

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Уравнения разбиты на три уровня сложности: А (простой), В (средний) и С (сложный). Уровни В и С по сложности максимально приближены к 13 заданиям ЕГЭ по профильной математике.

Уровень А

1А. $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} - 3 = 0$

2А. $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} = 10$

3А. $\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2} - 6 = 0$

4А. $\frac{1}{(x-3)^2} = \frac{3}{x-3} + 4$

5А. $(x-2)(x-3)(x-4) = (x-2)(x-3)(x-5)$

6А. $(x+3)(x+1)(x-7) = (x+3)(x+1)(x-8)$

7А. $(x+5)^3 = 25(x+5)$

8А. $(x+7)^3 = 49(x+7)$

9А. $(x-2)^2(x-3) = 12(x-2)$

10А. $(x+1)^2(x-4) = -6(x+1)$

11А. $(x-1)(x^2 + 4x + 4) = 4(x+2)$

12А. $x(x^2 + 2x + 1) = 2(x+1)$

13А. $(2x-3)^2(x-3) = (2x-3)(x-3)^2$

14А. $(2x-9)^2(x-9) = (2x-9)(x-9)^2$

15А. $x^3 = 4x^2 + 5x$

16А. $x^3 - 3x^2 = 4x$

17А. $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$

18А. $x^3 - 3x^2 - 3x + 9 = 0$

19А. $2x^3 - 5x^2 - 2x + 5 = 0$

20А. $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$

21А. $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$

22А. $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

23А. $2x^4 - 19x^2 + 9 = 0$

24А. $3x^4 - 13x^2 + 4 = 0$

25А. $(x-5)^4 - 3(x-5)^2 - 4 = 0$

26А. $(x+2)^4 + 5(x+2)^2 - 36 = 0$

ОТВЕТЫ

1А. $-\frac{1}{3}$; 1. 2А. $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{2}$. 3А. $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{3}$. 4А. 2; $\frac{13}{4}$. 5А. 2; 3. 6А. -3; -1. 7А. -10; -5; 0. 8А. -14; -7; 0. 9А. -1; 2; 6. 10А. -1; 1; 2. 11А. -3; -2; 2. 12А. -2; -1; 1. 13А. 0; $\frac{3}{2}$; 3. 14А. 0; $\frac{9}{2}$; 9. 15А. -1; 0; 5. 16А. -1; 0; 4. 17А. -3; $\pm\sqrt{2}$. 18А. $\pm\sqrt{3}$; 3. 19А. -1; 1; 2,5. 20А. -2; 0,5; 2. 21А. $\pm\sqrt{2}$. 22А. $\pm\sqrt{3}$; ± 2 . 23А. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; ± 3 . 24А. $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; ± 2 . 25А. 3; 7. 26А. -4; 0.

Уровень В

а) Решите уравнение;

б) Найдите все корни принадлежащие промежутку.

1В. а) $x^7 + 7x^4 - 8x = 0$;

б) $[-\sqrt{2}; 0]$

2В. а) $x^5 + 6x^3 - 7x = 0$;

б) $\left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

3В. а) $(x-3)^3 - x^2 + 9 = 0$;

б) $[\sqrt{2}; \sqrt{10}]$

4В. а) $(x+0,5)(x^2-9) = (2x+1)(x+3)^2$;

б) $\left[-3; -\frac{1}{3}\right]$

5В. а) $(x-3)(x-1)^3 + (3-x)(x-2)^3 = 7(x-3)$;

б) $[-1; \sqrt{8}]$

6В. а) $(x-1)(x-2)^3 + (1-x)(x-3)^3 = 19(x-1)$;

б) $[0; 2\sqrt{6}]$

7В. а) $(x-\sqrt{3})^4 - 5(x-\sqrt{3})^2 + 4 = 0$;

б) $[0; \sqrt{3}]$

8В. а) $(x^2-x)^2 - 3(x^2-x) + 2 = 0$;

б) $\left[-\frac{7}{10}; \frac{8}{5}\right]$

9В. а) $(x(x+1)-7) \cdot (x^2+x-4) + 2 = 0$;

б) $[-3; 0]$

10В. а) $(x^2-6x)^2 - 2(x-3)^2 = 81$;

б) $[2; 8]$

11В. а) $\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^2 - \frac{27x-9}{x+1} + 14 = 0$;

б) $[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$

12В. а) $3 \cdot \left(\frac{2x-3}{x+1}\right)^2 - \frac{44x-66}{x+1} + 7 = 0$;

