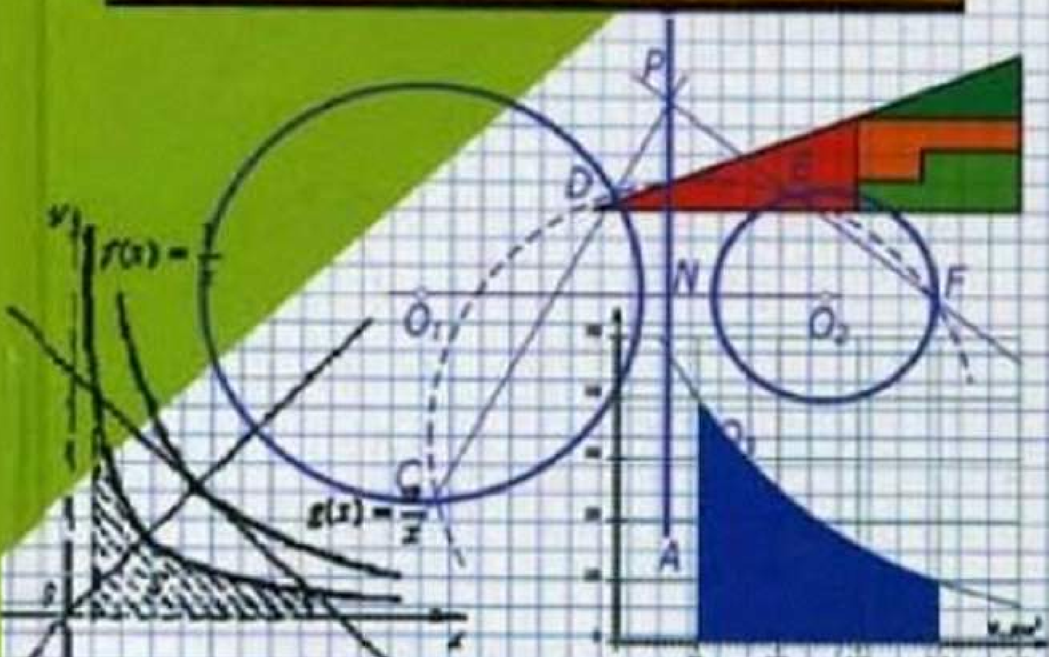
ЗдрАВСтвуй, школа!

Лучше, чем учебник!

Алгебра и геометрия в таблицах и схемах



Найти $\angle$ DAB и $\angle$ EAB

Лучше чем учебник

Серия «Здравствуй, школа!»

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

В ТАБЛИЦАХ И СХЕМАХ

ЛУЧШЕ, ЧЕМ УЧЕБНИК!

Ростов-на-Дону
«Феникс»
2006

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721
КТК 444
Р30

Роганин А. Н.

Р30 Алгебра и геометрия в таблицах и схемах : лучше, чем учебник! / А. Н. Роганин, В. А. Дергачев. — Ростов н/Д : Феникс, 2006. — 222, [1] с. : ил. — (Здравствуй, школа!).
ISBN 5-222-09027-2

Книга представляет собой справочник по курсу школьной алгебры и геометрии. Содержание соответствует новым программам средних общеобразовательных школ. Часть «Алгебра» рассматривает натуральные числа, вычисления с дробями, степени, корни, логарифмы, уравнения, функции и их свойства. Часть «Геометрия» рассматривает преобразования пространства, углы и прямые на плоскости, параллельные и перпендикулярные прямые, треугольники, четырехугольники и многоугольники, окружность, тела вращения и многое другое.

ISBN 5-222-09027-2

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721

Справочное пособие

Роганин Александр Николаевич

Дергачев Владимир Андреевич

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ В ТАБЛИЦАХ И СХЕМАХ
ЛУЧШЕ, ЧЕМ УЧЕБНИК!

Ответственные редакторы *Оксана Морозова, Наталья Калиничева, Сергей Смоленский*
Технический редактор *Галина Логвинова*
Макет обложки *Александр Вартанов*

Подписано в печать 10.05.06. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2.
Тираж 5 000 экз. Заказ № 3086

Издательство «Феникс»
344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80
Тел.: (8632) 61-89-76. E-mail: [illegible]

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «ИПП «Курск»
305007, г. Курск, ул. Энгельса, 109.

E-mail: Antek 2005@yandex.ru
www.petit.ru

Качество печати соответствует качеству предоставленных диапозитивов

АЛГЕБРА
И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Некоторые знаки, обозначения и сокращения

N — множество натуральных чисел
Z — множество целых чисел
Q — множество рациональных чисел
R — множество действительных чисел
$\varnothing$ — пустое множество
$\in$ — принадлежность ($a \in M$ — элемент a принадлежит множеству M; $a \notin M$ — элемент a не принадлежит множеству M)
$\cup$ — объединение множеств ($A \cup B$ — объединение множеств A и B)
$\cap$ — пересечение множеств ($A \cap B$ — пересечение множеств A и B)
$\subset$ — подмножество (включение) ($B \subset A$ — множество B является подмножеством A)
$\setminus$ — разность ($A \setminus B$ — разность множеств A и B)
$=$ — равно ($a = b$ — a равно b)
$\neq$ — не равно ($a \neq b$ — a не равно b)
$>$ — больше ($a > b$ — a больше b)
$<$ — меньше ($a < b$ — a меньше b)
$\geqslant$ — больше или равно ($a \geqslant b$ — a не меньше b)
$\leqslant$ — меньше или равно ($a \leqslant b$ — a не больше b)
НОД (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b
НОК (a, b) — наименьшее общее кратное чисел a и b
$|a|$ — абсолютная величина (модуль) числа a
$[a]$ — целая часть числа a; $\{a\}$ — дробная часть числа a
$\sqrt{a}$ — арифметический квадратный корень из числа a
$\sqrt[n]{a}$ — арифметический корень n-й степени из числа a
$\log_a b$ — логарифм числа b по основанию a
$\lg b$ — десятичный логарифм числа b
$\ln b$ — натуральный логарифм числа b
$\pi = 3{,}1415926\ldots$ — число π — отношение длины окружности к диаметру
$e = 2{,}7182818\ldots$ — число e — основание натурального логарифма
$f(x_0)$ — значение функции f в точке x_0
$\sin x$ — функция синус x; $\cos x$ — функция косинус x
$\operatorname{tg} x$ — функция тангенс x; $\operatorname{ctg} x$ — функция котангенс x
$\arcsin x$ — функция арксинус x; $\arccos x$ — функция арккосинус x
$\operatorname{arctg} x$ — функция арктангенс x; arcctg — функция арккотангенс x
$[a; b]$ — замкнутый промежуток (отрезок) с началом a и концом b
$(a; b)$ — открытый промежуток (интервал) с началом a и концом b
$[a; b)$ и $(a; b]$ — полузамкнутые числовые промежутки с началом a и концом b

$(-\infty; +\infty)$ — числовая прямая; $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$ — полузамкнутые числовые лучи; $(a; +\infty)$; $(-\infty; b)$ — открытые числовые лучи
$a < x < b$ — двойное неравенство (x больше a и меньше b)
$a \leqslant x < b$ — двойное неравенство (x не меньше a и меньше b)
$a < x \leqslant b$ — двойное неравенство (x больше a и не больше b)
$a \leqslant x \leqslant b$ — двойное неравенство (x не меньше a и не больше b)
$(a; b)$ — упорядоченная пара чисел
$(a; b; c)$ — упорядоченная тройка чисел
Ox — ось абсцисс; Oy — ось ординат; Oz — ось аппликат
$M(x)$ — точка M с координатой x
$M(x; y)$ — точка M с координатами x и y
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ — число b — предел функции $f(x)$ при условии, что x стремится к a
Δx — приращение аргумента; Δy, $\Delta f(x)$ — приращение функции
$f'(x)$ — производная функции $f(x)$
$f'(x_0)$ — значение производной функции $f(x)$ в точке x_0
$F(x)$ — первообразная функция для функции $f(x)$
$\int f(x)dx$ — неопределенный интеграл функции $f(x)$
$\int\limits_a^b f(x)dx$ — определенный интеграл функции $f(x)$ от a до b
i — мнимая единица $(i^2 = -1)$
$z = a + bi$ — комплексное число (a — действительная часть числа z, bi — мнимая часть числа z)
$\operatorname{Re} z$ — действительная часть комплексного числа z
$\operatorname{Im} z$ — мнимая часть комплексного числа z
$\bar{z}$ — число, сопряженное с числом z
$\arg z$ — аргумент комплексного числа z
$|z|$ — модуль комплексного числа z
$n!$ — n-факториал $(n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n)$
P_n — число перестановок из n элементов
A_n^m — число размещений из n элементов по m
C_n^m — число комбинаций из n элементов по m
A, B, C — случайные события
$P(A)$ — вероятность случайного события A
$A + B$ — сумма событий; $A \cdot B$ — произведение событий
$\bar{A}$ — событие, противоположное событию A
$\{$ — система; $[$ — совокупность.

§ 1. Множества и операции над ними

Множество и его элементы

Под *множеством* понимают совокупность любых предметов, объектов, объединенных между собой некоторым общим для них признаком.

Предметы (объекты), из которых состоит множество, называются его *элементами*.

Для обозначения множеств используют большие латинские буквы A, B, C, ..., для обозначения элементов — малые a, b, c... .

Если элемент a является элементом множества A, то символьно записывают так: $a \in A$.

Если элемент x не является элементом множества A, то символьно записывают так: $x \notin A$.

Задание множеств

Множество, имеющее определенное количество элементов, называют *конечным*.

Если множество имеет бесконечное количество элементов, его называют *бесконечным*. Множество, не имеющее ни одного элемента, называют *пустым* и обозначают символом $\varnothing$.

Множество можно задать перечнем его элементов; элементы множества записывают в фигурных скобках. *Например*, если A — множество делителей числа 12, то $A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

Множество элементов, имеющее некоторое характеристическое свойство, описывают так: пишут фигурные скобки, в них x — обозначение элемента множества, после него — двоеточие, а потом — характеристическое свойство. *Например*, запись $A = \{x : x$ является жителем Парижа$\}$ означает, что множество A состоит из всех жителей Парижа.

Подмножество

Если каждый элемент множества A содержится в множестве B, то множество A называют *подмножеством* множества B и символьно обозначают так: $A \subset B$ (рис. 1). Запись $A \subset B$ означает, что когда $x \in A$, то $x \in B$. Если одновременно $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что множества A и B равны ($A = B$).

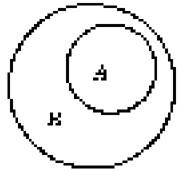


Рис. 1

Пересечение множеств

Пересечением множеств A и B называют множество их общих элементов (рис. 2).

Пересечение множеств A и B символьно записывают так: $A \cap B$.

Если $C = A \cap B$ и $x \in C$, то это означает, что $x \in A$ и $x \in B$.

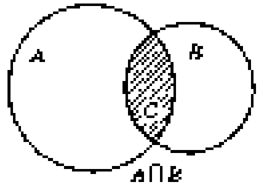


Рис. 2

Объединение множеств

Объединением множеств A и B называют множество элементов, которые входят в состав по крайней мере одного из этих двух множеств (рис. 3).

Объединение множеств A и B символьно записывают так: $A \cup B$.

Если $C = A \cup B$ и $x \in C$, то это означает, что $x \in A$ или $x \in B$.

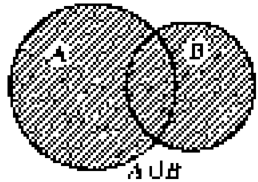


Рис. 3

Разность множеств

Разностью множеств A и B называют множество таких элементов, которые входят в множество A, но не содержатся в множестве B (рис. 4).

Разность множеств A и B символьно записывают так: $A \setminus B$.

Если $C = A \setminus B$ и $x \in C$, то это означает, что $x \in A$ и $x \notin B$.

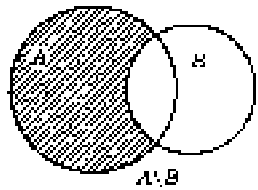


Рис. 4

Законы операций над множествами

Переместительный закон:	$A \cap B = B \cap A$;	$A \cup B = B \cup A$.
Закон идемпотентности:	$A \cap A = A$;	$A \cup A = A$.
Закон пустого множества:	$\varnothing \cap A = \varnothing$;	$\varnothing \cup A = A$.
Закон поглощения:	$A \cup (A \cap B) = A$;	$A \cap (A \cup B) = A$.
Сочетательный закон:	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;	
	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.	
Распределительный закон:	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;	
	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.	

§ 2. Целые числа

Натуральные числа

Числа 1; 2; 3; ..., которые употребляются для счета, называются *натуральными*.

Множество натуральных чисел обозначают символом N, то есть:

$$N=\{1;2;3;4;5;\ldots;n;\ldots\}.$$

Целые числа

Натуральные числа, противоположные им числа и число нуль называются *целыми числами*.

Множество целых чисел $\{\ldots;-3;-2;-1;0;1;2;3;\ldots\}$ обозначают символом Z.

Степень с натуральным показателем

Степенью числа a *с натуральным показателем* n, *большим единицы*, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a:

$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}}$, $n\in N$, $n\geq 2$.

Например, $(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-8$; $3^4=3\cdot3\cdot3\cdot3=81$; $1^n=1$, $n\in N$; $0^n=0$, $n\in N$.

Первой степенью числа a называется само число: $a^1=a$.

В записи $a^n=b$ число a называют ***основанием степени***, n — ***показателем степени***, b — ***значением степени***.

Вторую степень числа a называют ***квадратом числа*** a, третью степень числа a называют ***кубом числа*** a.

Степень с целым показателем

Нулевая степень числа, отличного от нуля, равна единице: $a^0=1$, $a\neq 0$.

Например, $7^0=1$, $(-5)^0=1$.

Нулевая степень нуля (0^0) не определяется.

Степень с целым отрицательным показателем определяется так: если $a\neq 0$ и $n\in N$, то $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$.

Выражение 0^{-n}, где $n\in N$, не определяется.

Например, $5^{-1}=\dfrac{1}{5^1}=\dfrac{1}{5}$, $3^{-2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$.

Свойства степеней с целым показателем

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $m \in Z$, $n \in Z$.

   Например, $5^3 \cdot 5^{-1} = 5^{3-1} = 5^2 = 25$.

2. $a^m : a^n = a^{m-n}$, или $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $m \in Z$, $n \in Z$.

   Например, $3^{-4} : 3^{-6} = 3^{-4+6} = 3^2 = 9$.

3. $(a^m)^n = a^{mn}$, $m \in Z$, $n \in Z$.

   Например, $\left((-2)^2\right)^5 = (-2)^{10} = 1024$.

4. $(ab)^n = a^n b^n$, $n \in Z$.

   Например, $(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$.

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $n \in Z$.

   Например, $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{(-2)^4}{3^4} = \dfrac{16}{81}$.

6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$, $n \in Z$.

   Например, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} = \left(\dfrac{2}{1}\right)^5 = 2^5 = 32$.

7. $a^{2k} > 0$, $a \neq 0$, $k \in N$.

   Например, $5^2 = 25 > 0$, $(-3)^4 = 81 > 0$, $(-7)^{-2} = \dfrac{1}{49} > 0$.

8. Если $a > 0$, то $a^{2k-1} > 0$, $k \in N$; если $a < 0$, то $a^{2k-1} < 0$, $k \in N$.

   Например, $2^3 = 8 > 0$, $(-2)^3 = -8 < 0$.

Стандартный вид числа

Стандартным видом *числа* a называется его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \le a < 10$, $n \in Z$.

Число n называют ***порядком числа***.

Например, число $a = 125\,000$ в стандартном виде записывается так: $a = 1{,}25 \cdot 10^5$, а число $a = 0{,}000508$ в стандартном виде записывается так: $a = 5{,}08 \cdot 10^{-4}$.

§ 3. Действительные числа

Рациональные числа

Рациональными числами называются числа, которые можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$. Множество рациональных чисел обозначается символом Q.

Любое натуральное число, целые числа, обыкновенные дроби, смешанные числа, десятичные дроби являются рациональными числами.

Например, $5=\frac{5}{1}$; $-3=-\frac{3}{1}$; $5\frac{1}{3}=\frac{16}{3}$; $1,1=\frac{11}{10}$; $0=\frac{0}{1}$ – рациональные числа.

Свойства рациональных чисел

1. Любое рациональное число можно представить или в виде конечной десятичной дроби, или в виде бесконечной десятичной периодической дроби.
2. Чтобы представить рациональное число в виде десятичной дроби, надо числитель разделить на знаменатель.
3. Любую бесконечную периодическую десятичную дробь или конечную десятичную дробь можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$.
4. Чисто периодическая десятичная дробь равна обыкновенной дроби, числителем которой является период, а знаменателем — цифра 9, записанная столько раз, сколько цифр в периоде.

   Например, $0,(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$; $0,(428571)=\frac{428571}{999999}=\frac{3}{7}$.
5. Чтобы преобразовать смешанную бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную дробь, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и записать эту разность в числитель, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

   Например, $0,11(7)=\frac{117-11}{900}=\frac{106}{900}=\frac{53}{450}$.
6. Сумма, разность, произведение, частное двух рациональных чисел являются рациональным числом.

Арифметический квадратный корень

Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число b, квадрат которого равен a.

Обозначают так: $\sqrt{a}=b$; эта запись означает: $b^2=a$, $b\ge 0$. Символ $\sqrt{\ }$ называется знаком корня, или радикалом.

Например, $\sqrt{16}=4$, так как $4^2=16$ и $4>0$.

Квадратный корень из отрицательного числа не существует.

Свойства арифметического квадратного корня

Основные тождества

1. $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a, & \text{если } a\ge 0,\\ -a, & \text{если } a<0.\end{cases}$

Например, $\sqrt{25}=\sqrt{5^2}=|5|=5$.

2. $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$; $\sqrt{0}=0$.

Например, $\left(\sqrt{9}\right)^2=9$.

3. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, где $a\ge 0$, $b\ge 0$.

Например, $\sqrt{25\cdot 16}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{16}=5\cdot 4=20$.

4. $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, где $a\ge 0$, $b>0$.

Например, $\sqrt{\dfrac{25}{16}}=\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}}=\dfrac{5}{4}=1\dfrac{1}{4}$.

Внесение множителя под знак квадратного корня:

$b\sqrt{a}=\sqrt{b^2a}$, если $b\ge 0$; $b\sqrt{a}=-\sqrt{b^2a}$, если $b<0$.

Например, $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{18}$; $-2\sqrt{3}=-\sqrt{2^2\cdot 3}=-\sqrt{12}$.

Вынесение множителя из-под знака квадратного корня:

$\sqrt{b^2a}=b\sqrt{a}$, если $b\ge 0$, $a\ge 0$;

$\sqrt{b^2a}=-b\sqrt{a}$, если $b<0$, $a\ge 0$.

$\sqrt{b^2a}=|b|\sqrt{a}$.

Например, $\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=5\sqrt{2}$; $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

Иррациональные числа

Иррациональным числом называется число, которое нельзя представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$.

Например, число π, равное отношению длины окружности к ее диаметру, $\pi = 3{,}1415926...$ — иррациональное число; длина диагонали d квадрата со стороной, равной 1, — иррациональное число, $\sqrt{2} = d$ (рис. 5); иррациональными также являются числа $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$ и многие другие.

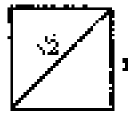


Рис. 5

Свойства иррациональных чисел

Любое иррациональное число можно записать в виде *бесконечной непериодической десятичной дроби.*

Например, $\sqrt{2} = 1{,}4142...$, $e = 2{,}7182818...$

Бесконечная непериодическая десятичная дробь представляет собой запись некоторого иррационального числа.

Сумма, разность, произведение, частное рационального и иррационального чисел — число иррациональное.

Например, числа $2+\sqrt{3}$; $\sqrt{3}-1$; $5\sqrt{2}$; $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$ — иррациональные числа.

Сумма, разность, произведение, частное двух иррациональных чисел, а также результат возведения иррационального числа в степень могут быть как рациональными, так и иррациональными числами.

Например, $(2+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}-2)=-1$; $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$.

