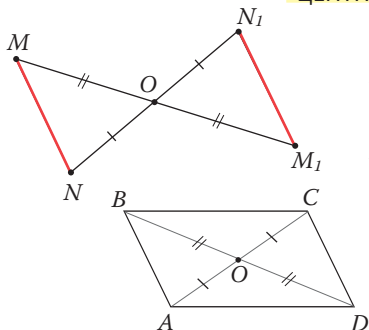
По определению
 $M_1 = Sa(M)$, так как :
 1) $MM_1 \perp a$; 2) $MO = OM_1$

$M_1N_1 = Sa(MN)$
 $Sa(MNM_1N_1) = M_1N_1NM$
 Получили ту же фигуру.
 В таком случае говорят, что фигура имеет осевую симметрию.

Фигуры, обладающие осевой симметрией



ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ (Обозначим So)



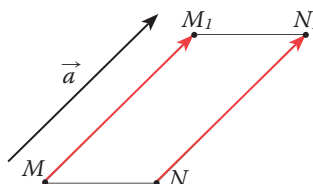
По определению
 $N_1 = So(N)$, так как :
 1) $O \in NN_1$; 2) $NO = ON_1$

$M_1N_1 = So(MN)$
 $So(ABCD) = CDAB$
 Получили ту же фигуру.
 Данная фигура обладает центральной симметрией.

Фигуры, обладающие центральной симметрией

Примерами фигур, обладающих центральной симметрией, являются окружность и параллелограмм. Прямая также обладает центральной симметрией, только в отличие от окружности и параллелограмма, которые имеют только один центр симметрии, у прямой их бесконечно много.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС



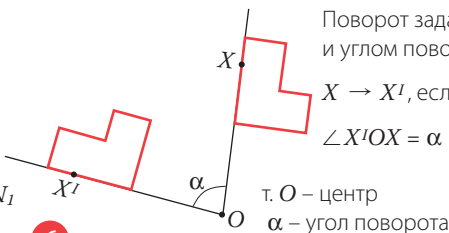
Параллельный перенос задан вектором $\vec{a}$

$\vec{a}(M) = M_1$;
 $\vec{a}(N) = N_1$;
 $\vec{a}(MN) = M_1N_1$

ПОВОРОТ

Поворот задан центром и углом поворота

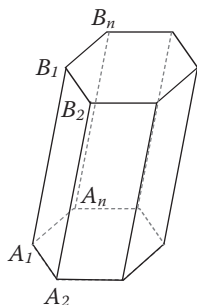
$X \rightarrow X'$, если $OX' = OX$
 $\angle X'OX = \alpha$



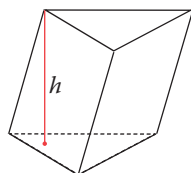
т. О – центр
 α – угол поворота

Многогранники

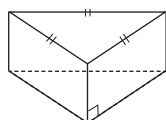
Призма



Многоугольники $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$ – основания призмы.
Параллелограммы $A_1A_2B_2B_1, \dots, A_nA_1B_1B_n$ – боковые грани.



наклонная призма
 h – высота

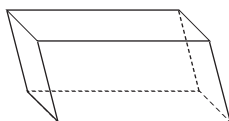


правильная
треугольная призма

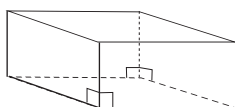
1. $S_{бок}$ равна сумме площадей боковых граней.

2. $S_{полн} = S_{бок} + 2 S_{осн}$; 3. $V = S_{осн} \cdot h$

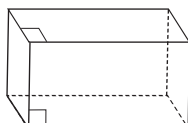
Параллелепипед



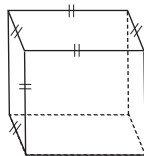
наклонный



прямой

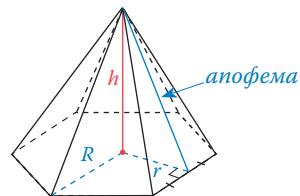
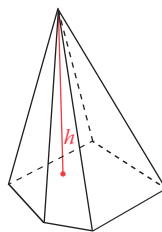


прямоугольный



куб

Пирамида



Правильная пирамида

Основание – правильный многоугольник. Вершина проектируется в его центр.

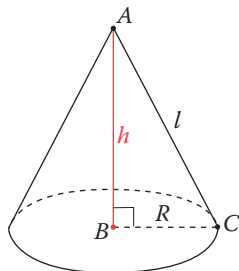
1. $S_{бок}$ равна сумме площадей боковых граней.

2. $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$

3. $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$

Тела вращения

Конус

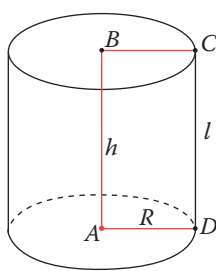


Конус получен вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AB .

$$S_{бок} = \pi R l$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h$$

Цилиндр

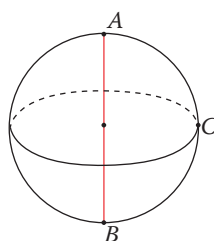


Цилиндр получен вращением прямоугольника $ABCD$ вокруг стороны AB .

$$S_{бок} = 2\pi R l$$

$$V = \pi R^2 \cdot h$$

Шар



Шар получен вращением полукруга ACB вокруг диаметра AB .

$$S = 4\pi R^2$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

О методе

За основу данного справочного пособия взят авторский метод Гориной Д.А. Он изложен в форме книжки-раскладушки. Весь учебный материал по геометрии 9-го класса представлен, как на ладони, и его можно охватить единым взглядом. Метод Гориной Д.А. позволяет легко освоить знания по геометрии и прочно укрепить их в памяти. Рисунки, графики и цветовое оформление материала облегчают обучение. Эффективность данного метода проверена годами на практике. Пособие предназначено для учащихся, учителей, родителей.

Об авторе

Горина Д.А. – учитель с многолетним педагогическим стажем. Она преподавала математику во всех параллелях (с 5 по 10 классы), в том числе и в классах с углубленным изучением математики. Кроме того, она обладает большим опытом работы с трудными учениками. Учитель высшей категории, отличник народного просвещения, Горина Д.А. имеет награду Института «Открытое общество» – Грант Сороса.

Пособие, которое вы держите в руках, первоначально я разработала специально для своих учеников, которые с трудом осваивали геометрию по обычным учебникам. Я решила представить для них учебный материал как можно доступнее: в сжатой и наглядной форме.

В результате благодаря этому методу моим ученикам было гораздо легче вспомнить пройденный материал и усвоить новый. Геометрия перестала быть для них сложным предметом.

Теперь я хочу поделиться со всеми накопленным опытом и искренне верю, что это пособие поможет любому ученику в освоении геометрии.

Другие книги автора

«Вся геометрия 7 класса в кратком изложении»

«Вся геометрия 8 класса в кратком изложении»

Горина Д.А.

ISBN 978-5-9900239-9-4



Горина Д.А., Вся геометрия 9 класса в кратком изложении – М.: Евробукс, 2009. – 8 с.

© Горина Д.А., 2009

© «Евробукс», 2009