б) $[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]$

13В. а) $\frac{x^2-x}{x^2-x+1} - \frac{x^2-x+2}{x^2-x-2} = 1$;

б) $(0; \sqrt{2}]$

14В. а) $\frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = -\frac{5}{2}$;

б) $\left[-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

15В. а) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{6x-6}{x+1} - 5 = 0$;

б) $\left[\frac{\sqrt{15}}{2}; 2\sqrt{2}\right]$

16В. а) $(x^2-4x+5)^2 = (x^2-2x-1)^2$;

б) $(1; \sqrt{7}]$

17В. а) $(x^3+x+1)^2 = (x^2+3x-1)^2$;

б) $\left[-\sqrt{3}; \frac{\sqrt{5}}{3}\right]$

18В. а) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 15$;

б) $[1; 5]$

19В. а) $x(x+1)(x+2)(x+3) = 48$;

б) $[-4; 3; 1; 5]$

20B. a) $\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1;$

б) $[\sqrt{0,5}; \sqrt{13}]$

21B. a) $\frac{4x}{x^2 + x + 3} + \frac{5x}{x^2 - 5x + 3} = -\frac{3}{2};$

б) $[-5; -3]$

22B. a) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0;$

б) $\left[0; \frac{5}{2}\right]$

23B. a) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0;$

б) $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$

24B. a) $x^2 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 4;$

б) $[-1; 1]$

25B. a) $x^2 + \frac{4}{x^2} = x - \frac{2}{x} + 4;$

б) $[0; \sqrt{3}]$

26B. a) $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47;$

б) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

27B. a) $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right);$

б) $[-2; 0]$

28B. a) $x^3 - 4x^2 + 3x + 2 = 0;$

б) $\left[2; \frac{5}{2}\right]$

29B. a) $x^3 - x^2 - 9x - 6 = 0;$

б) $[0; 4]$

30B. a) $x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 2 = 0;$

б) $[-\sqrt{2}; 0]$

31B. a) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0;$

б) $\left[-\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

32B. a) $x^3 - x^2 - \frac{8}{x^3 - x^2} = 2;$

б) $[0; \sqrt{5}]$

33B. a) $x^4 - 4x^3 + 12x - 9 = 0;$

б) $[-\sqrt{5}; \sqrt{2}]$

34B. a) $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0;$

б) $[-1; \sqrt{3}]$

35B. a) $\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 2} = 0;$

б) $[\sqrt{2}; 2\sqrt{3}]$

36B. a) $\frac{2x^3 - 3x^2 - 11x + 6}{2x^3 - x^2 + 2x - 1} = 0;$

б) $[-\sqrt{3}; 3\sqrt{2}]$

37B. a) $\left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x}\right)^2 - 5x = \frac{15}{x} - 16;$

б) $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$

$$38B. a) \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{18}{(x-2)^2} = 7\left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}\right) + 10; \quad б) [-2; 2]$$

$$39B. a) \frac{(x-1)^2}{8} + \frac{8}{(x-1)^2} = 7\left(\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1}\right) - 1; \quad б) [-2; 3]$$

$$40B. a) (x-2)^4 + 3(x-2)^2(x-3)^2 - 4(x-3)^4 = 0; \quad б) [\sqrt{6}; 3]$$

$$41B. a) 2(x^3+1) + (x^2-x+1)^2 = 3(x+1)^2; \quad б) [1; \sqrt{5}]$$

$$42B. a) 2(x^2+x+1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3-1); \quad б) [0; 3]$$

$$43B. a) 20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0; \quad б) \left[\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right]$$

$$44B. a) 5\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 44\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 12\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0; \quad б) [-1; 0]$$

$$45B. a) (2x-2)^2(x+1)^2 - \sqrt{2}(x^2-1) - 6 = 0; \quad б) [-\sqrt{2}; \sqrt[3]{4}]$$

ОТВЕТЫ

1B. a) -2; 0; 1; б) 0. 2B. a) -1; 0; 1; б) 0. 3B. a) 1; 3; 6; б) 3. 4B. a) -9; -3; -0,5; б) -3; -0,5. 5B. a) 0; 3; б) 0. 6B. a) 0; 1; 5; б) 0; 1. 7B. a)

$\sqrt{3} \pm 2; \sqrt{3} \pm 1; \quad б) \sqrt{3} - 1.$ 8B. a) -1; 2; $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad б) \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$ 9B. a)