Сравнение иррациональных чисел, выполнение арифметических действий над ними сводится к сравнению и выполнению действий над их рациональными приближениями.

Действительные числа

Рациональные и иррациональные числа образуют ***множество действительных чисел***, которое обозначают символом R.

Между множествами N, Z, Q и R существует соотношение: $N \subset Z \subset Q \subset R$, т. е. каждое из этих множеств является подмножеством следующего множества (рис. 6).

Любое действительное число можно записать в виде *бесконечной десятичной дроби*.

Любая бесконечная десятичная дробь является записью некоторого действительного числа.

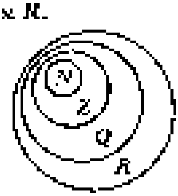


Рис. 6

Числовая прямая и действительные числа

Числовой прямой называется прямая, на которой указано начало отсчета (точка O), положительное направление (обозначается стрелкой) и единичный отрезок (OE).

Точка O разбивает прямую на два луча: положительную полупрямую и отрицательную полупрямую. Каждому действительному числу a соответствует единственная точка A числовой прямой, и каждой точке A числовой прямой соответствует единственное число a, которое называется координатой точки A и обозначается $A(a)$.

Например, координатами точек A, B, C (рис. 7) являются числа $-1\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\sqrt{2}$, это записывается так: $A\left(-1\frac{1}{2}\right)$; $B\left(\frac{1}{2}\right)$; $C\left(\sqrt{2}\right)$.

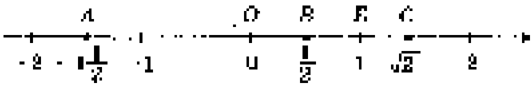


Рис. 7

Сравнение действительных чисел

Из двух действительных чисел большим (меньшим) является то число, которое при изображении этих чисел точками на числовой прямой расположено по правую (левую) сторону (рис. 8).

Рис. 8

Сумма, разность, произведение, частное (на нуль делить нельзя) действительных чисел являются действительным числом.

Свойства арифметических действий над действительными числами

Пусть a, b, c — действительные положительные числа, тогда:

$$a+b=b+a; \qquad ab=ba;$$

$$(a+b)+c=a+(b+c); \qquad (ab)c=a(bc);$$

$$a+0=0+a=a; \qquad a\cdot 1=1\cdot a=a;$$

$$a+(-a)=0; \qquad a\cdot 0=0\cdot a=0;$$

$$-(-a)=a; \qquad a\cdot\frac{1}{a}=1;$$

$$0-a=-a; \qquad 0:a=0; \ \frac{a}{0} \text{ — не определено.}$$

$$a(b+c)=ab+ac. \qquad (a+b):c=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}.$$

Арифметический корень n-й степени

Арифметическим корнем n-й степени $(n \in N,\ n > 1)$ из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число b, которое при возведении его в степень n дает число a. Число n называется ***показателем корня***, число a — ***подкоренным выражением***.

Обозначение: $\sqrt[n]{a} = b$; эта запись означает: $b^n = a$, $a \ge 0$, $b \ge 0$. *Например*, $\sqrt[3]{8} = 2$, так как $2^3 = 8$ и $2 > 0$; $\sqrt[4]{81} = 3$, так как $3^4 = 81$, $3 > 0$.

Корнем ***нечетной степени*** из отрицательного числа a называется такое отрицательное число b, которое при возведении его в эту нечетную степень равно числу a.

Запись $\sqrt[2k+1]{a} = b$ означает: $b^{2k+1} = a$, $b < 0$, $k \in N$.

Например, $\sqrt[3]{-27} = -3$, поскольку $(-3)^3 = -27$; $\sqrt[5]{-32} = -2$, ибо $(-2)^5 = -32$.

Свойства корней

Основные тождества

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, $n \in N$, $n \ge 2$.

2. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$, $a \ge 0$, $n \in N$, $m \in Z$, $k \in N$, $n \ge 2$.

3. $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \ge 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$

Кроме того, $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$, $k \in N$.

4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, $n \in N$, $k \in N$, $a \ge 0$, $n \ge 2$, $k \ge 2$.

Например, $\sqrt{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[6]{10}$; $\sqrt[4]{16} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$.

5. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$, $k \in N$, $n \in N$, $n \ge 2$, $a \ge 0$.

Например, $\sqrt{25^3} = \left(\sqrt{25}\right)^3 = 5^3 = 125$.

6. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $a \ge 0$, $b \ge 0$.

Например, $\sqrt[4]{16 \cdot 81} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = 2 \cdot 3 = 6$.

7. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \ge 0$, $b > 0$.

Например, $\sqrt[5]{\dfrac{32}{243}} = \dfrac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} = \dfrac{2}{3}$.

Вынесение множителя из-под знака корня:

$$\sqrt[2k]{b^{2k}a} = |b|\cdot\sqrt[2k]{a} = \begin{cases} b\sqrt[2k]{a}, & \text{если } b \ge 0,\\ -b\sqrt[2k]{a}, & \text{если } b<0, \ a\ge 0,\ k\in N. \end{cases}$$

$\sqrt[2k+1]{b^{2k+1}a} = b\sqrt[2k+1]{a}$, $k\in N$.

Например, $\sqrt[5]{32\cdot 3} = \sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{3} = 2\sqrt[5]{3}$.

Внесение множителя под знак корня:

$b\sqrt[2k]{a} = \sqrt[2k]{b^{2k}a}$, если $b\ge 0$,

$b\sqrt[2k]{a} = -\sqrt[2k]{b^{2k}a}$, если $b<0$, $k\in N$. $b\sqrt[2k+1]{a} = \sqrt[2k+1]{b^{2k+1}a}$, $k\in N$.

Например, $2\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{96}$; $-3\sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{3^4\cdot 2} = -\sqrt[4]{162}$.

Степень с рациональным показателем

Степенью положительного числа a с рациональным показателем $\frac{m}{n}$ ($m\in Z$, $n\in N$, $n\ge 2$) называется корень n-й степени из a^m, т.е. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, где $a>0$.

Например, $144^{\frac12} = \sqrt{144} = 12$; $16^{-\frac34} = \sqrt[4]{16^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16^3}} = \frac18$.

Выражение $(-27)^{\frac13}$ не имеет смысла.

Свойства степени с рациональным показателем

Свойства степеней с целыми показателями верны и для степеней с рациональными показателями:

$$a^r\cdot a^s = a^{r+s};\qquad a^r : a^s = a^{r-s};\qquad (a^r)^s = a^{rs};$$

$$(ab)^r = a^r b^r;\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

Например, $a^{\frac23}\cdot a^{\frac12} = a^{\frac23+\frac12} = a^{\frac76}$; $a^{\frac14} : a^{\frac34} = a^{\frac14-\frac34} = a^{-\frac12}$;

$\left(a^{\frac23}\right)^{\frac34} = a^{\frac23\cdot\frac34} = a^{\frac24} = a^{\frac12}$; $\left(a^{\frac12}b^{\frac14}\right)^{\frac{16}{13}} = a^{\frac12\cdot\frac{16}{13}}b^{\frac14\cdot\frac{16}{13}} = a^{\frac{8}{13}}b^{\frac{4}{13}}$;

$$\left(\frac{a^{\frac14}}{b^{\frac12}}\right)^2 = \frac{a^{\frac14\cdot 2}}{b^{\frac12\cdot 2}} = \frac{a^{\frac12}}{b}.$$

Модуль действительного числа

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0, \\ -a, & \text{если } a < 0, \\ 0, & \text{если } a = 0. \end{cases}$$

Геометрическая интерпретация модуля

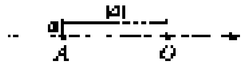


Рис. 9

Если точка A имеет на числовой прямой координату a, то расстояние (рис. 9) от A до O равно $|a|$, т. е. $AO = |a|$.

Свойства модуля

$|a| \geq 0$; $|-a| = |a|$; $a \leq |a|$; $|a|^2 = a^2$;

$|ab| = |a|\,|b|$; $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$; $|a^n| = |a|^n$; $|a|^{2k} = a^{2k}$, $k \in N$;

$|a+b| \leq |a| + |b|$; $|a+b| \geq |a| - |b|$; $|a-b| \geq \big||a| - |b|\big|$; $|a-b| \leq |a| + |b|$;

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|.$$

Целая и дробная части числа

Целой частью числа a (или антье a) называется наибольшее целое число, не превышающее числа a; обозначается так: $[a]$.

Например, $[2{,}1] = 2$; $[\sqrt{2}] = 1$; $[0{,}3] = 0$; $[-1{,}3] = -2$; $[-\sqrt{3}] = -2$.

Дробной частью числа a называется число, которое равно $a - [a]$; обозначается так: $\{a\}$, т. е. $\{a\} = a - [a]$.

Например, $\{2{,}1\} = 2{,}1 - 2 = 0{,}1$; $\{0{,}3\} = 0{,}3 - 0 = 0{,}3$; $\{-1{,}3\} = -1{,}3 - (-2) = 0{,}7$.

Любое число a можно представить в виде $a = [a] + \{a\}$.

Например, $1{,}3 = 1 + 0{,}3$; $-1{,}3 = -2 + 0{,}7$.

Логарифмы

Логарифмом положительного числа b $(b > 0)$ ***по основанию*** a $(a > 0,\ a \neq 1)$ называется показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число b; обозначается так: $\log_a b$.

Например, $\log_2 16 = 4$; $\log_{\sqrt{3}} 3 = 2$; $\log_5 \dfrac{1}{25} = -2$.

Формулу $a^{\log_a b} = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ называют ***основным логарифмическим тождеством***.

Основные свойства логарифмов

1. $\log_a 1 = 0$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. *Например,* $\log_3 1 = 0$.

2. $\log_a a = 1$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. *Например,* $\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 1$.

3. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y > 0)$.

   Например, $\log_3 15 = \log_3 (3 \cdot 5) = \log_3 3 + \log_3 5 = \log_3 5 + 1$;

   $\log_{12} 3 + \log_{12} 4 = \log_{12} 12 = 1$.

4. $\log_a \left(\dfrac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y > 0)$.

   Например, $\log_2 \dfrac{3}{8} = \log_2 3 - \log_2 8 = \log_2 3 - 3$.

5. $\log_a x^p = p \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$.

   Например, $\log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3} \log_3 3 = \dfrac{1}{3} \cdot 1 = \dfrac{1}{3}$.

6. Формула перехода от одного основания логарифма к другому:

   $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0,\ c \neq 1)$.

   Например, $\log_8 3 = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 8}$; $\dfrac{\log_3 2}{\log_3 8} = \log_8 2 = \dfrac{1}{3}$.

   Следствия:

   1) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1)$.

   2) $\log_a b = \log_{a^n} b^n$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$.

   3) $\log_{a^p} b = \dfrac{1}{p} \log_a b$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$.

   4) $\log_{a^q} a^p = \dfrac{p}{q}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Десятичные логарифмы

Десятичными логарифмами называются логарифмы, основание которых равно 10; обозначаются символом lg: $\log_{10} b = \lg b$.

Например, $\lg 1 = 0$; $\lg 100 = 2$; $\lg 0{,}1 = -1$.

Таблица десятичных логарифмов некоторых чисел

a	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lg a \approx$	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95

Натуральные логарифмы

Натуральными логарифмами называются логарифмы, основание которых равно e ($e = 2,7182818$); обозначаются символом ln: $\log_e b = \ln b$.

Таблица натуральных логарифмов некоторых чисел

a	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100
$\ln a \approx$	0,69	1,10	1,39	1,61	1,79	1,95	2,08	2,20	2,30	4,61

Формулы перехода от десятичного логарифма к натуральному и наоборот

$$\lg e = \frac{1}{\ln 10} \approx 0,4343; \ \lg x \approx 0,4343 \ln x;$$

$$\ln 10 = \frac{1}{\lg e} \approx 2,3026; \ \ln x \approx 2,3026 \lg x.$$

§ 4. Одночлены и многочлены

Одночлены

Одночленом называется произведение чисел, переменных и их натуральных степеней, а также сами числа, переменные и их натуральные степени.

Например, $5xy$; $6a^3b^4$; 4; a; a^1; $-a^7$ — одночлены.

Одночлен стандартного вида — одночлен, содержащий только один числовой множитель, который стоит на первом месте, и степени с разными буквенными основаниями.

Например, $5a^2bc$; $13xyz^3$; -5; $-a$; a^2b — одночлены стандартного вида.

Коэффициентом одночлена называется числовой множитель одночлена стандартного вида.

Например, коэффициентами одночленов $3a^2b$; $-8xy$; $-x^4y$; abc являются соответственно числа 3; −8; −1; 1. Коэффициенты 1 и −1 в одночленах не принято писать.

Чтобы записать одночлен в стандартном виде, надо перемножить все его числовые множители и полученное число поставить на первое место, а потом произведения одинаковых буквенных множителей записать в виде степеней. *Например,* $2xy\cdot 7axy\cdot(-3)a^2bx = -42a^3bx^3y^2$.

Степенью одночлена называется сумма показателей степеней всех буквенных множителей, которые входят в одночлен.

Например, степень одночлена $2x^2yz$ равна 4.

Если одночленом является число, отличное от нуля, то его степень считается равной нулю. Число 0 степени не имеет.

Чтобы умножить одночлен на одночлен, надо перемножить их коэффициенты и перемножить степени с одинаковыми основаниями. *Например,* $12a^2xy\cdot(-3xy^4z) = -36a^2x^2y^5z$.

Чтобы возвести одночлен в степень, надо возвести его коэффициент в эту степень и умножить показатель степени каждой буквы на показатель степени, в которую возводят одночлен. *Например,* $(-2x^2yz^4)^4 = 16x^8y^4z^{16}$.

Чтобы поделить одночлен на одночлен, надо поделить коэффициент делимого на коэффициент делителя, к найденному частному приписать множителями каждую переменную делимого с показателем, равным разности показателей этой переменной в делимом и делителе.

Например, $9x^5y^6z^5 : (3x^4y^2z) = \frac{9}{3}x^{5-4}y^{6-2}z^{5-1} = 3xy^4z^4$.

Многочлены и действия над ними

Многочленом называется алгебраическая сумма нескольких одночленов. *Например.* $5x^2 - 2x + 8$; $7a^2b^4 - 5ab + xy$ — многочлены.

Одночлены, из которых состоит многочлен, называются его ***членами***. Одночлен — частный случай многочлена. Многочлен, содержащий два или три слагаемых, называется ***двучленом*** (биномом) и ***трехчленом*** соответственно.

Например. $a^2 - b^2$, $3a - 2$ — двучлены; $a^2 + ab + b^2$, $x^2 - 3x + 2$ — трехчлены.

Подобные члены многочлена — это одинаковые одночлены или, если их записать в стандартном виде, отличающиеся только коэффициентами.

Например, в многочлене $5x^2y + 6xy^2 - 7x^2y - 8xy^2$ первый и третий, второй и четвертый члены подобны.

Приведение подобных членов — это упрощение многочлена, при котором алгебраическая сумма подобных членов заменяется одним членом. Чтобы привести подобные члены, надо сложить их коэффициенты и приписать их общую буквенную часть.

Например. $\underline{2ab} + \underline{3b^2} - 2a^2 + a^2 - 5ab - \underline{b^2} = 2b^2 - 3ab - a^2$.

Стандартный вид многочлена — это запись многочлена, в которой все члены многочлена — одночлены стандартного вида и среди них нет подобных.

Например. $x^4 - 2x^3 + 3$, $ab + bc + abc$ — многочлены стандартного вида, а $5x^4 - 3x - 6 + 2x^2$ — многочлен нестандартного вида.

Степенью многочлена стандартного вида называется наибольшая из степеней одночленов, составляющих многочлен. Степенью произвольного многочлена называется степень тождественно равного ему многочлена стандартного вида.

Например, степень многочлена $2x^5y + 3xy^2$ равна степени одночлена $2x^5y$, т. е. равна 6.

Чтобы ***сложить два многочлена***, достаточно соединить их знаком «+» и привести подобные члены. При сложении многочленов пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «+», то скобки можно опустить и сохранить знак каждого одночлена.

Например. $(3x^2 - 2x + 5) + (6x^2 + 5x - 3) = 3x^2 - \underline{2x} + 5 + 6x^2 + \underline{5x} - 3 = 9x^2 + 3x + 2$.

Чтобы найти ***разность двух многочленов***, надо поставить знак «−» перед взятым в скобки вторым многочленом. При вычитании многочленов тоже пользуются соответствующим правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «−», то скобки можно опустить, изменив знак каждого одночлена, находившегося в скобках, на противоположный.

Например. $(3x^2-2x+5)-(6x^2+5x-3)=\underline{3x^2}-\underline{2x}+\underline{5}-\underline{6x^2}-\underline{5x}+\underline{3}=$
$=-3x^2-7x+8$.

Записать алгебраическую сумму многочленов в виде многочлена стандартного вида — раскрыть скобки и привести подобные члены.

Например. $(2x^2-3x+2)-(3x^2-2x-1)-(-x^2+2x+1)+(-2x^2+x-1)=$
$=\underline{2x^2}-\underline{3x}+2-\underline{3x^2}+\underline{2x}+1+\underline{x^2}-\underline{2x}-1-\underline{2x^2}+\underline{x}-1=-2x^2-2x+1$.

Чтобы ***умножить одночлен на многочлен***, надо каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные одночлены сложить.

Например, $2a(a^2-a+2a^2)=2a^3-2a^2+4a^3=6a^3-2a^2$.

Чтобы ***умножить многочлен на многочлен***, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член второго многочлена и полученные одночлены сложить.

Например, $(3x-2)(2x-3)=3x\cdot2x-3\cdot3x-2\cdot2x+2\cdot3=$
$=6x^2-9x-4x+6=6x^2-13x+6$.

Чтобы ***разделить многочлен на одночлен***, надо каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить.

Например, $(5x^5-7x^4+8x^3-2x^2):(2x)=5x^5:(2x)-7x^4:(2x)+$
$+8x^3:(2x)-2x^2:(2x)=2{,}5x^4-3{,}5x^3+4x^2-x$.

Разложением многочлена на множители называется представление этого многочлена в виде произведения многочленов.

При разложении многочлена на множители используют:

1) вынесение общего множителя за скобки.
   Например, $5x^2+10x=5x(x+2)$;
2) способ группировки.
   Например, $5x-5y-x^2+xy=(5x-5y)-(x^2-xy)=5(x-y)-x(x-y)=$
   $=(x-y)(5-x)$;
3) формулы сокращенного умножения.

Формулы сокращенного умножения

1. Квадрат суммы (разности) двух выражений: $(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2$.
   Например, $(a+3)^2=a^2+6a+9$; $(x-2)^2=x^2-4x+4$.
2. Куб суммы (разности) двух выражений: $(a\pm b)^3=a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3$.
   Например, $(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1$, $(a-2)^3=a^3-6a^2+12a-8$.
3. Произведение разности двух выражений и их суммы:
   $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.
   Например, $(a-5)(a+5)=a^2-25$; $(2a-3b)(2a+3b)=4a^2-9b^2$.
4. Произведение суммы (разности) двух выражений на неполный квадрат их разности (суммы): $(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3$.
   Например, $(2a-3)(4a^2+6a+9)=8a^3-27$, $(2+y)(4-2y+y^2)=8+y^3$.

Применение формул сокращенного умножения для разложения многочлена на множители

Формулы сокращенного умножения широко используются для разложения многочлена на множители:

1. $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

   Например, $25 - 30x + 9x^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3x + (3x)^2 = (5 - 3x)^2$, $4 - 4a + a^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot a + a^2 = (2 - a)^2$.

2. Разность квадратов двух выражений: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

   Например, $4a^2 - 9b^2 = (2a - 3b)(2a + 3b)$,
   $25b^2 - 4a^6 = (5b - 2a^3)(5b + 2a^3)$.

3. Сумма (разность) кубов двух выражений: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

   Например, $8 - x^3 = (2 - x)(4 + 2x + x^2)$, $27a^3 + 1 = (3a + 1)(9a^2 - 3a + 1)$.

4. $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$.

   Например, $8 + 12a + 6a^2 + a^3 = (2 + a)^3$, $8a^3 - 12a^2 + 6a - 1 = (2a - 1)^3$.

Многочлен с одной переменной

Многочленом n-й степени с одной переменной называется многочлен вида:

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, где a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 — действительные числа, $a_n \neq 0$, x — переменная, $n \in N$.

Квадратным трехчленом называется многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где x — переменная; a, b и c — некоторые действительные числа, причем $a \neq 0$.

Два многочлена, представленные в стандартном виде, ***тождественно равны***, если их степени и коэффициенты при одинаковых степенях x равны. *Например*, многочлен $x^3 + 2x^2 - 1$ тождественно равен многочлену $ax^3 + bx^2 + cx + d$, если $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, $d = -1$.

Корнем квадратного трехчлена называется значение переменной, при котором значение этого трехчлена равно нулю.

Например, корнем трехчлена $3x^2 - 2x - 5$ является число -1, так как при $x = -1$ имеем: $3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 5 = 0$.

Число α называется ***корнем многочлена*** $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, где a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 — действительные числа, $a_n \neq 0$, если $a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$. *Например*, число 2 — корень многочлена $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$, так как $2^4 - 2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 0$.

Если число α — корень многочлена $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, то $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - \alpha)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0)$.

Например. $x=2$ — корень многочлена x^3+x^2-3x-6, тогда $x^3+x^2-3x-6=(x-2)(x^2+3x+3)$.

Многочлен $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$, где $a_n\neq 0$ может иметь не более n корней.

Если многочлен $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$, где $a_n\neq 0$, имеет корни α_1, α_2, ..., α_n, то этот многочлен можно разложить на множители:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n).$$

Квадратный трехчлен ax^2+bx+c **имеет не более двух корней:**

1) если $D=b^2-4ac<0$, то квадратный трехчлен корней не имеет.

Например, квадратный трехчлен x^2-3x+5 корней не имеет, поскольку $D=(-3)^2-4\cdot5\cdot1=-11<0$;

2) если $D=b^2-4ac=0$, то квадратный трехчлен имеет два равных корня $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.

Например, квадратный трехчлен x^2-6x+9 имеет два равных корня $x_1=x_2=\frac{6}{2}=3$;

3) если $D=b^2-4ac>0$, то квадратный трехчлен имеет два различных корня $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Например, квадратный трехчлен x^2-5x+6 имеет два различных корня $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot6\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm1}{2}$; $x_1=3$, $x_2=2$.

Число $D=b^2-4ac$ называется *дискриминантом квадратного трехчлена*.

Теорема Виета. Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, то выполняются равенства $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

Если x_1 и x_2 — корни трехчлена x^2+px+q, то справедливы формулы $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$.

Если p, q, x_1, x_2 такие, что $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$, то x_1 и x_2 — корни трехчлена x^2+px+q.

Разложение квадратного трехчлена на множители

Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена ax^2+bx+c, то выполняется равенство $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Например, $2x^2+5x-3=2(x-0,5)(x+3)$; $x^2-x-12=(x+3)(x-4)$.

§ 5. Алгебраические выражения

• Алгебраические выражения

Алгебраическим выражением называется выражение, в котором числа и буквы объединены четырьмя арифметическими действиями, а также действиями возведения в натуральную степень и извлечения арифметического корня.

Например, $a-\sqrt{b}$; $a+b^2\sqrt[3]{x}$; $\frac{3a^2}{\sqrt{a+b}}$ — алгебраические выражения.

Выражение, которое не содержит операции извлечения корня из переменной, называется ***рациональным***. *Например,* $a+b$; $a^2-2ab-b^2$; $\frac{\sqrt{3}\,a}{a+b}$; $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ — рациональные выражения.

Рациональное выражение, которое не содержит действия деления на переменную (букву) или на выражение, содержащее переменную, называется ***целым***. *Например,* a^2+b; $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{\sqrt{3}}b^2$ — целые выражения.

Алгебраическое выражение называется ***иррациональным***, если в нем выполняются действия извлечения арифметического корня из букв (переменных) или выражений, содержащих буквы (переменные).

Например, $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; $\sqrt{4x+5}$; $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ — иррациональные выражения.

Рациональное выражение называется ***дробным***, если оно содержит действие деления на переменную или на выражение, содержащее переменную. *Например,* $\frac{a}{b}$; $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; $\frac{3}{x}-2$ — дробные выражения.

Дробь — это выражение $\frac{a}{b}$, где a и b — числовые выражения или выражения с переменными. Если a и b — алгебраические выражения, то выражение $\frac{a}{b}$ называется *алгебраической дробью.*

Основное свойство дроби

При умножении числителя и знаменателя дроби на одно и то же выражение получаем дробь, тождественно равную данной: $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$, где $b\neq 0$, $c\neq 0$.

Например, $\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a-b)(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$.

Основное свойство дроби используется при сокращении дробей.

Например, $\dfrac{x^2+5xy}{2xy+10y^2}=\dfrac{x(x+5y)}{2y(x+5y)}=\dfrac{x}{2y}$, $x\neq-5y$;

$\dfrac{x^2-4y^2}{3x+6y}=\dfrac{(x-2y)(x+2y)}{3(x+2y)}=\dfrac{x-2y}{3}$, где $x\neq-2y$.

При изменении знака числителя (или знака знаменателя) дроби и знака перед дробью получаем выражение, тождественно равное данному:

$\dfrac{-a}{-b}=-\dfrac{-a}{b}=-\dfrac{a}{-b}=\dfrac{a}{b}$.

Сложение и вычитание дробей

Чтобы сложить (вычесть) дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить (вычесть) их числители, а знаменатель оставить тот же:

$\dfrac{a}{c}\pm\dfrac{b}{c}=\dfrac{a\pm b}{c}$, $c\neq0$.

Чтобы сложить (вычесть) дроби с различными знаменателями, надо привести их к общему знаменателю, а потом воспользоваться правилом сложения (вычитания) дробей с одинаковыми знаменателями.

Например, $\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{x^2}{(x-2)(x+2)}-\dfrac{x}{x-2}=\dfrac{x^2-x^2-2x}{(x-2)(x+2)}=$

$=\dfrac{-2x}{x^2-4}=\dfrac{2x}{4-x^2}$.

Умножение и деление дробей

Чтобы умножить дробь на дробь, надо перемножить их числители и записать в числитель, а потом перемножить их знаменатели и записать в знаменатель:

$\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$, $b\neq0$, $d\neq0$.

Например, $\dfrac{x^2-4}{x^2}\cdot\dfrac{x}{2x+4}=\dfrac{(x^2-4)\cdot x}{x^2\cdot(2x+4)}=\dfrac{(x-2)(x+2)x}{x^2\cdot2(x+2)}=\dfrac{x-2}{2x}$,

$x\neq0$, $x\neq-2$.

Чтобы разделить одну дробь на другую, надо первую дробь умножить на дробь, обратную второй:

$\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$, $b\neq0$, $c\neq0$, $d\neq0$.

Например, $\frac{x^2-9}{x+2}:\frac{x+3}{x^2-4}=\frac{x^2-9}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x+3}=\frac{(x^2-9)(x^2-4)}{(x+2)(x+3)}=$

$=\frac{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+3)}=(x-3)(x-2)=x^2-5x+6,\ x\neq-2,\ x\neq-3.$

Иррациональные выражения и действия над ними

1. Сложение и вычитание иррациональных выражений выполняется так же, как сложение и вычитание рациональных выражений (одночленов и многочленов).

   Например, $3\sqrt{8}-5\sqrt{18}+12\sqrt{50}=3\cdot2\sqrt{2}-5\cdot3\sqrt{2}+12\cdot5\sqrt{2}=$
   $=6\sqrt{2}-15\sqrt{2}+60\sqrt{2}=51\sqrt{2}$; $5\sqrt{a}-3\sqrt{a}+7\sqrt{a}=9\sqrt{a}$.

2. Чтобы выполнить умножение (деление) иррациональных выражений с различными показателями корня, надо: привести их к общему показателю, перемножить (поделить) подкоренные выражения и записать произведение (частное) под знак корня с общим показателем.

   Например, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt[6]{\frac{a^2}{b^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{b^3}{a^3}}=\sqrt[6]{\frac{a^2\cdot b^3}{b^2\cdot a^3}}=\sqrt[6]{\frac{a}{b}}$.

3. Чтобы выполнить возведение корней в степень, надо возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив тот же показатель корня.

   Например, $\left(\sqrt[4]{a+\sqrt{2}}\right)^2=\sqrt[4]{\left(a+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt[4]{a^2+2\sqrt{2}a+2}$.

4. Чтобы извлечь корень из корня, надо перемножить показатели корней, а подкоренное выражение оставить без изменений.

   Например, $\sqrt[3]{\sqrt{a+1}}=\sqrt[6]{a+1}$.

5. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби означает обратить дробь, знаменатель которой содержит корни, в новую дробь, тождественно равную данной, знаменатель которой корней не содержит.

Если знаменатель дроби — корень или произведение корня на рациональный множитель, то следует числитель и знаменатель дроби домножить на такую степень корня того же показателя, чтобы получить степень с показателем, равным показателю корня.

Например, $\frac{3a^2}{\sqrt[3]{a}}=\frac{3a^2\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}=\frac{3a^2\sqrt[3]{a^2}}{a}=3a\sqrt[3]{a^2}$.

Если знаменатель дроби — сумма (разность) квадратных корней, то дробь можно привести к рациональному знаменателю, умножив числитель и знаменатель на разность (сумму) тех же радикалов.

Например $\dfrac{a}{1-\sqrt{a}}=\dfrac{a\left(1+\sqrt{a}\right)}{\left(1-\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt{a}\right)}=\dfrac{a\left(1+\sqrt{a}\right)}{1-a}$,

если $a \geq 0$, $a \neq 1$.

Если знаменатель дроби — сумма (разность) кубических корней, то, чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе, следует умножить числитель и знаменатель дроби на неполный квадрат разности (суммы) тех же радикалов.

Например,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}.$$

§ 6. Сравнение алгебраических выражений

Тождественно равные выражения. Тождество

Два выражения с переменными называются *тождественно равными* на некотором множестве, если их соответствующие значения совпадают при всех значениях переменных, принадлежащих этому множеству.

Например, выражения $3(x+2)$ и $3x+6$ тождественно равны на множестве всех действительных чисел; $(a+b)^2$ и $a^2+2ab+b^2$ — тождественно равные выражения на множестве всех пар действительных чисел.

Тождественным преобразованием выражения называется замена выражения на тождественно равное ему.

Равенство, в котором правая и левая части — тождественно равные выражения на некотором множестве, называется *тождеством* на этом множестве.

Например, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ — тождества.

Тождественное неравенство выражений

Пусть заданы алгебраические выражения A и B на некотором множестве, и для любых соответствующих значений значения выражения A больше (меньше), чем соответствующее значение выражения B, тогда говорят, что на этом множестве справедливо *тождественное неравенство* $A>B$ ($A<B$).

Например, на множестве действительных чисел справедливо тождественное неравенство $a^2+1>a^2$.

Иногда возникает необходимость доказать, что данное неравенство с переменными верно при всех указанных значениях переменных. Это можно сделать на основании определений понятий «больше» и «меньше»: $A>B$, если разность $A-B$ — число положительное; $A<B$, если разность $A-B$ — число отрицательное.

Пример 1. Докажите, что $a^2+65>16a$ для каждого действительного значения a.

Доказательство

$a^2+65-16a=a^2-16a+64+1=(a-8)^2+1$. При каждом действительном значении a значение выражения $(a-8)^2$ неотрицательное, а выражения $(a-8)^2+1$ положительное. Значит, всегда $a^2+65>16a$.

Пример 2. Докажем, что при положительных a и b $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Доказательство

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

Выражение $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$ при любых положительных a и b неотрицательно. Значит, если $a > 0$ и $b > 0$, то $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Равенство имеет место, когда $a = b$.

Некоторые алгебраические неравенства

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа,

$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ — среднее арифметическое,

$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ — среднее геометрическое,

$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ — среднее гармоническое,

$S_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$ — среднее квадратичное,

тогда $S_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n$.

§ 7. Свойства функций

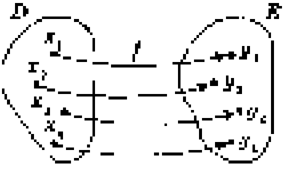


Рис. 10

Понятие функции

Зависимость переменной y от переменной x называется **функцией**, если каждому значению x (рис. 10) соответствует единственное значение y. Эту зависимость обозначают или одной буквой f, или $f(x)$, или равенством $y = f(x)$.

Переменная x называется ***независимой переменной*** или ***аргументом*** функции, а переменная y — ***зависимой переменной*** или ***функцией***.

Если задано конкретное значение независимой переменной $x = x_0$, то $y_0 = f(x_0)$ называется ***значением функции*** f в точке x_0.

Областью определения функции $f(x)$ называется множество действительных значений независимой переменной x, при которых эта функция определена (имеет смысл). Обозначается так: $D(f)$ (от англ. *define* — определять).

Областью значений функции $y = f(x)$ называется множество всех действительных значений, которые принимает зависимая переменная y при всех значениях аргумента из области определения. Обозначается так: $E(f)$ (от англ. *exist* — существование).

Если области определения $D(f)$ и значений $E(f)$ функции — числовые множества, то такие функции называются ***числовыми***.

Координатная плоскость и график функции

Две взаимно перпендикулярные прямые x и y, пересекающиеся в точке O, с указанными на них положительными направлениями (положительное направление указывается стрелкой) и единичными отрезками образуют ***систему координат***. Плоскость, в которой выбрана система координат, называется ***координатной плоскостью***. Прямую x называют ***осью абсцисс***; прямую y — ***осью ординат***, точку O — ***началом координат***.

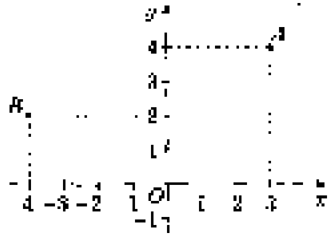


Рис. 11

Каждой точке плоскости соответствует два числа (координаты), которые записываются после точки в скобках (на первом месте координата по оси x, на втором — координата по оси y). Координата по оси x называется *абсциссой*, а координата по оси y — *ординатой*. На рисунке 11 точка A имеет координаты 3 и 4, что записывается так: $A(3; 4)$.

Для любой пары чисел $(x; y)$ *существует лишь одна точка, для которой абсциссой является число* x, *а ординатой — число* y.

Например, пара чисел $(-4; 2)$ определяет точку $B(-4; 2)$ на рисунке 11.

*Множество всех пар действительных чисел называется **числовой плоскостью**.*

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости с координатами $(x; f(x))$, где первая координата «пробегает» всю область определения функции $y = f(x)$, а вторая координата — это соответствующее значение функции в точке x.

Способы задания функции

Наиболее часто функции задаются таблицей, графиком или формулой.

Табличный способ — функция задается таблицей.

x	x_1	x_2	x_3	...	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	...	y_n

В первой строке выписаны значения независимой переменной из множества $D(f)$, а вторая строка образована по правилу $y = f(x)$.

Графический способ — функция задается множеством точек координатной плоскости, координаты x и y которых равны соответственно аргументам и значениям функции этих аргументов.

Аналитический способ — функция задается формулой, по которой можно вычислить значение зависимой переменной y, если подставить конкретное числовое значение аргумента x.

Областью определения функции $y = f(x)$, заданной формулой, называется множество значений, которые может принимать x, т. е. формула имеет смысл (все действия, указанные формулой, можно выполнить).

Например, если $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, то $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; если $y = x^2 + x^3$, то $D(y) = \mathbf{R}$.

Правила нахождения области определения функций, заданных аналитически

1. Если функция имеет вид многочлена $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, то $D(y) = (-\infty; +\infty)$ или $D(y) = R$. *Например*, если $y = x^4 + x^2 - 1$, то $D(y) = R$.
2. Если функция имеет вид $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены, то следует считать $g(x) \neq 0$. *Например*, если $y = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - x}$, то $x^2 - x \neq 0$, т. е. $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.
3. Если функция имеет вид $y = \sqrt[2k]{f(x)}$, $k \in N$, то следует считать $f(x) \geq 0$. *Например*, если $y = \sqrt[4]{x^2 - 9}$, то $x^2 - 9 \geq 0$, т. е. $D(y) = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.
4. Если функция имеет вид $y = \dfrac{1}{f(x)}$, то следует считать $f(x) \neq 0$. *Например*, если $y = \dfrac{1}{\sin x}$, то $\sin x \neq 0$, или $x \neq \pi k$, $k \in N$.
5. Если функция имеет вид $y = \log_a(f(x))$, $a > 0$, $a \neq 1$, то следует считать $f(x) > 0$. *Например*, если $y = \lg(x^2 - 2x + 1)$, то $x^2 - 2x + 1 > 0$, или $(x-1)^2 > 0$, т. е. $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
6. Если функция имеет вид $y = \log_{f(x)} b$, $b > 0$, то следует считать $\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1. \end{cases}$ *Например*, если $y = \log_{x+1} 5$, то $\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x + 1 \neq 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \end{cases}$ т. е. $D(y) = (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.
7. Если функция имеет вид $y = \mathrm{tg}(f(x))$, то следует считать $f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. *Например*, если $y = \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi x\right)$, то $\dfrac{\pi}{2} + \pi x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, т. е. $x \neq n$, $n \in Z$.
8. Если функция имеет вид $y = \mathrm{ctg}(f(x))$, то следует считать $f(x) \neq \pi n$, $n \in Z$. *Например*, если $y = \mathrm{ctg}(2x - 4)$, то $2x - 4 \neq \pi n$, $n \in Z$, т. е. $x \neq \dfrac{\pi n}{2} + 2$, $n \in Z$.

9. Если функция имеет вид $y=\arcsin(f(x))$, то следует считать $|f(x)|\leqslant 1$. *Например*, если $y=\arcsin(5x-1)$, то $|5x-1|\leqslant 1$; $-1\leqslant 5x-1\leqslant 1$, т. е. $0\leqslant x\leqslant \frac{2}{5}$.
10. Если функция имеет вид $y=\arccos(f(x))$, то следует считать $|f(x)|\leqslant 1$. *Например*, если $y=\arccos(3x+1)$, то $|3x+1|\leqslant 1$; $-1\leqslant 3x+1\leqslant 1$, т. е. $-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 0$.
11. Когда функция имеет вид $y=x^{\alpha}$, то:
   а) если α — натуральное число, то $D(y)=R$;
   б) если α — целое отрицательное или нуль, то $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$;
   в) если α — положительное нецелое число, то $D(y)=[0;+\infty)$;
   г) если α — отрицательное нецелое число, то $D(y)=(0;+\infty)$.

Четные и нечетные функции

Функция $y=f(x)$ называется **четной**, если для любого $x\in D(y)$ выполняется равенство $f(-x)=f(x)$, при этом $-x\in D(y)$.

Например, функция $f(x)=-x^4+x^2$ четная, поскольку $f(-x)=-(-x)^4+(-x)^2=-x^4+x^2=f(x)$ для всех $x\in \mathbf{R}$.

График четной функции симметричен относительно оси Oy (рис. 12, а).

Функция $y=f(x)$ называется **нечетной**, если для любого $x\in D(y)$ выполняется равенство $f(-x)=-f(x)$, при этом $-x\in D(y)$.

Например, функция $y=x^5-x^3$ — нечетная, поскольку $f(-x)=(-x)^5-(-x)^3=-x^5+x^3=-(x^5-x^3)=-f(x)$ для всех $x\in \mathbf{R}$.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 12, б).

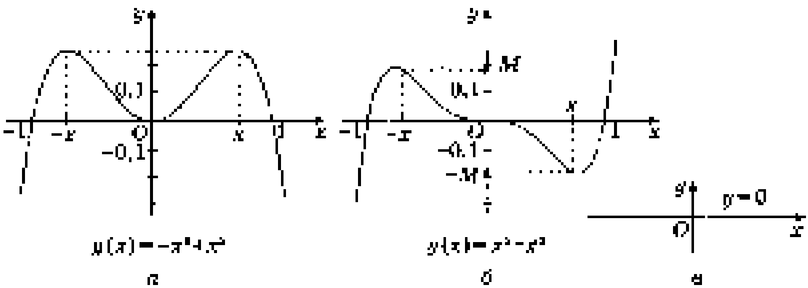


Рис. 12

Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными.