-3; 2; $\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}; \quad б) -3; \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}.$ 10B. a) 3; $3 \pm 2\sqrt{5}; \quad б) 3; 3 + 2\sqrt{5}.$ 11B. a)

-2; 3; б) -2. 12B. a) -2; 2; б) 2. 13B. a) 0; 1; б) 1. 14B. a) -1; б) -1. 15B.

a) 2; 3; б) 2. 16B. a) 1; 2; 3; б) 2. 17B. a) $\pm\sqrt{2}; 0; 1; \quad б) -\sqrt{2}; 0.$ 18B. a)

$\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}; \quad б) \frac{5 + \sqrt{21}}{2}.$ 19B. a) $\frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}; \quad б) \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}.$ 20B. a) 0,5; 3,5; б) 3,5.

21B. a) $\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}; \quad б) \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}.$ 22B. a) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad б) \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$ 23B. a) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad б)$

$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$ 24B. a) 1; $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad б) 1; \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}.$ 25B. a) $\pm\sqrt{2}; -1; 2; \quad б) \sqrt{2}.$ 26B. a)

$\frac{1}{2}; 2; \frac{-11 \pm \sqrt{105}}{4}; \quad б) \frac{1}{2}; \frac{-11 + \sqrt{105}}{4}.$ 27B. a) -2; 6; $3 \pm \sqrt{21}; \quad б) -2; 3 - \sqrt{21}.$

28B. a) 2; $1 \pm \sqrt{2}; \quad б) 2; 1 + \sqrt{2}.$ 29B. a) -2; $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}; \quad б) \frac{3 + \sqrt{21}}{2}.$ 30B. a) -1;

- б) -1 . **31В.** а) $-1; 0; 1; 2$; б) $-1; 0$. **32В.** а) $-1; 2$; б) 2 . **33В.** а) $\pm\sqrt{3}; 1; 3$; б) $-\sqrt{3}; 1$. **34В.** а) $\pm\sqrt{2}; 1; 2$; б) $1; \sqrt{2}$. **35В.** а) $1; 3$; б) 3 . **36В.** а) $-2; 3$; б) 3 . **37В.** а) $1; 3; \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$; б) $1; 3; \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$. **38В.** а) $-1; 4; 6 \pm \sqrt{22}$; б) $-1; 6 - \sqrt{22}$. **39В.** а) $-1; 5; 7 \pm 2\sqrt{11}$; б) $-1; 7 - 2\sqrt{11}$. **40В.** а) $2,5$; б) $2,5$. **41В.** а) $0; 2$; б) 2 . **42В.** а) $-1; -0,5; 2; 4$; б) 2 . **43В.** а) $\frac{2}{3}; 2$; б) $\frac{2}{3}$. **44В.** а) $\frac{-9 \pm \sqrt{73}}{2}$; б) $\frac{-9 + \sqrt{73}}{2}$. **45В.** а) $\pm\sqrt{1 + \sqrt{2}}$; б) $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

Уровень С

- 1С.** $3\left(x + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$. **2С.** $x^3 + \frac{1}{x^3} + x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 6$.
3С. $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$. **4С.** $(x-2)^4 + (x-3)^4 = 1$.
5С. $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$. **6С.** $4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0$.
7С. $(x-1)^5 + (x+3)^5 = 242(x+1)$. **8С.** $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64$.
9С. $x^4 + x(x+2) + 1 = 0$. **10С.** $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$.

11С. Составить уравнение с целыми коэффициентами возможно более низкой степени, одним из корней которого было бы число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

12С. Найти коэффициенты a и b уравнения $x^4 + x^3 - 18x^2 + ax + b = 0$, если известно, что среди его корней имеются три равных целых числа.

13С. Решить уравнение $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x - 10 = 0$, если известно, что два его корня отличаются друг от друга только знаками.

ОТВЕТЫ

- 1С.** $-1; \frac{1}{3}$; **2С.** 1 . **3С.** $-5; -3$. **4С.** $2; 3$. **5С.** $-0,5$. **6С.** $\pm\frac{1}{2}; \frac{1}{2 \pm \sqrt{3}}$. **7С.** -2 ; $-1; 0$. **8С.** $2; 4$. **9С.** $\emptyset$. **10С.** $\frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. **11С.** $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. **12С.** $a = -52; b = -40$. **13С.** $\pm\sqrt{2}$.