Например, функции $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[2k]{x}$, $k\in N$; $y=a^x$, $a>0$, $a\ne 1$; $y=\log_a x$, $a>0$, $a\ne 1$; $y=\{x\}$; $y=\arccos x$; $y=\mathrm{arcctg}\,x$ не являются ни четными, ни нечетными.

Единственная функция, заданная на множестве **R**, которая является четной и нечетной, — это функция $y=0$ (рис. 12, *в*).

Свойства четных и нечетных функций

1. Если $f(x)$ и $g(x)$ — четные функции, заданные на одном и том же множестве X, то функции $f(x)+g(x)$; $f(x)-g(x)$; $f(x)\cdot g(x)$; $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\ne 0$ являются также четными на множестве X.
2. Если $f(x)$ и $g(x)$ — нечетные функции, заданные на одном и том же множестве X, то функции $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ являются нечетными функциями на множестве X, а функции $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\ne 0$ являются четными на множестве X.

Возрастающие и убывающие функции

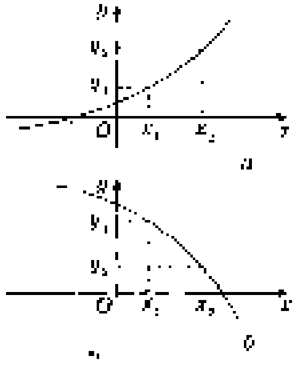


Рис. 13

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на некотором множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции, т. е. функция $y=f(x)$ возрастающая, если для любых $x_1\in X$, $x_2\in X$, $x_2>x_1$ выполняется $f(x_2)>f(x_1)$ или $y_2>y_1$ (рис. 13, *а*).

Если при указанных условиях выполняется неравенство $f(x_2)\ge f(x_1)$ или $y_2\ge y_1$, то функция называется *неубывающей*.

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на некотором множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции, т. е. функция $y=f(x)$ убывающая, если для любых $x_1\in X$, $x_2\in X$, $x_2>x_1$ выполняется $f(x_2)<f(x_1)$ или $y_2<y_1$ (рис. 13, *б*).

Если при указанных условиях выполняется неравенство $f(x_2)\le f(x_1)$ или $y_1\ge y_2$, то функция называется *невозрастающей*.

Свойства возрастающих, убывающих функций

1. Если функция $y = f(x)$ возрастающая и $y_1 < y_2$ $(f(x_1) < f(x_2))$, то $x_1 < x_2$.
2. Если функция $y = f(x)$ убывающая и $y_1 < y_2$ $(f(x_1) < f(x_2))$, то $x_1 > x_2$.

Функция $y = f(x)$, возрастающая (убывающая) на множестве X, называется **монотонной** на множестве X.

Периодические функции

Функция $y = f(x)$ называется ***периодической*** с периодом $T \neq 0$, если для любого x из области определения выполняется равенство: $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$ (рис. 14)

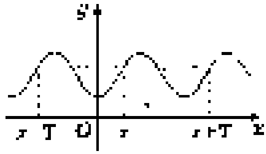


Рис. 14

Свойства периодических функций

1. Если T — период функции $y = f(x)$, то число $\pm nT$ $(n \in N)$ также является периодом этой функции. *Например*, периодами функции $y = \cos x$ являются числа $\pm 2\pi$; $\pm 4\pi$; $\pm 6\pi$; $\pm 8\pi$; ...
2. Если функция $y = f(x)$ периодическая с периодом T, то функция $y = Af(kx + b)$ также периодическая и ее период равен $\frac{T}{|k|}$, $k \neq 0$.

Например, периодом функции $y = \{3x + 5\}$ является $\frac{1}{3}$; периодом функции $y = \operatorname{tg}\frac{x}{3}$ — число 3π.

Периодом функции принято называть наименьший из положительных периодов.

Сложные функции

Если y является функцией от u: $y = f(u)$, где u в свою очередь является функцией от аргумента x, т. е. $u = g(x)$, то y называется **сложной** функцией от x: $y = f(g(x))$. *Например*, функция $y = \sqrt{\cos x}$ сложная, поскольку $y = \sqrt{u}$, $u = \cos x$.

Функцию f называют ***внешней***, а функцию g — ***внутренней***.

Обратные функции

Функция называется *обратимой*, если каждое свое значение принимает в единственной точке области определения.

Если функция $y=f(x)$ обратима, то для любого y_0 уравнение $f(x)=y_0$ имеет относительно x единственное решение.

Например, функция $y=x^3$ является обратимой на множестве R; функция $y=x^2$ не является обратимой на множестве R.

Функция g называется *обратной* к функции f, если функция g в каждой точке x области значений обратной функции f принимает такое значение y, что $f(y)=x$.

Когда функция $f(x)=y$ обратима, то если выразить x из формулы $y=f(x)$ и поменять x и y местами, получим обратную функцию.

Например, функция $y=2x-3$ обратима, тогда $2x=y-3$, $x=\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}$. Итак, $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ — обратная функция к функции $y=2x-3$.

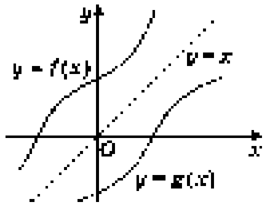


Рис. 15

Графики функции $f(x)$ и обратной к ней функции $g(x)$ симметричны относительно прямой $y=x$ (рис. 15).

Например, на промежутке $[0;+\infty)$ функция $f(x)=x^2$ обратна функции $g(x)=\sqrt{x}$ (рис. 16).

Если функция g является обратной к функции f, то функция g обратима и обратной к ней является функция f. Функции f и g называются *взаимно обратными*. Область определения функции f является областью значений функции g, а область значений функции f является областью определения функции g. *Например*, функции: $y=a^x$ и $\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$; $y=\sin x$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ и $y=\arcsin x$; $y=\cos x$, $x\in[0;\ \pi]$ и $y=\arccos x$; $y=\operatorname{tg} x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ и $\operatorname{arctg} x$; $y=\operatorname{ctg} x$, $x\in(0;\ \pi)$ и $y=\operatorname{arcctg} x$ взаимно обратны.

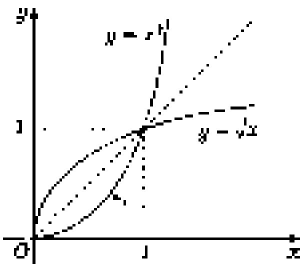
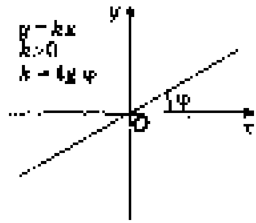
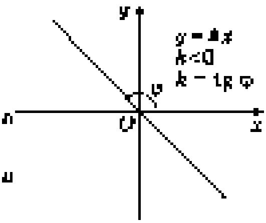


Рис. 16

§ 8. Свойства некоторых функций и их графики



а)



б)

Рис. 17

Прямая пропорциональность

Функция $y = kx$, где k — действительное число, $k \neq 0$, называется *прямой пропорциональностью*.

Основные свойства

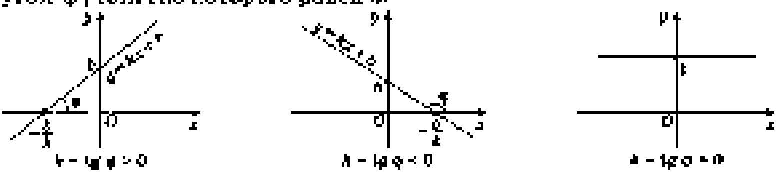
1. Область определения — R.
2. Область значений — R.
3. Функция нечетная.
4. Если $x = 0$, то $y = 0$.
5. Если $k > 0$, то функция возрастает на множестве R (рис. 17, *а*).
6. Если $k < 0$, то функция убывает на множестве R (рис. 17, *б*).
7. График прямой пропорциональности — прямая, которая проходит через начало координат.

Линейная функция

Функция $y = kx + b$, где $k \in R$, $b \in R$, называется *линейной функцией*.

Основные свойства

1. Область определения — R.
2. Область значений — R, если $k \neq 0$; $\{b\}$, если $k = 0$.
3. Если $k \neq 0$, $b \neq 0$, то функция ни четная, ни нечетная; если $k = 0$ — функция четная; если $b = 0$, $k \neq 0$ — нечетная; если $k = 0$, $b = 0$ — и четная, и нечетная.
4. Если $x = 0$, то $y = b$; если $x = -\dfrac{b}{k}$, функция $y = 0$.
5. Если $k > 0$, то функция возрастает на множестве R (рис. 18, *а*); если $k < 0$, то функция убывает на множестве R (рис. 18, *б*); если $k = 0$, то функция постоянна, $y = b$ (рис. 18, *в*).
6. График линейной функции — прямая, образующая с осью абсцисс угол φ, тангенс которого равен k.



а *б* *в*

Рис. 18

Обратная пропорциональность

Функция $y=\dfrac{k}{x}$, где $k\in R$, $k\neq 0$, называется *обратной пропорциональностью*.

Основные свойства

1. Область определения — $(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$.
2. Область значений — $(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty)$.
3. Функция $y=\dfrac{k}{x}$ нечетная.
4. Если $k>0$, то на интервале $(-\infty;\,0)$ функция убывает, на интервале $(0;\,+\infty)$ — также убывает (рис. 19, *а*). Если $k<0$, то на интервалах $(-\infty;\,0)$, $(0;\,+\infty)$ функция возрастает (рис. 19, *б*).
5. График функции $y=\dfrac{k}{x}$ оси координат не пересекает.
6. Если $k>0$, то при $x>0$ функция приобретает положительные значения, а при $x<0$ — отрицательные. Если $k<0$, то при $x>0$ функция принимает отрицательные значения, а при $x<0$ — положительные.
7. График обратной пропорциональности — гипербола.

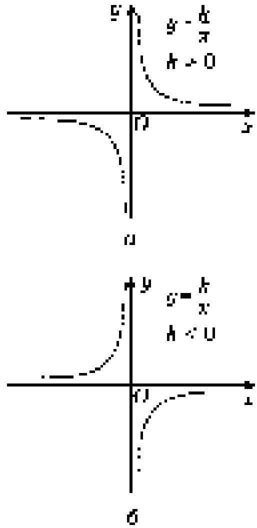


Рис. 19

Функция $y=|x|$

Основные свойства

1. Область определения — R.
2. Область значений — $[0;\,+\infty)$.
3. Функция четная.
4. Если $x=0$, то $y=0$. Если $x\neq 0$, то $y>0$. График функции расположен в верхней координатной полуплоскости.
5. Если $x<0$, то функция убывает; если $x>0$, то функция возрастает.
6. График функции — объединение двух лучей: биссектрис первой и второй координатных четвертей (рис. 20).

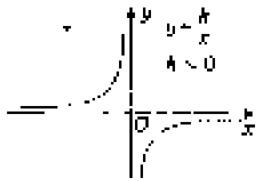


Рис. 20

Дробно-линейная функция $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

Основные свойства

1. Область определения $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)\cup\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$.
2. Область значений — $\left(-\infty; \frac{a}{c}\right)\cup\left(\frac{a}{c}; +\infty\right)$.
3. Точки пересечения с осями координат: $\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ и $\left(0; \frac{b}{d}\right)$.
4. Функция убывает на каждом из промежутков $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$; $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$, если $ad<bc$ (рис. 21, *а*).
5. Функция возрастает на каждом из промежутков $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$; $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$, если $ad>bc$ (рис. 21, *б*).
6. График функции — гипербола.

$ad<bc$ $ad>bc$

а   *б*

Рис. 21

Квадратичная функция

Функция $y=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$, называется *квадратичной*.

Основные свойства

1. Область определения — R.
2. Область значений — если $a>0$, то $\left[-\frac{b^2-4ac}{4a}; +\infty\right)$; если $a<0$, то $\left(-\infty; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$.
3. Если $b\neq 0$, то функция ни четная, ни нечетная; если $b=0$, то функция $y=ax^2+c$ четная.

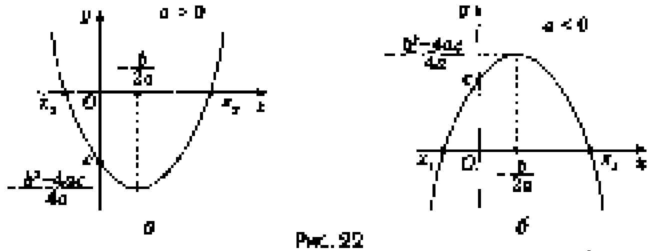


Рис. 22

4. Если $a > 0$, то функция убывает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, $x_0 = -\frac{b}{2a}$ — точка минимума (рис. 22, *а*).

   Если $a < 0$, то функция возрастает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ и убывает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, $x_0 = -\frac{b}{2a}$ — точка максимума (рис. 22, *б*).
5. График функции пересекает оси координат в точках $(0; c)$, $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$, где $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
6. График функции — ***парабола***, ветви которой направлены вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$; координаты вершины — $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$; ось симметрии графика — $x = -\frac{b}{2a}$.

Степенная функция

Функция вида $y = x^n$ называется *степенной*.

Свойства функции $y = x^n$, где $n \in N$.

1. Область определения — R.
2. Область значений: если $n = 2k$, $k \in N$, то $[0; +\infty)$; если $n = 2k-1$, $k \in N$, то R.
3. Если $n = 2k$, $k \in N$, то функция четная; если $n = 2k-1$, $k \in N$, то функция нечетная.
4. График функции проходит через начало координат.

График функции симметричен относительно оси Oy, если $n = 2k$ (рис. 23, а—в), $k \in N$; относительно начала координат, если $n = 2k-1$, $k \in N$ (рис. 23, г—е).

5. Если $n = 2k$, $k \in N$, то функция убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$. Если $n = 2k-1$, $k \in N$, то функция возрастает на множестве R.

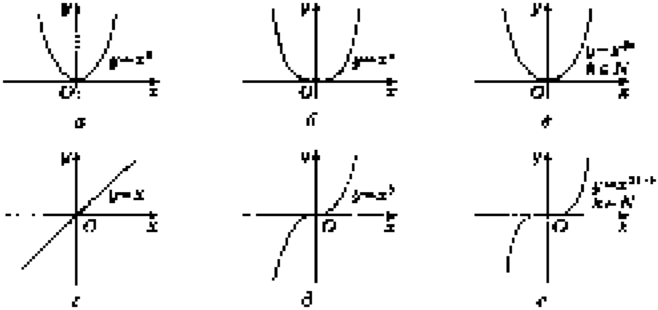


Рис. 23

Свойства функции $y = x^{-n}$, где $n \in N$.

1. Область определения — $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$.
2. Область значений — $(0; +\infty)$, если $n = 2k$, $k \in N$; $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$, если $n = 2k-1$, $k \in N$.
3. Если $n = 2k$, $k \in N$, то функция четная, график симметричен относительно оси Oy (рис. 24, а—в); если $n = 2k-1$, $k \in N$, то функция нечетная и график симметричен относительно начала координат (рис. 24, г—е).
4. Точек пересечения с осями координат график функции не имеет.
5. Если $n = 2k$, $k \in N$, то функция возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$ и убывает на промежутке $(0; +\infty)$; если $n = 2k-1$, $k \in N$, то функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$.

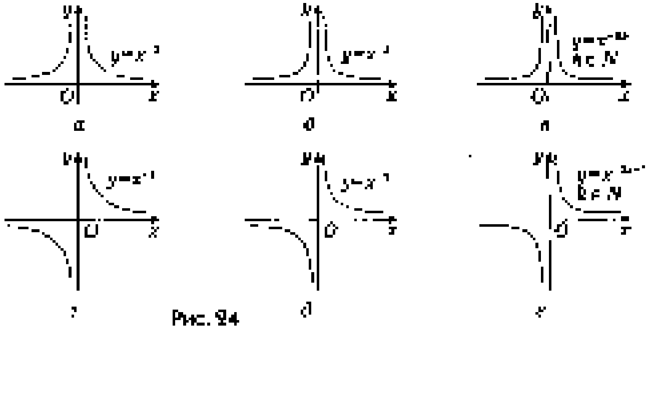


Рис. 24

Свойства функции $y = x^{\alpha}$, где α — нецелое число.

1. Область определения — $[0; +\infty)$, если $\alpha > 0$; $(0; +\infty)$, если $\alpha < 0$.
2. Область значений — $[0; +\infty)$, если $\alpha > 0$; $(0; +\infty)$, если $\alpha < 0$.
3. Функция ни четная, ни нечетная.
4. Если $\alpha > 0$, то график функции проходит через начало координат (рис. 25, *а* — *в*); если $\alpha < 0$, то график функции не пересекает осей координат (рис. 25, *г* — *е*).
5. Если $\alpha > 0$, то функция возрастает на всей области определения; если $\alpha < 0$, то функция убывает на всей области определения.

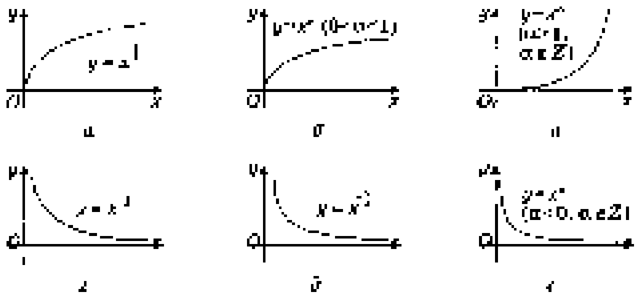


Рис. 25

Функция $y = \sqrt[n]{x}$, где $n \geq 2$, $n \in N$

Основные свойства

1. Область определения — $[0; +\infty)$, если $n = 2k$, $k \in N$; R, если $n = 2k + 1$, $k \in N$.
2. Область значений — $[0; +\infty)$, если $n = 2k$, $k \in N$; R, если $n = 2k + 1$, $k \in N$.
3. Если $n = 2k$, $k \in N$, то функция ни четная, ни нечетная (рис. 26, *а*, *б*); если $n = 2k + 1$, $k \in N$, то функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат (рис. 26, *в*, *г*).
4. Функция возрастает на всей области определения.
5. График функции проходит через начало координат.

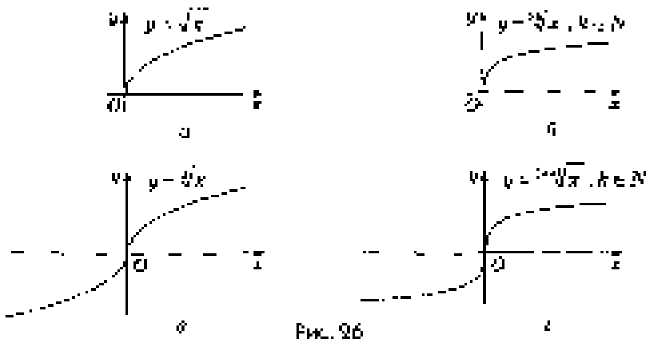


Рис. 26

Показательная функция

Функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \ne 1$, называется *показательной*.

Основные свойства

1. Область определения — R.
2. Область значений — $(0; +\infty)$.
3. Функция ни четная, ни нечетная.
4. График функции пересекает ось Oy в точке $(0; 1)$, ось Ox не пересекает.

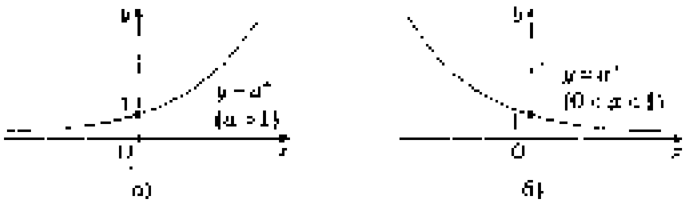


Рис. 27

5. Если $a > 1$, то функция возрастает на множестве R (рис. 27, *а*); если $0 < a < 1$, то функция убывает на множестве R (рис. 27, *б*).
6. Если $a > 1$, то $y > 1$ при $x > 0$; $0 < y < 1$ при $x < 0$. Если $0 < a < 1$, то $y > 1$ при $x < 0$, $0 < y < 1$ при $x > 0$.

Логарифмическая функция

Функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \ne 1$, называется *логарифмической*.

Основные свойства

1. Область определения — $(0; +\infty)$.
2. Область значений — R.
3. Функция ни четная, ни нечетная.

4. График функции пересекает ось Ox в точке $(1;0)$, ось Oy не пересекает.

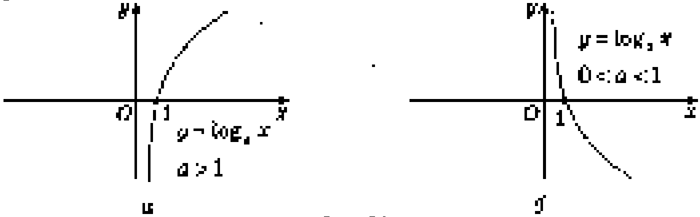


Рис. 28

5. Если $a>1$, то функция возрастает на всей области определения (рис. 28, *а*); если $0<a<1$, то функция убывает на всей области определения (рис. 28, *б*).
6. Если $a>1$, то $y>0$ при $x>1$, $y<0$ при $0<x<1$. Если $0<a<1$, то $y>0$ при $0<x<1$; $y<0$ при $x>1$.

Функция $y=[x]$

Основные свойства

1. Область определения — R.
2. Область значений — Z. Если $0\le x<1$, то $y=[x]=0$; если $1\le x<2$, то $y=[x]=1$, если $-1\le x<0$, то $y=[x]=-1$ и т. д.
3. Функция ни четная, ни нечетная. На каждом из промежутков $[n;\,n+1)$, $n\in Z$ функция постоянная (рис. 29).

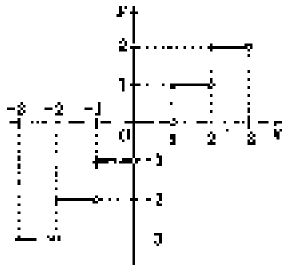


Рис. 29

Функция $y=\{x\}=x-[x]$

Основные свойства

1. Область определения — R.
2. Область значений — $[0;1)$.
3. Функция ни четная, ни нечетная.
4. Функция принимает только неотрицательные значения, всегда $0\le\{x\}<1$.
5. Функция периодическая, ее период равен 1.
6. На каждом из промежутков $[n;\,n+1)$, $n\in Z$ функция возрастает (рис. 30).

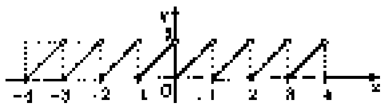


Рис. 30

§ 9. Преобразование графиков функций

График функции $y=-f(x)$ получают из графика функции $y=f(x)$ с помощью симметрии относительно оси Ox.

Например:

График функции $y=f(-x)$ получают из графика функции $y=f(x)$ с помощью симметрии относительно оси Oy.

Например:

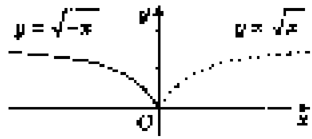


График функции $y=f(x)+b$ получают из графика функции $y=f(x)$ с помощью параллельного переноса вдоль оси Oy на b единиц.

Например:

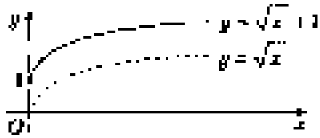


График функции $y=f(x-a)$ получают из графика функции $y=f(x)$ с помощью параллельного переноса вдоль оси Ox на a единиц.

Например:

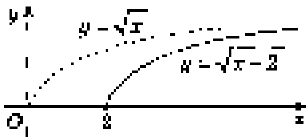


График функции $y=f(kx)$, где $k>0$, получают из графика функции $y=f(x)$ сжатием его вдоль оси Ox в k раз, если $k>1$; растяжением его вдоль оси Ox в $\frac{1}{k}$ раз, если $0<k<1$.

Например:

График функции $y=kf(x)$, где $k>0$, получают из графика функции $y=f(x)$ растяжением его вдоль оси Oy в k раз, если $k>1$; сжатием вдоль оси Oy в $\frac{1}{k}$ раз, если $0<k<1$.

Например:

График функции $y=|f(x)|$ получают из графика функции $y=f(x)$ так: выше оси Ox (и на самой оси) оставляют его без изменений; ниже оси Ox — симметрично отображают его относительно оси Ox.

Например:

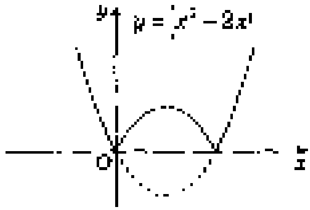
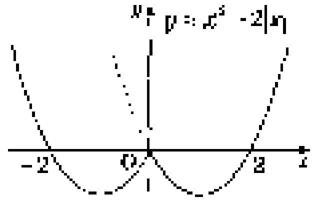


График функции $y=f(|x|)$ получают из графика функции $y=f(x)$ так: справа от оси Oy (и на самой оси) оставляют без изменений и симметрично отображают эту часть относительно оси Oy.

Например:



§ 10. Определения и свойства тригонометрических функций

Радианная система измерения углов и дуг

1 радиан — центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу круга (рис. 31).

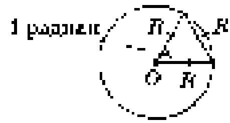


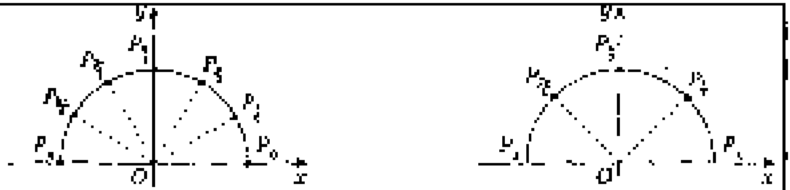
Рис. 31

Связь между градусной и радианной мерами:

$$\pi \text{ рад} = 180^\circ; \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \approx 0{,}01745 \text{ рад};$$

$$1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''; \quad \alpha^\circ = \frac{\pi\alpha}{180} \text{ рад}; \quad \alpha \text{ рад} = \frac{180^\circ \alpha}{\pi}.$$

Радианная и градусная меры некоторых углов



Углы в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Углы в градусах	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°

Единичная окружность. Точки единичной окружности и действительные числа

Единичной (тригонометрической) окружностью называется окружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 32).

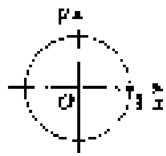


Рис. 32

Соответствие между действительными числами и точками единичной окружности

Каждому действительному числу t соответствует лишь одна точка P_t единичной окружности. Числу 0 ставится в соответствие точка $P_0(1;0)$, а каждому числу t ставится в соответствие точка P_t, образованная в результате поворота точки $P_0(1;0)$ на угол t вокруг начала координат: если $t>0$, то поворот выполняется против часовой стрелки; если $t<0$ — по часовой стрелке.

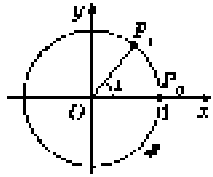
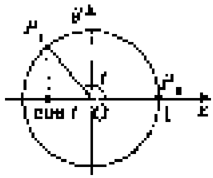


Рис. 33

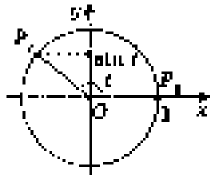
Каждой точке P_t соответствует бесконечное множество чисел вида $t+2\pi n$, где $n \in Z$ (рис. 33).

Определения тригонометрических функций

Косинусом числа t называется абсцисса точки P_t единичной окружности: $\cos t = x_0$.



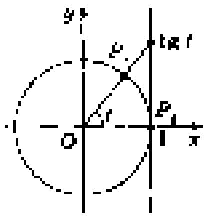
Синусом числа t называется ордината точки P_t единичной окружности: $\sin t = y_0$.



Тангенсом числа t называется отношение $\sin t$ к $\cos t$ $(\cos t \neq 0)$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} \quad \left(t \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\right).$$

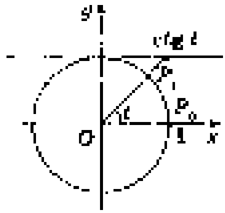
Ось тангенсов — прямая $x = 1$. Тангенс числа t — ордината соответствующей точки оси тангенсов.



Котангенсом числа t называется отношение $\cos t$ к $\sin t$ $(\sin t \neq 0)$:

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} \quad (t \neq \pi n,\ n \in Z).$$

Ось котангенсов — прямая $y = 1$. Котангенс числа t — абсцисса соответствующей точки оси котангенсов.



Значения тригонометрических функций некоторых углов

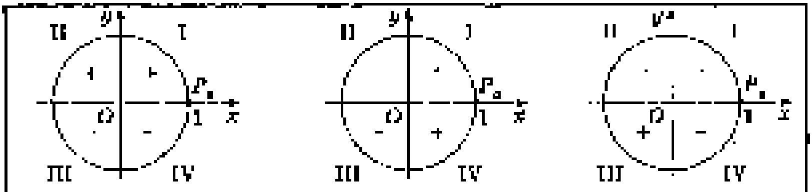
Приближенные значения тригонометрических функций некоторых углов

α°	5	10	20	30	40	50	60	70	80	85	90	
$\sin\alpha$	0,09	0,17	0,34	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98	0,99	1	$\cos\beta$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0,09	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,75	5,67	11,43	—	$\mathrm{ctg}\,\beta$
	85	80	70	60	50	40	30	20	10	5	0	β°

Точные значения тригонометрических функций некоторых углов

	t, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	t, °	0	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Функция	$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
	$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
	$\mathrm{tg}\,t$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
	$\mathrm{ctg}\,t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Знаки тригонометрических функций



Знаки синуса — Знаки косинуса — Знаки тангенса и котангенса

Четность (нечетность) тригонометрических функций

Функция косинус — четная функция: $\cos(-t) = \cos t$.

Функции синус, тангенс и котангенс — нечетные функции:

$\sin(-t) = -\sin t$; $\mathrm{tg}(-t) = -\mathrm{tg}\,t$; $\mathrm{ctg}(-t) = -\mathrm{ctg}\,t$.

Периодичность тригонометрических функций

Периодом функций $\sin t$, $\cos t$ является $2\pi n$, $n \in Z$ (рис. 34, *а*):

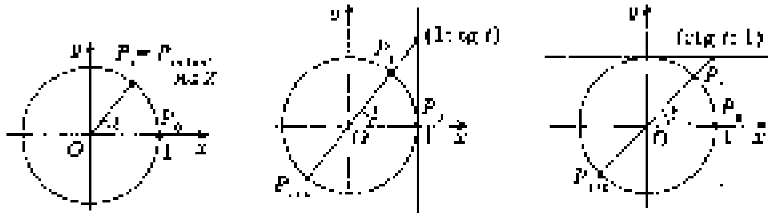
$$\sin(t + 2\pi n) = \sin t;\ \cos(t + 2\pi n) = \cos t,\ n \in Z.$$

Наименьшим положительным периодом функций синус и косинус является 2π.

Периодом функций $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$ является πn, $n \in Z$ (рис. 34, *б*, *в*):

$$\operatorname{tg}(t + \pi n) = \operatorname{tg} t;\ \operatorname{ctg}(t + \pi n) = \operatorname{ctg} t,\ n \in Z.$$

Наименьшим положительным периодом функций тангенс и котангенс является π.



а *б* *в*

Рис. 34

§ 11. Основные тригонометрические формулы

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \alpha \in R$;

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$; $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \pi n,\ n \in Z$;

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,\ \alpha \neq \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z$;

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$;

$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha \neq \pi n,\ n \in Z$.

Формулы сложения

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$;

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;

$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \alpha \pm \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$;

$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta},\ \alpha \neq \pi n,\ \beta \neq \pi n,\ \alpha \pm \beta \neq \pi n,\ n \in Z$.

Формулы двойного аргумента

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$;

$\operatorname{ctg} 2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha},\ \alpha \neq \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

Формулы тройного аргумента

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

$\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{6}(2n + 1),\ n \in Z$;

$\operatorname{ctg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{ctg}^2\alpha},\ \alpha \neq \dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z$.

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right).$$

Формулы половинного аргумента

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\ \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\ \alpha \ne \pi+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \ne \pi n,\ n \in \mathbf{Z};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},\ \alpha \ne 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \ne \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \ne \pi+2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \ne \pi+2\pi n,\ \alpha \ne \frac{\pi}{2}+\pi k,\ n \in \mathbf{Z};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \ne \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\ \alpha\neq\pi n,\ n\in Z;\ \beta\neq\pi k,\ k\in Z;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=-\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\ \alpha\neq\pi n,\ n\in Z,\ \beta\neq\pi k,\ k\in Z.$$

Формулы приведения

Функция	Аргумент t							
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

§ 12. Обратные тригонометрические функции

Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа

Арксинусом числа a называется угол (число) t из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

Запись $\arcsin a = t$ означает: $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin t = a$.

Например, $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Арккосинусом числа a называется угол (число) t из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.

Запись $\arccos a = t$ означает: $t \in [0; \pi]$ и $\cos t = a$.

Например, $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$; $\arccos 1 = 0$.

Арктангенсом числа a называется угол (число) t из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

Запись $\mathrm{arctg}\, a = t$ означает: $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\mathrm{tg}\, t = a$.

Например, $\mathrm{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$; $\mathrm{arctg}\, 0 = 0$.

Арккотангенсом числа a называется угол (число) t из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a.

Запись $\mathrm{arcctg}\, a = t$ означает: $t \in (0; \pi)$ и $\mathrm{ctg}\, t = a$.

Например, $\mathrm{arcctg}\, 1 = \frac{\pi}{4}$; $\mathrm{arcctg}\, 0 = \frac{\pi}{2}$.

$\arcsin a$, $\arccos a$, $\mathrm{arctg}\, a$, $\mathrm{arcctg}\, a$ называют **аркфункциями**.

Основные соотношения для аркфункций

$\sin(\arcsin a) = a$, $\cos(\arccos a) = a$, $a \in [-1; 1]$;

$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, a) = a$, $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, a) = a$, $a \in R$.

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$; $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$;

$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a$, $\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a$.

$\arcsin(\sin\varphi) = \varphi$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $\arccos(\cos\varphi) = \varphi$, $\varphi \in [0; \pi]$;

$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,\varphi) = \varphi$, $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\,\varphi) = \varphi$, $\varphi \in (0; \pi)$;

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2},\ a \in [-1; 1];$$

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2},\ a \in \boldsymbol{R}.$$

Значения аркфункций некоторых чисел

Функция	Аргумент x								
	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arcsin x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Функция	Аргумент x						
	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

Некоторые дополнительные соотношения для аркфункций

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},\ 0 < x < 1;$$

$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ 0 < x < 1;$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in \boldsymbol{R};$$

$$\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in \boldsymbol{R}.$$

§ 13. Свойства тригонометрических и обратных тригонометрических функций, графики этих функций

Функция $y = \sin x$

Основные свойства

1. Область определения — R.
2. Область значений — $[-1; 1]$.
3. Функция нечетная.
4. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π.

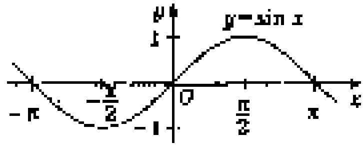


Рис. 35

5. График функции пересекает ось Oy в точке $(0; 0)$, а ось Ox — в точках $(\pi k; 0)$, где $k \in Z$.
6. Промежутки знакопостоянства: $y > 0$, если $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$; $y < 0$, если $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.
7. Функция возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$ и убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.
8. Функция приобретает наибольшее значение $y_{max} = 1$ в точках $x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, и наименьшее значение $y_{min} = -1$ в точках $x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

График функции $y = \sin x$ — *синусоида* (рис. 35).

Функция $y = \cos x$

Основные свойства

1. Область определения — R.
2. Область значений — $[-1; 1]$.
3. Функция четная.
4. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π.

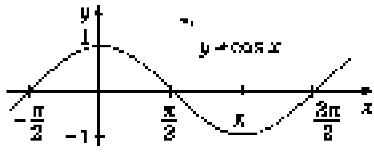


Рис. 36

5. График функции пересекает ось Oy в точке $(0; 1)$, ось Ox — в точках $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right)$, $k \in Z$.

6. Промежутки знакопостоянства: $y > 0$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$; $y < 0$, если $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.
7. Функция возрастает на каждом из промежутков $[-\pi + 2\pi k;\ 2\pi k]$, $k \in Z$ и убывает на каждом из промежутков $[2\pi k;\ \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$.
8. Функция приобретает наибольшее значение $y_{max} = 1$ в точках $x_{max} = 2\pi k$, $k \in Z$, и наименьшее значение $y_{min} = -1$ в точках $x_{min} = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.
   График функции $y = \cos x$ — *косинусоида* (рис. 36, с. 61).

Функция $y = \operatorname{tg} x$

Основные свойства

1. Область определения — $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.
2. Область значений — R.
3. Функция нечетная.
4. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом π.
5. График функции пересекает ось Oy в точке $(0;\ 0)$, ось Ox — в точках $(\pi k;\ 0)$, $k \in Z$.

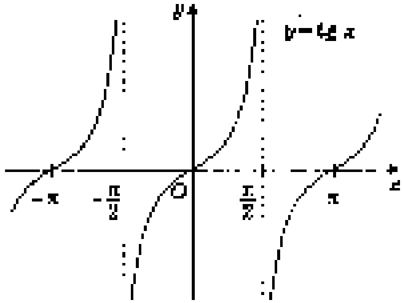


Рис. 37

6. Промежутки знакопостоянства: $y > 0$, если $x \in \left(\pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$; $y < 0$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pi k\right)$, $k \in Z$.
7. Функция возрастает на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.
8. Наименьших и наибольших значений функция не имеет.
   График функции $y = \operatorname{tg} x$ — *тангенсоида* (рис. 37).

Функция $y = \operatorname{ctg} x$

Основные свойства

1. Область определения — $x \neq \pi k$, $k \in Z$.
2. Область значений — R.

3. Функция нечетная.
4. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом π.
5. График функции не пересекает ось Oy, а ось Ox пересекает в точках $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ 0\right)$, $k \in Z$.

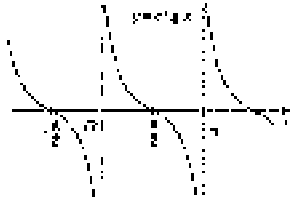


Рис. 38

6. Промежутки знакопостоянства: $y > 0$, если $x \in \left(\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in Z$; $y < 0$, если $x \in \left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \pi+\pi k\right)$, $k \in Z$.
7. Функция убывает на каждом из промежутков $(\pi k;\ \pi+\pi k)$, $k \in Z$.
8. Наибольших и наименьших значений функция не имеет.
9. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ — *котангенсоида* (рис. 38).

Функция $y = \arcsin x$

Основные свойства

1. Область определения — $[-1;\ 1]$.
2. Область значений — $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Функция нечетная (рис. 39).
4. График функции пересекает ось координат в точке $(0;\ 0)$.
5. Промежутки знакопостоянства: $y > 0$, если $x \in (0;\ 1]$; $y < 0$, если $x \in [-1;\ 0)$.
6. Функция возрастает при $x \in [-1;\ 1]$.
7. Функция приобретает наибольшее значение $y_{max} = \frac{\pi}{2}$ в точке $x_{max} = 1$ и наименьшее значение $y_{min} = -\frac{\pi}{2}$ в точке $x_{min} = -1$.

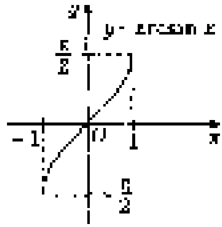


Рис. 39

Функция $y = \arccos x$

Основные свойства

1. Область определения — $[-1;\ 1]$.
2. Область значений — $[0;\ \pi]$.
3. Функция ни четная, ни нечетная (рис. 40):
$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

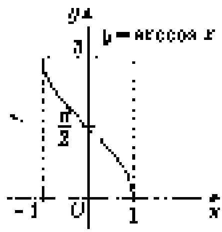


Рис. 40

4. График функции пересекает ось Oy в точке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а ось Ox в точке $(1; 0)$.
5. $y > 0$, если $x \in [-1; 1)$.
6. Функция убывает, если $x \in [-1; 1]$.
7. Функция принимает наибольшее значение $y_{max} = \pi$ в точке $x_{max} = -1$ и наименьшее значение $y_{min} = 0$ в точке $x_{min} = 1$.

Функция $y = \mathrm{arctg}\, x$

Основные свойства

1. Область определения — R.
2. Область значений — $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
3. Функция нечетная (рис. 41).
4. График функции пересекает оси координат в точке $(0; 0)$.
5. Промежутки знакопостоянства: $y > 0$, если $x \in (0; +\infty)$, $y < 0$, если $x \in (-\infty; 0)$.
6. Функция возрастает, если $x \in R$.
7. Наибольших и наименьших значений функция не имеет.

Функция $y = \mathrm{arcctg}\, x$

Основные свойства

1. Область определения — R.
2. Область значений — $(0; \pi)$.
3. Функция ни четная, ни нечетная (рис. 42). $\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}\, x$.
4. График функции пересекает ось Oy в точке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а ось Ox не пересекает.
5. $y > 0$, если $x \in R$.
6. Функция убывает, если $x \in R$.
7. Наибольших и наименьших значений функция не имеет.

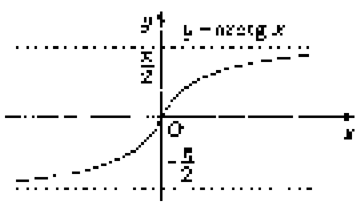


Рис. 41

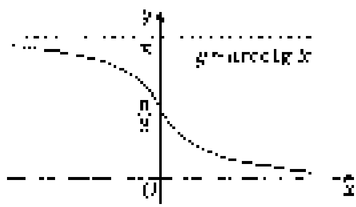


Рис. 42

§ 14. Уравнения с одной переменной

Уравнение. Корни уравнения

Уравнением называется равенство, которое содержит переменную (неизвестное).

Корнем (решением) уравнения с одной переменной называется значение переменной, которое превращает уравнение в правильное числовое равенство. *Например,* число 3 — корень уравнения $x^2-3x=0$, поскольку $3^2-3\cdot 3=0$.

Решить уравнение означает найти его корни или доказать, что их нет.

Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения называется множество значений переменной, при которых выражения в обеих частях уравнения определены.

Например, для уравнения $\lg(x+3)=5$ областью допустимых значений является $x>-3$, поскольку выражение $\lg(x+3)$ определено, если $x+3>0$.

Равносильные уравнения

Два уравнения называются *равносильными*, если множества их корней совпадают. *Например,* уравнения $x+3=5$ и $x-1=1$ равносильны, поскольку они имеют общий корень 2, и других корней не имеют; уравнения $x+7=x$ и $3+x=5+x$ равносильны, поскольку не имеют корней.

Теоремы о равносильности уравнений

1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число или выражение с переменной, которое не теряет значения при любых значениях переменной, то получим уравнение, равносильное данному. *Например,* уравнения $x^2=9$ и $x^2+x=9+x$ равносильны.
2. Если из одной части уравнения перенести во вторую часть слагаемое с противоположным знаком, то получим уравнение, равносильное данному. *Например,* уравнения $x^2=x-1$ и $x^2-x-1=0$ равносильны.
3. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, или на выражение с переменной, которое не превращается в нуль при любых значениях переменной и не теряет значение на множестве допустимых значений неизвестных для данного уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.

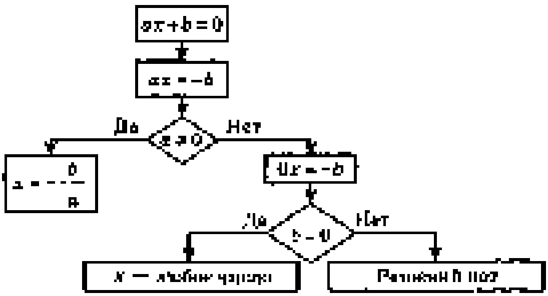
Например, уравнения $\frac{1}{2}x = x + 1$ и $x = 2x + 2$, $x^3 = x$ и $\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1}$ равносильны.

4. Если обе части уравнения возвести в нечетную натуральную степень, то получим уравнение, равносильное данному. *Например,* уравнения $x + 1 = 0$ и $(x+1)^3 = 0$ равносильны.

Линейные уравнения

Линейным уравнением с одной переменной (неизвестным) x называется уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b — действительные числа. Если $a \neq 0$, то уравнение называется *уравнением первой степени.*

Схема решения линейных уравнений



Неполные квадратные уравнения

Уравнения вида $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 = 0$, $ax^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, называют *неполными квадратными уравнениями.*

Схема решения уравнения $ax^2 = 0$, $a \neq 0$

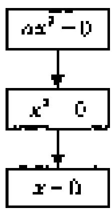


Схема решения уравнения $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$

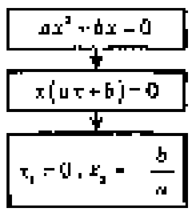
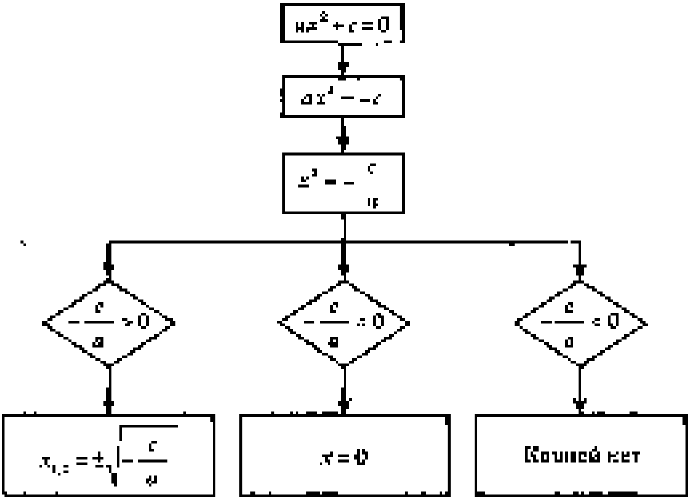


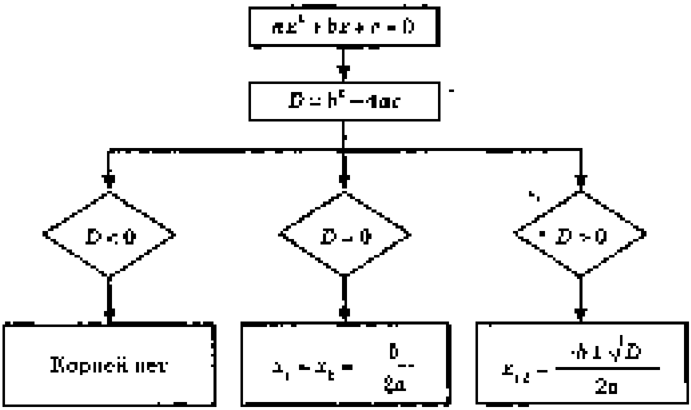
Схема решения уравнения $ax^2+c=0$, $a\neq 0$



Квадратные уравнения

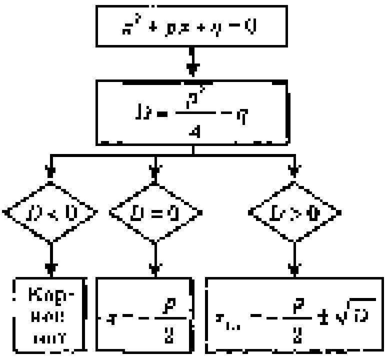
Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c — действительные числа, $a\neq 0$.

Схема решения квадратного уравнения

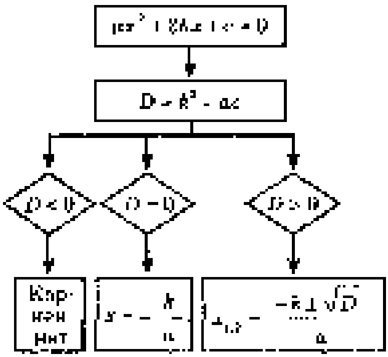


Частные случаи квадратных уравнений

Приведенное квадратное уравнение ($a = 1$)



Квадратное уравнение с четным вторым коэффициентом



Системы и совокупности уравнений

Несколько уравнений с одной переменной образуют *систему уравнений*, если ставится задача найти все такие значения переменной, каждое из которых является корнем каждого из уравнений. Для обозначения системы используют фигурные скобки: $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$

Например, уравнение $(x^2 - 1)^2 + ((x+1)(x+2))^2 = 0$ равносильно системе $\begin{cases} (x^2 - 1)^2 = 0, \\ ((x+1)(x+2))^2 = 0, \end{cases}$ отсюда $\begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ (x+1)(x+2) = 0, \end{cases}$ тогда $\begin{cases} x = \pm 1, \\ x = -1 \text{ или } x = -2. \end{cases}$ Итак, $x = -1$.

Несколько уравнений с одной переменной образуют *совокупность уравнений*, если ставится задача: найти все такие значения переменной, каждое из которых является корнем хотя бы одного из данных уравнений. Для обозначения совокупности используют квадратные скобки $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{array}\right.$

Например, уравнение $(x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0, \\ x^2 - 9 = 0, \end{array}\right.$ тогда $\left[\begin{array}{l} x^2 = 1, \\ x^2 = 9, \end{array}\right.$ отсюда $\left[\begin{array}{l} x = \pm 1, \\ x = \pm 3. \end{array}\right.$ Итак, $x = \pm 1$, $x = \pm 3$.

Методы решения уравнений

1. Решение уравнения $p(x)=0$ ***методом разложения его левой части на множители.*** Если $p(x)=0$ и $p(x)=p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot\ldots\cdot p_n(x)$, то уравнение $p(x)=0$ равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} p_1(x)=0,\\ p_2(x)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\\ p_n(x)=0.\end{array}\right.$$

Пример решения: $x^3+2x^2-3x-6=0$; $(x^3+2x^2)-(3x+6)=0$; $x^2(x+2)-3(x+2)=0$; $(x-2)(x^2-3)=0$; $\left[\begin{array}{l} x+2=0,\\ x^2-3=0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=-2,\\ x^2=3;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=-2,\\ x=\pm\sqrt{3}.\end{array}\right.$ *Ответ.* -2; $\pm\sqrt{3}$.

2. Решение уравнений ***методом введения новой переменной.*** Если в уравнении неоднократно встречается одно и то же выражение, зависящее от переменной, то целесообразно обозначить это выражение другой буквой и решить уравнение относительно введенной переменной, а потом относительно данной.

Пример решения: $(x^2+3x+1)(x^2+3x+3)+1=0$; пусть $x^2+3x+1=y$, тогда $x^2+3x+3=y+2$; $y(y+2)+1=0$; $y^2+2y+1=0$; $(y+1)^2=0$; $y+1=0$; $y=-1$; $x^2+3x+1=-1$; $x^2+3x+2=0$; $\left[\begin{array}{l} x=-1,\\ x=-2.\end{array}\right.$

Ответ. -1; -2.

3. Уравнение с ***переменной в знаменателе.***

Уравнение $\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ равносильно системе $\left\{\begin{array}{l} f(x)=0,\\ g(x)\neq 0.\end{array}\right.$

Пример решения: $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1}=0$; $\left\{\begin{array}{l} x^2+4x+3=0,\\ x^2+2x+1\neq 0;\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x=-1 \text{ или } x=-3,\\ x\neq -1.\end{array}\right.$ Итак, $x=-3$. *Ответ.* -3.

Целые уравнения высших степеней

Уравнение $f(x)=g(x)$ называется **целым**, если $f(x)$ и $g(x)$ — целые выражения.

Биквадратные уравнения

Уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$, $a\neq 0$ называется *биквадратным* уравнением. При его решении делают замену $x^2=t$. Формула корней имеет вид: $x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$.

Пример решения: $x^4-4x^2+3=0$; $x^2=t$, $t^2-4t+3=0$; $\left[\begin{array}{l} t=3, \\ t=1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2=3, \\ x^2=1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\pm\sqrt{3}, \\ x=\pm 1. \end{array}\right.$ Итак, $x=\pm\sqrt{3}$, $x=\pm 1$. *Ответ.* ± 3; ± 1.

Трехчленные уравнения

Уравнение вида $ax^{2n}+bx^n+c=0$, $a\neq 0$, $n\geq 2$, $n\in N$ называется **трехчленным**. При его решении делают замену $x^n=t$ и решают уравнение $at^2+bt+c=0$.

Пример решения: $x^6-9x^3+8=0$; $x^3=t$, $t^2-9t+8=0$; $\left[\begin{array}{l} t=8, \\ t=1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^3=8, \\ x^3=1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=1. \end{array}\right.$ Итак, $x=1$ или $x=2$. *Ответ.* 1; 2.

Если число c — корень многочлена $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$, то этот многочлен можно записать в виде $p(x)=(x-c)\cdot Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен степени $n-1$.

При нахождении корней многочлена уместно воспользоваться таким утверждением: рациональными корнями многочлена $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$, где a_0, a_1, a_2, ..., a_n — целые числа, могут быть лишь числа $\dfrac{m}{p}$ $(m\in Z,\ p\in N)$, причем $|m|$ — делитель числа $|a_0|$, а p — делитель числа $|a_n|$ (m и p — взаимно простые числа).

Пример решения: $x^3-6x^2+11x-6=0$. Целыми корнями данного уравнения могут быть лишь делители числа -6, т. е. числа ± 1; ± 2; ± 3; ± 6. Подбором устанавливаем, что $x=1$ — корень данного уравнения, тогда $x^3-x^2-5x^2+5x+6x-6=0$; $(x^3-x^2)-(5x^2-5x)+(6x-6)=0$; $x^2(x-1)-5x(x-1)+6(x-1)=0$; $(x-1)(x^2-5x+6)=0$; $\left\{\begin{array}{l} x-1=0, \\ x^2-5x+6=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2, \end{array}\right.$ $x=3$. *Ответ.* 1; 2; 3.

Рациональные уравнения

Уравнение $f(x)=g(x)$ называется *рациональным*, если $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные выражения.

Чтобы решить рациональное уравнение, надо:

1) найти общий знаменатель всех дробей, входящих в уравнение;
2) заменить данное уравнение целым, умножив обе его части на общий знаменатель;
3) решить полученное целое уравнение;
4) исключить из корней целого уравнения те, которые превращают в нуль общий знаменатель.

Пример решения:

$$1+\frac{2}{x-1}-\frac{6}{x^2-1}=\frac{3}{x+1};$$

$$1\cdot(x^2-1)+\frac{2}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{1}-\frac{6}{x^2-1}\cdot\frac{x^2-1}{1}=\frac{3}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{1};$$

$$\begin{cases}x^2-1+2(x+1)-6=3(x-1),\\ x^2-1\neq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-7+2x+2=3x-3,\\ x^2\neq 1;\end{cases}$$

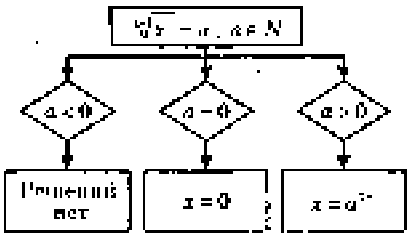
$$\begin{cases}x^2-x-2=0,\\ x\neq\pm 1;\end{cases}\quad \begin{cases}x=2 \text{ или } x=-1,\\ x\neq\pm 1.\end{cases}$$

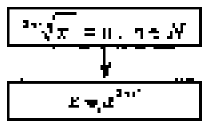
Итак, $x=2$. *Ответ.* 2.

Иррациональные уравнения

Иррациональным уравнением называется уравнение, в котором переменная содержится под знаком корня или под знаком возведения в дробную степень.

Простейшие иррациональные уравнения





Уравнение $\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x)$, $n\in N$, равносильно уравнению $f(x)=g^{2n+1}(x)$.

Уравнение $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x)$, $n \in N$, равносильно системе $\begin{cases} f(x) = g^{2n}(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

Уравнение $\sqrt[2n]{f(x)} = \sqrt[2n]{g(x)}$, $n \in N$, равносильно одной из систем:

$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \ge 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

Примеры решения:

1. $\sqrt[3]{-2x-5} = -3$; $-2x-5 = (-3)^3$; $-2x-5 = -27$; $-2x = -22$; $x = 11$.
Ответ. 11.

2. $\sqrt{x+3} = 2x+5$; $\begin{cases} x+3 = (2x+5)^2, \\ 2x+5 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x+3 = 4x^2+20x+25, \\ 2x+5 \ge 0; \end{cases}$

$\begin{cases} 4x^2+19x+22 = 0, \\ 2x+5 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2,\ x = -5{,}6, \\ 2x+5 \ge 0; \end{cases}$ отсюда $x = -2$. *Ответ.* -2.

3. $\sqrt{x^2-3} = \sqrt{3+5x}$; $\begin{cases} x^2-3 = 3+5x, \\ x^2-3 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-5x-6 = 0, \\ x^2-3 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6,\ x = -1, \\ x^2-3 \ge 0; \end{cases}$

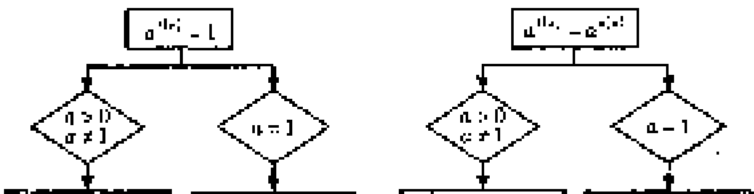
отсюда $x = 6$. *Ответ.* 6.

Показательные уравнения

Показательными уравнениями называются уравнения, в которых переменная содержится в показателе степени при постоянных положительных основаниях.

Например, уравнения $2^x + 3 = 0$, $3^{x+1} - 3^x + 1 = 0$ — показательные.

Простейшие показательные уравнения



Уравнение $a^{f(x)} = b$, $a > 0$, $a \ne 1$, $b > 0$ равносильно уравнению $f(x) = \log_a b$.

Пример решения: $3^x - 2 = 0$; $3^x = 2$; $x = \log_3 2$. *Ответ.* $\log_3 2$.

Уравнение $b_1a^{kx+l_1}+b_2a^{kx+l_2}+\dots+b_na^{kx+l_n}=c$ равносильно уравнению $a^{kx}\left(b_1a^{l_1}+b_2a^{l_2}+\dots+b_na^{l_n}\right)=c$.

Пример решения: $3^x-2\cdot3^{x-2}=63$; $3^{x-2}\left(3^2-2\right)=63$; $3^{x-2}\cdot7=63$; $3^{x-2}=9$; $3^{x-2}=3^2$; $x-2=2$; $x=4$. *Ответ.* 4.

Уравнение $Aa^{2x}+Ba^x+C=0$ равносильно системе $\begin{cases}a^x=t>0,\\ At^2+Bt+C=0.\end{cases}$

Пример решения: $49^x-8\cdot7^x+7=0$; $\left(7^2\right)^x-8\cdot7^x+7=0$;

$\left(7^x\right)^2-8\cdot7^x+7=0$; $\begin{cases}7^x=t,\\ t^2-8t+7=0;\end{cases}$ $\begin{cases}7^x=t,\\ t=7 \text{ или } t=1.\end{cases}$ Итак, $\left[\begin{array}{l}7^x=7,\\ 7^x=1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=0.\end{array}\right.$

Ответ. 0; 1.

Уравнение $Aa^{2x}+Ba^xb^x+Cb^{2x}=0$ равносильно уравнению $A\left(\frac{a}{b}\right)^{2x}+B\left(\frac{a}{b}\right)^x+C=0$.

Пример решения: $3\cdot16^x+2\cdot81^x=5\cdot36^x$; $3\cdot4^{2x}+2\cdot9^{2x}=5\cdot4^x\cdot9^x$;

$\frac{3\cdot4^{2x}}{9^{2x}}+\frac{2\cdot9^{2x}}{9^{2x}}=\frac{5\cdot4^x\cdot9^x}{9^{2x}}$; $3\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}-5\left(\frac{4}{9}\right)^x+2=0$; $\begin{cases}\left(\frac{4}{9}\right)^x=t,\\ 3t^2-5t+2=0;\end{cases}$

$\begin{cases}\left(\frac{4}{9}\right)^x=t,\\ t=\frac{2}{3} \text{ або } t=1.\end{cases}$ Тогда $\left[\begin{array}{l}\left(\frac{4}{9}\right)^x=\frac{2}{3},\\ \left(\frac{4}{9}\right)^x=1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\frac{2}{3},\\ x=0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}2x=1,\\ x=0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2},\\ x=0.\end{array}\right.$

Ответ. 0; $\frac{1}{2}$.

Логарифмические уравнения

Логарифмическими уравнениями называются уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма.

Простейшие логарифмические уравнения

$$\boxed{\log_a x=b,\ a>0,\ a\ne1}\ \Rightarrow\ \boxed{x=a^b}$$

$$\boxed{\log_a f(x)=b,\ a>0,\ a\ne1}\ \Rightarrow\ \boxed{f(x)=a^b}$$

Уравнение $\log_a f(x)=g(x)$, $a>0$, $a\neq 1$ равносильно системе: $\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)=a^{g(x)}. \end{cases}$

Пример решения: $\log_3(9^x-72)=x$; $\begin{cases} 9^x-72=3^x, \\ 9^x-72>0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3^x=t, \\ t^2-t-72=0, \\ 9^x-72>0; \end{cases}$

$\begin{cases} 3^x=9 \text{ или } 3^x=-8, \\ 9^x-72>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2, \\ 9^x-72>0, \end{cases}$ итак, $x=2$. *Ответ.* 2.

Уравнение $\log_{g(x)} f(x)=b$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ g(x)\neq 1, \\ f(x)=g^b(x). \end{cases}$

Пример решения: $\log_{3-x}(x^2-x-1)=1$; $\begin{cases} x^2-x-1>0, \\ 3-x>0, \\ 3-x\neq 1, \\ x^2-x-1=(3-x)^1; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-x-1>0, \\ 3-x>0, \\ 3-x\neq 1, \\ x^2=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-x-1>0, \\ 3-x>0, \\ 3-x\neq 1, \\ x=\pm 2; \end{cases}$ откуда $x=-2$. *Ответ.* -2.

Уравнение $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, $a>0$, $a\neq 1$ равносильно системе

$\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)=g(x); \end{cases}$ или $\begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)=g(x). \end{cases}$

Пример решения: $\lg(x+1{,}5)=\lg\dfrac{1}{x}$; $\begin{cases} x+1{,}5>0, \\ x+1{,}5=\dfrac{1}{x}; \end{cases}$

$\begin{cases} x+1{,}5>0, \\ x^2+1{,}5x-1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x+1{,}5>0, \\ x=-2 \text{ или } x=0{,}5; \end{cases}$ отсюда $x=0{,}5$. *Ответ.* 0,5.

Уравнение $b_1\log_a f_1(x)+b_2\log_a f_2(x)+\dots+b_n\log_a f_n(x)=c\log_a g(x)$, $a>0$,

$a\neq 1$ равносильно системе: $\begin{cases} f_1(x)>0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ f_n(x)>0, \\ g(x)>0, \\ f_1^{b_1}(x)\cdot f_2^{b_2}(x)\cdot\ldots\cdot f_n^{b_n}(x)=g^c(x). \end{cases}$

Пример решения: $\log_5(x-1)+\log_5(x-2)=\log_5(x+2)$;

$$\begin{cases}\log_5((x-1)(x-2))=\log_5(x+2),\\ x-1>0,\\ x-2>0;\end{cases}\quad \begin{cases}(x-1)(x-2)=x+2,\\ x-1>0,\\ x-2>0;\end{cases}\quad \begin{cases}x^2-3x+2=x+2,\\ x>1,\\ x>2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-4x=0,\\ x>1,\\ x>2;\end{cases}\quad \begin{cases}x=0,\ x=4,\\ x>1,\\ x>2;\end{cases}$$ отсюда $x=4$. *Ответ.* 4.

Уравнение $A_n\log_a^n f(x)+\ldots+A_1\log_a f(x)+A_0=0$, $a>0$, $a\ne1$, решается заменой $\log_a f(x)=t$.

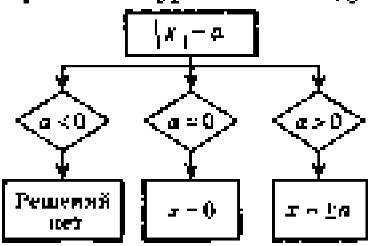
Пример решения: $\log_2^2 x-3\log_2 x=4$; $\begin{cases}\log_2 x=t,\\ t^2-3t-4=0;\end{cases}$
$\begin{cases}\log_2 x=t,\\ t=4 \text{ или } t=-1;\end{cases}$ тогда $\left[\begin{array}{l}\log_2 x=4,\\ \log_2 x=-1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=2^4,\\ x=2^{-1};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=16,\\ x=0{,}5.\end{array}\right.$ *Ответ.* 16; 0,5.

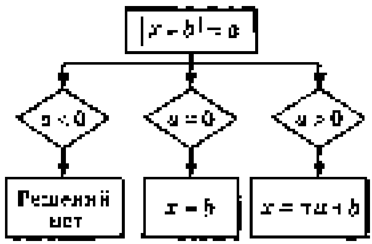
Уравнение $f(x)^{g(x)}=b$, $a>0$, $b>0$ равносильно или системе
$$\begin{cases}f(x)>0,\\ f(x)\ne1,\\ g(x)>0,\\ \log_a f(x)\cdot\log_a g(x)=\log_a b; \text{ если } b\ne1,\end{cases}$$
или уравнению $f(x)=1$ $(g(x)\ne1)$, если $b=1$.

Пример решения: $x^{\lg x-2}=1000$; $\lg\left(x^{\lg x-2}\right)=\lg 1000$;
$(\lg x-2)\lg x=3$; $\lg^2 x-2\lg x-3=0$; $\begin{cases}\lg x=t,\\ t^2-2t-3=0;\end{cases}$ $\begin{cases}\lg x=t,\\ t=3 \text{ или } t=-1;\end{cases}$
тогда $\left[\begin{array}{l}\lg x=3,\\ \lg x=-1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=10^3,\\ x=10^{-1};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=1000,\\ x=0{,}1.\end{array}\right.$ *Ответ.* 0,1; 1000.

Уравнение с модулем

Простейшие уравнения с модулем





Уравнение $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно объединению уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x); \end{array}\right.$ или уравнению $f^2(x) = g^2(x)$.

Пример решения: $|x| = |4 - x|$; $\left[\begin{array}{l} x = 4 - x, \\ x = -4 + x; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2x = 4, \\ 0x = -4; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x \in \varnothing. \end{array}\right.$

Ответ. 2.

Уравнение $|f(x)| = g(x)$ равносильно двум системам: $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} f(x) = -g(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

Пример решения: $|x^2 - x - 8| = -x$; $\begin{cases} x^2 - x - 8 = -x, \\ -x \geq 0; \end{cases}$

или $\begin{cases} x^2 - x - 8 = x, \\ -x \geq 0. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x^2 - x - 8 = -x, \\ -x \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 8 = 0, \\ -x \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 8, \\ -x \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 2\sqrt{2}, \\ -x \geq 0; \end{cases}$ итак, $x = -2\sqrt{2}$.

2) $\begin{cases} x^2 - x - 8 = x, \\ -x \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 2x - 8 = 0, \\ -x \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \text{ или } x = -2, \\ -x \geq 0, \end{cases}$ итак, $x = -2$.

Ответ. -2; $-2\sqrt{2}$.

Уравнение $|f(x)| = a$, где $a \geq 0$, равносильно объединению уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$

Пример решения: $|x^2 + 5x + 6| = 2$; $\left[\begin{array}{l} x^2 + 5x + 6 = 2, \\ x^2 + 5x + 6 = -2; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x^2 + 5x + 4 = 0, \\ x^2 + 5x + 8 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -4. \end{array}\right.$ *Ответ.* -1; -4.

При решении более сложных уравнений с модулем надо:

1) найти ОДЗ уравнения;
2) найти нули всех подмодульных функций;
3) обозначить найденные нули на ОДЗ и разбить ОДЗ на интервалы;
4) найти решения в каждом интервале и обязательно проверить, входит ли найденное решение в рассматриваемый интервал.

Пример решения: $|x + 1| + |x - 5| = 20$. Выражения $x + 1$ и $x - 5$ равны нулю, если $x = -1$ и $x = 5$ соответственно, поэтому рассмотрим следующие три случая (рис. 43).

Рис. 43

I. $\begin{cases} x \le -1, \\ -x-1-x+5=20; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le -1, \\ -2x=16; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le -1, \\ x=-8; \end{cases}$ итак, $x=-8$.

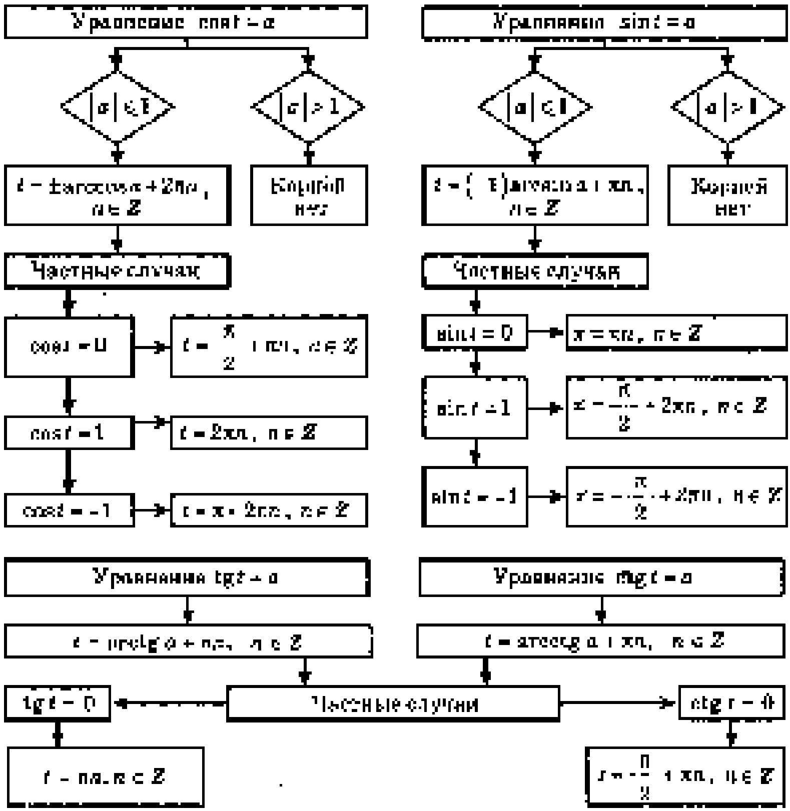
II. $\begin{cases} -1 < x \le 5, \\ x+1-x+5=20; \end{cases}$ $\begin{cases} -1 < x \le 5, \\ 0x=14; \end{cases}$ итак, корней нет.

III. $\begin{cases} x > 5, \\ x+1+x-5=20; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 5, \\ 2x=24; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 5, \\ x=12, \end{cases}$ итак, $x=12$.

Ответ. -8; 12.

Тригонометрические уравнения

Тригонометрическими уравнениями называются уравнения, в которых неизвестное (переменная) входит лишь под знак тригонометрической функции.



Некоторые тригонометрические уравнения путем тождественных преобразований можно привести к уравнению с одной тригонометрической функцией, а потом сделать замену и привести уравнение к алгебраическому.

Примеры решения:

1. $\sin^2 x + 4\cos x = 2{,}75$; $(1-\cos^2 x)+4\cos x = 2{,}75$;

$$-\cos^2 x + 4\cos x - 1{,}75 = 0;\ \cos^2 x - 4\cos x + 1{,}75 = 0;\ \begin{cases}\cos x = t,\\ t^2 - 4t + 1{,}75 = 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x = t,\\ t = \dfrac{1}{2} \text{ или } t = \dfrac{7}{2},\end{cases} \text{ тогда } \left[\begin{array}{l}\cos x = \dfrac{1}{2},\\ \cos x = \dfrac{7}{2};\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z,\\ x \in \varnothing.\end{array}\right.$$

Ответ. $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$.

2. $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 4$; $\operatorname{tg} x + \dfrac{3}{\operatorname{tg} x} = 4$; $\begin{cases}\operatorname{tg} x = t,\\ t + \dfrac{3}{t} = 4;\end{cases}$ $\begin{cases}\operatorname{tg} x = t,\\ t^2 - 4t + 3 = 0;\end{cases}$

$$\begin{cases}\operatorname{tg} x = t,\\ t = 1 \text{ или } t = 3;\end{cases} \text{ тогда } \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = 1,\\ \operatorname{tg} x = 3;\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z,\\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n,\ n \in Z.\end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $\operatorname{arctg} 3 + \pi n$, $n \in Z$.

Уравнения, правая часть которых равна 0, часто можно решить разложением их левой части на множители.

Пример решения:

$$\sin 5x = \sin x;\ \sin 5x - \sin x = 0;$$

$$2\sin\frac{5x - x}{2}\cos\frac{5x + x}{2} = 0;\ \sin 2x\cos 3x = 0;\ \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ \cos 3x = 0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2x = \pi n,\ n \in Z,\\ 3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi n}{2},\ n \in Z,\\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3},\ n \in Z.\end{array}\right.$$

Ответ. $\dfrac{\pi n}{2}$; $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

Тригонометрическое уравнение вида $a_0\sin^n x + a_1\sin^{n-1} x\cos x + a_2\sin^{n-2} x\cos^2 x + \ldots + a_n\cos^n x = 0$, все члены которого имеют одну и ту же степень k относительно синуса и косинуса, называется *однородным*. Однородное уравнение легко привести к уравнению относительно $\operatorname{tg} x$, если все его члены разделить на $\cos^k x$. При этом, если $a_k \neq 0$, то такое деление не приводит к потере корней. Если $a_k = 0$, то $\cos x$ следует вынести за скобки.

Пример решения:

$$\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0;$$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0; \quad \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0;$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = t, \\ t^2 - 3t + 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x = t, \\ t = 2 \text{ или } t = 1; \end{cases} \quad \text{тогда} \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 2, \\ \operatorname{tg} x = 1; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Ответ. $\operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $a\cos x + b\sin x = c$ равносильно уравнению $\sin(x + \varphi) = \dfrac{c}{r}$, где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \arcsin \dfrac{a}{r}$.

Пример решения:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2}} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\sqrt{3}\right)^2}};$$

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2}; \quad \cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = \frac{1}{2};$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}; \quad x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ. $-\dfrac{\pi}{3} + (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Графический способ решения уравнений

Чтобы графически решить уравнение $f(x)=g(x)$, следует построить графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ и найти абсциссы точек пересечения построенных графиков.

Пример решения: $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x+1$. Построив в одной системе координат графики функций $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ и $y=x+1$ (рис. 44), находим абсциссу точки пересечения графиков: $x=0$.

Ответ. 0.

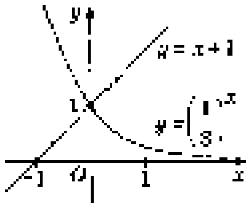


Рис. 44

§ 15. Уравнения с двумя переменными

Уравнение и его решения

Равенство, содержащее две переменные (неизвестные), называется *уравнением с двумя переменными* (неизвестными).

Решением уравнения с двумя переменными $f(x; y) = 0$ называется упорядоченная пара чисел, которая превращает его в правильное равенство. Если дано уравнение с двумя переменными x и y, то принято в записи его решений на первом месте ставить значение переменной x, а на втором — значение y.

Например, пары $(4; 3)$, $(3; 4)$, $(-3; 4)$, $(-3; -4)$ — решения уравнения $x^2 + y^2 = 25$, однако пары $(1; 5)$, $(2; 3)$ решениями уравнения $x^2 + y^2 = 25$ не будут. Уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называются **равносильными**. Уравнения с двумя переменными, не имеющие решений, также считают равносильными.

Для уравнений с двумя переменными верны теоремы о равносильных уравнениях.

График уравнения с двумя переменными

Графиком уравнения с двумя переменными x и y называется множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; y)$, где пара $(x; y)$ является решением соответствующего уравнения.

График уравнения следует отличать от графика функции. График уравнения только тогда является графиком функции, когда каждая прямая, параллельная оси Oy, пересекает его не больше, чем в одной точке.

Например, изображенные на рисунке 45 полуокружности — графики функций $y = \sqrt{4 - x^2}$ (верхняя полуокружность) и $y = -\sqrt{4 - x^2}$ (нижняя полуокружность). Их объединение — вся окружность — график уравнения $x^2 + y^2 = 4$.

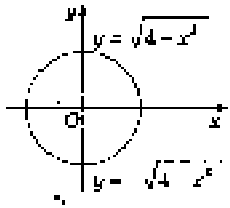
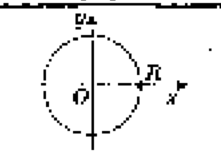
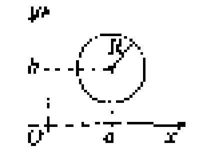
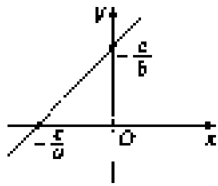
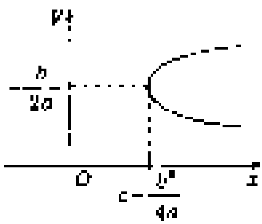
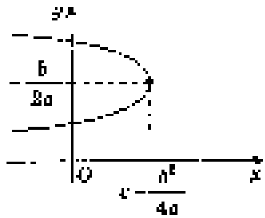
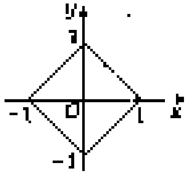


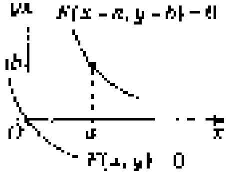
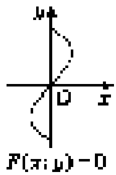
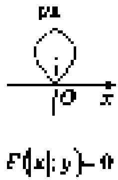
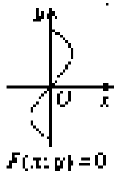
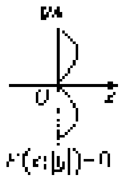
Рис. 45

Графики некоторых уравнений

Уравнение	График	Описание
$x^2+y^2=R^2$		Окружность с центром $(0; 0)$ радиуса R
$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$		Окружность с центром $(a; b)$ радиуса R
$ax+by+c=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$		Прямая: если $a=0$, параллельна оси Ox; если $b=0$, параллельна оси Oy; если $c=0$, проходит через $(0; 0)$
$x=ay^2+by+c$	$a>0$  $a<0$ 	Парабола с вершиной $\left(c-\frac{b^2}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$. Если $a>0$, ветви направлены вправо, если $a<0$, ветви направлены влево

Уравнение	График	Описание
$\lvert x\rvert+\lvert y\rvert=1$		Квадрат, центр которого лежит в точке $(0;\ 0)$, диагонали равны 2, лежат на координатных осях

Преобразование графика уравнения $F(x;\ y)=0$

Уравнение	Преобразования	Геометрическая иллюстрация
$F(x-a;\ y-b)=0$	Параллельный перенос графика уравнения $F(x;\ y)=0$ на вектор $\vec{n}(a;\ b)$	
$F(\lvert x\rvert;\ y)=0$	Часть графика уравнения $F(x;\ y)=0$ справа от оси Oy (и на самой оси) остается без изменений, и эта же часть симметрично отображается относительно оси Oy	 
$F(x;\ \lvert y\rvert)=0$	Часть графика уравнения $F(x;\ y)=0$, расположенная выше оси Ox (и на самой оси), остается без изменений, и эта же часть симметрично отображается относительно оси Ox	 

§ 16. Системы уравнений

Системы уравнений с двумя переменными

Несколько уравнений с двумя переменными, относительно которых поставлена задача найти все общие решения, называются *системой уравнений с двумя переменными*. При записи система уравнений обозначается слева объединяющей фигурной скобкой.

Решить систему уравнений с двумя переменными означает найти все ее решения или доказать, что система решений не имеет.

Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, которая превращает каждое уравнение системы в правильное равенство. *Например*, пара чисел $x = 3$, $y = 2$ (записывается так: $(3; 2)$) является решением системы уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ x - y = 1. \end{cases}$

Равносильные системы уравнений

Системы уравнений с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называются *равносильными*. Системы уравнений, не имеющие решений, также называются равносильными.

Теоремы о равносильности систем уравнений

1. Если заменить порядок уравнений системы, то получим систему, равносильную данной.

   Например, системы $\begin{cases} x + y = 10, \\ x - y = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 10 \end{cases}$ равносильны.

2. Если одно из уравнений системы заменить на равносильное ему уравнение, то получим систему, равносильную данной.

   Например, системы $\begin{cases} 5x - 5y = 10, \\ x + y = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ равносильны.

3. Если в системе уравнений из одного уравнения выразить одну переменную через другую переменную и полученное выражение подставить вместо этой переменной во второе уравнение системы, то получим систему, равносильную данной.

   Например, системы $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} y = x - 3, \\ x^2 + (x - 3)^2 = 2 \end{cases}$ равносильны.

4. Если одно из уравнений системы заменить суммой первого уравнения, умноженного на число $\alpha \neq 0$, и второго, умноженного на число

$\beta \ne 0$, а одно из уравнений оставить без изменений, то получим систему, равносильную данной.

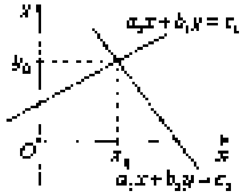
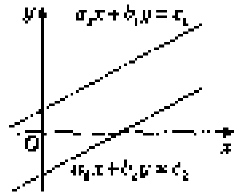
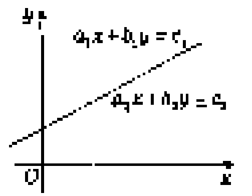
Например, системы $\begin{cases} 2x - 3y = 10, \\ 3x + 2y = 5; \end{cases}$ и $\begin{cases} (2x - 3y)\cdot 2 + (3x + 2y)\cdot 3 = 35, \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

равносильны.

Системы линейных уравнений с двумя переменными

Система вида $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ называется *системой линейных уравнений с двумя переменными.*

Возможные случаи решения системы

Условие	Графическая интерпретация	Множество решений
Коэффициенты при неизвестных (переменных) в уравнении не пропорциональны, т. е. $a_1b_2 \ne a_2b_1$	 Прямые пересекаются	Одно решение. $x_0 = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y_0 = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$
Коэффициенты при неизвестных (переменных) в уравнении пропорциональны, т. е. $a_1b_2 = a_2b_1$, однако они не пропорциональны свободным членам $a_1c_2 \ne a_2c_1$ или $b_1c_2 \ne b_2c_1$	 Прямые параллельны	Решений нет
Коэффициенты при неизвестных (переменных) и свободные члены в уравнении пропорциональны, т. е. $a_1b_2 = a_2b_1$; $a_1c_2 = a_2c_1$; $b_1c_2 = b_2c_1$	 Прямые совпадают	Бесконечно много решений

Графический способ решения системы уравнений с двумя переменными

Чтобы решить систему уравнений *графическим способом*, надо:

1) выполнить равносильные преобразования системы так, чтобы удобно было построить графики уравнений системы;
2) построить графики;
3) найти координаты точек пересечения построенных линий. Эти координаты и являются решениями системы уравнений.

Пример решения:

$\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = 4. \end{cases}$ Построив графики уравнений $x + y = 2$ (прямая, проходящая через точки $(0; 2)$ и $(2; 0)$) и $x^2 + y^2 = 4$ (окружность с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом 2) (рис. 46), находим точки пересечения линий: $(0; 2)$ и $(2; 0)$. Итак, решением данной системы являются пары $(0; 2)$ и $(2; 0)$.

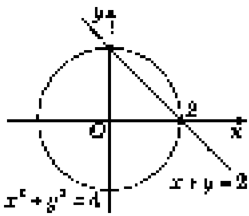


Рис. 46

Ответ. $(0; 2)$, $(2; 0)$.

Решение системы уравнений с двумя переменными способом сложения

Чтобы решить систему с двумя переменными способом *алгебраического сложения*, надо:

1) уравнять коэффициенты при одной из переменных (при выражениях) путем почленного умножения обоих уравнений на множители, подобранные соответствующим образом;
2) сложить (или вычесть) почленно уравнения системы, исключив одну из переменных; решить полученное уравнение с одной переменной;
3) найти значение второй переменной таким же способом (или подстановкой найденного значения переменной в любое из заданных уравнений системы);
4) записать ответ.

Пример решения:

$\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 5x - 3y = 2. \end{cases}$ Почленно умножив первое уравнение системы на 3, а второе — на 2, получим систему $\begin{cases} 9x - 6y = 15, \\ 10x - 6y = 4. \end{cases}$ Почленно сложив уравнения системы, имеем: $(9x + 6y) - (10 - 6y) = 15 + 4$, $19x = 19$, $x = 1$. Почленно умножив первое уравнение на -5, а второе на 3, получим систему $\begin{cases}-15x-10y=-25,\\15x-9y=6.\end{cases}$ Сложив почленно уравнения, имеем: $-19y=-19$, $y=1$. *Ответ.* $(1;1)$.

Решение системы уравнений с двумя переменными способом подстановки

Чтобы решить систему двух уравнений с двумя переменными *способом подстановки*, надо:

1) выразить из одного уравнения системы одну переменную через другую;
2) подставить найденное значение во второе уравнение системы и получить уравнение относительно второй переменной;
3) решить полученное уравнение и найти значение этой переменной;
4) подставить найденные значения в выражение для первой переменной и получить ее соответствующие значения;
5) записать ответ.

Пример решения.

$\begin{cases}x^2+y^2=34,\\x-y=2;\end{cases}$ $\begin{cases}(2+y)^2+y^2=34,\\x=2+y;\end{cases}$ $\begin{cases}4+4y+y^2+y^2=34,\\x=2+y;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2+y,\\2y^2+4y-30=0;\end{cases}$

$\begin{cases}x=2+y,\\y^2+2y-15=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=2+y,\\y=-5 \text{ или } y=3.\end{cases}$ Итак, $\begin{cases}x=-3,\\y=-5;\end{cases}$ или $\begin{cases}x=5,\\y=3.\end{cases}$

Ответ. $(-3;-5)$, $(5;3)$.

Решение системы двух уравнений с двумя переменными методом введения новой переменной

При решении систем нелинейных уравнений, как правило, используются различные комбинации нескольких методов решения систем, в частности ***метод введения новой переменной.***

Пример решения.

$\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=2,\\[2mm]\dfrac{3}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=7.\end{cases}$ Пусть $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}=a,\\[2mm]\dfrac{1}{x-y}=b,\end{cases}$ тогда $\begin{cases}a+b=2,\\3a+4b=7;\end{cases}$

$\begin{cases}a=2-b,\\3(2-b)+4b=7;\end{cases}$ $\begin{cases}a=2-b,\\b=1;\end{cases}$ $\begin{cases}a=1,\\b=1.\end{cases}$ Тогда имеем: $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}=1,\\[2mm]\dfrac{1}{x-y}=1;\end{cases}$

$\begin{cases}x+y=1,\\x-y=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y+x-y=2,\\x+y-x+y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x=2,\\2y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=0.\end{cases}$ *Ответ.* $(1;0)$.

§ 17. Неравенства и системы неравенств с одной переменной

Неравенства с одной переменной и их решения

Неравенствами с одной переменной (неизвестным) называются два выражения с переменной (неизвестным), соединенные знаком неравенства: > (больше), < (меньше), $\geq$ (больше или равно; не меньше), $\leq$ (меньше или равно; не больше).

Решением неравенства называется значение переменной (неизвестного), при котором неравенство превращается в правильное числовое неравенство.

Например, число 5 является решением неравенства $x^2 - 6x < 0$, поскольку $5^2 - 6 \cdot 5 < 0$.

Решить неравенство означает найти все его решения или доказать, что их нет.

Решениями неравенства является некоторое подмножество действительных чисел.

Некоторые подмножества действительных чисел, их обозначение, изображение на координатной прямой и запись в виде неравенства

Название	Обозначение	Изображение	Запись в виде неравенства
Числовая прямая	$(-\infty; +\infty)$, R		$-\infty < x < +\infty$
Закрытый промежуток (отрезок)	$[a; b]$		$a \leq x \leq b$
Открытый промежуток (интервал)	$(a; b)$		$a < x < b$
Полуоткрытый промежуток	$[a; b)$		$a \leq x < b$
	$(a; b]$		$a < x \leq b$

Бесконечный промежуток (луч)	$(-\infty; a]$		$x \leq a$
	$(-\infty; a)$		$x < a$
	$(a; +\infty)$		$x > a$
	$[a; +\infty)$		$x \geq a$

Равносильные неравенства

Два неравенства называются *равносильными*, если множества их решений совпадают. Неравенства, не имеющие решений, также считаются равносильными.

Областью допустимых значений (ОДЗ) неравенства называется множество значений переменной, при которых выражения в обеих частях неравенства определены.

Например, областью допустимых значений неравенства $x^2 \geq x$ является множество действительных чисел; а областью допустимых значений неравенства $\sqrt{x+3} < x$ является множество $[-3; +\infty)$, поскольку выражение $\sqrt{x+3}$ определено, если $x+3 \geq 0$.

Теоремы о равносильности неравенств

1. Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число или выражение с переменной, что не теряет смысл при любом значении переменной из области определения неравенства, то получим неравенство, равносильное данному. Отсюда вытекает, что из одной части неравенства можно перенести во вторую слагаемое с противоположным знаком: $f(x)+g(x) \leq h(x)$, тогда $f(x) \leq h(x)+g(x)$. Например, неравенства $x^2 \leq x+2$ и $x^2-x-2 \leq 0$ равносильны.
2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число или на выражение с переменной, которое приобретает лишь положительные значения и не теряет смысл на множестве допустимых значений переменной для данного неравенства, то получим неравенство, равносильное данному.

Например, неравенства $5x > 10$ и $x > 2$; $\frac{x}{x^2+1} < 1$ и $x < x^2+1$ равносильны.

3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число или на выражение с переменной, которая приобретает лишь отрицательные значения и не теряет смысл на множестве допустимых значений неизвестной для данного неравенства, а также поменять знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

Например, неравенства $\dfrac{\sqrt{-x-1}}{\operatorname{arcctg} x} \ge 1$ и $\sqrt{-x-1} \le \operatorname{arcctg} x$; $-7x > 7$ и $x < -1$ равносильны.

4. Если обе части неравенства возвести в нечётную натуральную степень и сохранить знак неравенства, то получим неравенство, равносильное данному.

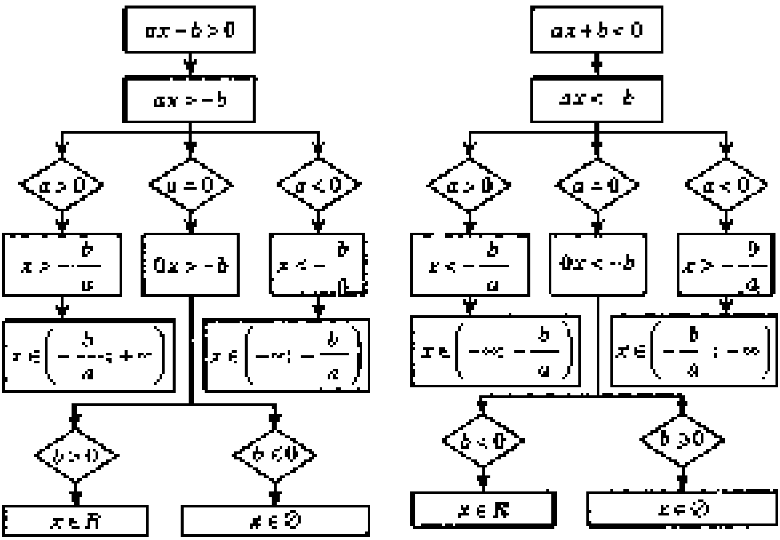
Например, неравенства $\sqrt[3]{x^3+x} < \sqrt[3]{3-x}$ и $x^2+x < 3-x$ равносильны.

5. Если первое неравенство равносильно второму, а второе — третьему, то первое неравенство равносильно третьему.

Линейные неравенства с одной переменной

Линейным неравенством с одной переменной x называется неравенство вида $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\ge 0$, $ax+b\le 0$.

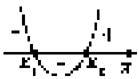
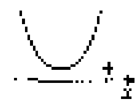
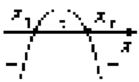
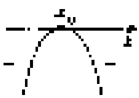
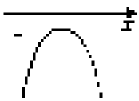
Схемы решения линейного неравенства



Квадратичные неравенства

Квадратичными неравенствами называются неравенства вида $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c\leq 0$ $(a\neq 0)$.

Решения квадратичных неравенств

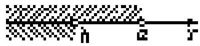
Схема		Квадратичное неравенство			
		$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
$a>0,\ D>0$		$(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	$(x_1;x_2)$	$(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$	$[x_1;x_2]$
$a>0,\ D=0$		$(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$	$\varnothing$	$(-\infty;+\infty)$	x_0
$a>0,\ D<0$		$(-\infty;+\infty)$	$\varnothing$	$(-\infty;+\infty)$	$\varnothing$
$a<0,\ D>0$		$(x_1;x_2)$	$(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$	$[x_1;x_2]$	$(-\infty;x_1]\cup[x_2;+\infty)$
$a<0,\ D=0$		$\varnothing$	$(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$	x_0	$(-\infty;+\infty)$
$a<0,\ D<0$		$\varnothing$	$(-\infty;+\infty)$	$\varnothing$	$(-\infty;+\infty)$

Системы линейных неравенств с одной переменной

Системы вида: $\begin{cases} a_1x > b_1, \\ a_2x > b_2, \end{cases}$ или $\begin{cases} a_1x > b_1, \\ a_2x < b_2, \end{cases}$ или $\begin{cases} a_1x < b_1, \\ a_2x < b_2, \end{cases}$ или $\begin{cases} a_1x < b_1, \\ a_2x > b_2 \end{cases}$ называются ***системами двух линейных уравнений с одной переменной***. (Вместо знаков $>$, $<$ могут быть знаки $\geq$, $\leq$.)

Чтобы решить систему неравенств, надо каждое неравенство системы решить отдельно, а потом найти решение системы как пересечение множеств решений неравенств.

Возможные случаи решения систем линейных неравенств

Системы линейных неравенств $(a > b)$	Решение и его геометрическая иллюстрация	Пример
$\begin{cases} x > a, \\ x > b \end{cases}$	 $x \in (a; +\infty)$	$\begin{cases} x > 3, \\ x > 2 \end{cases}$  $x \in (3; +\infty)$
$\begin{cases} x < a, \\ x < b \end{cases}$	 $x \in (-\infty; b)$	$\begin{cases} x < 5, \\ x < 2 \end{cases}$  $x \in (-\infty; 2)$
$\begin{cases} x < a, \\ x > b \end{cases}$	 $x \in (b; a)$	$\begin{cases} x < 4, \\ x > 1 \end{cases}$  $x \in (1; 4)$
$\begin{cases} x > a, \\ x < b \end{cases}$	 Решений нет	$\begin{cases} x > 6, \\ x < 3 \end{cases}$  Решений нет

Неравенства вида $f(x)g(x) > 0$ и $f(x)g(x) < 0$

Неравенство $f(x)g(x) > 0$ равносильно двум системам:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Неравенство $f(x)g(x) < 0$ равносильно двум системам:

$$\begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Решение двойных неравенств

Двойное неравенство $f(x) < g(x) < h(x)$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ g(x) < h(x). \end{cases}$

Пример решения: $-3 < 2x - 1 < 3$, $\begin{cases} 2x - 1 > -3, \\ 2x - 1 < 3; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x > -2, \\ 2x < 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -1, \\ x < 2. \end{cases}$

Тогда (рис. 47) $x \in (-1;\ 2)$.

Рис. 47

Ответ: $(-1;\ 2)$

Дробные неравенства

Неравенство $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ равносильно двум системам неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Неравенство $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ равносильно двум системам неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Неравенство $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ равносильно двум системам неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Неравенство $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ равносильно двум системам неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Примеры решения:

1. $\dfrac{x-2}{x-7} > 0$. 1) $\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x - 7 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2, \\ x > 7. \end{cases}$ Тогда (рис. 48) $x \in (7;\ +\infty)$.

Рис. 48

2) $\begin{cases} x - 2 < 0, \\ x - 7 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 2, \\ x < 7. \end{cases}$ Тогда (рис. 49) $x \in (-\infty;\ 2)$.

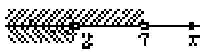


Рис. 49

Ответ: $(-\infty;\ 2) \cup (7;\ +\infty)$.

8. $\dfrac{2x-1}{3-x} \le 0$. 1) $\begin{cases} 2x-1 \le 0, \\ 3-x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x \le 1, \\ x < 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 0{,}5, \\ x < 3. \end{cases}$

Рис. 50

Тогда (рис. 50) $x \in (-\infty; 0{,}5]$.

2) $\begin{cases} 2x-1 \ge 0, \\ 3-x < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x \ge 1, \\ x > 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge 0{,}5, \\ x > 3. \end{cases}$

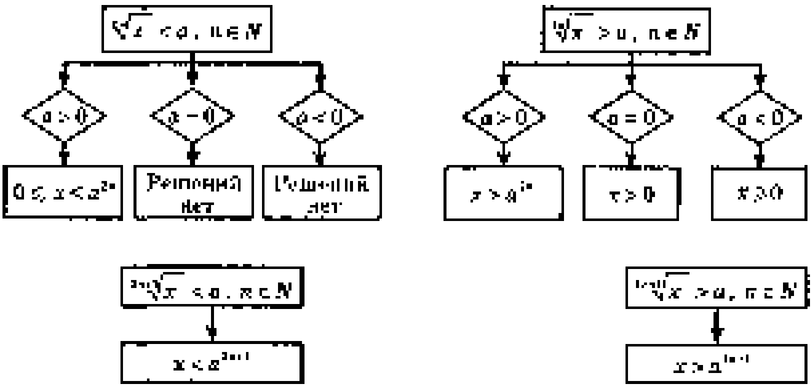
Рис. 51

Тогда (рис. 51) $x \in (3; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; 0{,}5] \cup (3; +\infty)$.

Иррациональные неравенства

Простейшие иррациональные неравенства



Неравенства $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x)$ и $\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x)$, $n \in N$, равносильны неравенствам $f(x) > g^{2n+1}(x)$ и $f(x) < g^{2n+1}(x)$.

Пример решения: $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 5x + 6} < x$, $x^3 + x^2 - 5x + 6 < x^3$, $x^2 - 5x + 6 < 0$, $(x-2)(x-3) < 0$. Тогда (рис. 52) $x \in (2; 3)$.

Рис. 52

Ответ. $(2; 3)$.

Неравенство $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$, $n \in N$, равносильно системе $\begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \ge 0. \end{cases}$

Пример решения: $\sqrt{4x-x^2}<4-x$, $\begin{cases}4-x>0,\\4x-x^2<(4-x)^2,\\4x-x^2\geq 0.\end{cases}$

$\begin{cases}x<4,\\4x-x^2<16-8x+x^2,\\x(4-x)\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<4,\\2x^2-12x+16>0,\\x(4-x)\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<4,\\x^2-6x+8>0,\\x(4-x)\geq 0;\end{cases}$

$\begin{cases}x<4,\\(x-2)(x-4)>0,\\x(4-x)\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\in(-\infty;\,4),\\x\in(-\infty;\,2)\cup(4;\,+\infty).\\x\in[0;\,4].\end{cases}$ Тогда (рис. 53) $x\in[0;\,2)$.

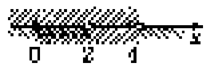


Рис. 53

Ответ. $[0;\,2)$.

Неравенство $\sqrt[2n]{f(x)}>g(x)$, $n\in N$, равносильно объединению систем

$\begin{cases}g(x)\geq 0,\\f(x)>g^{2n}(x)\end{cases}$ или $\begin{cases}g(x)<0,\\f(x)\geq 0.\end{cases}$

Пример решения:

$\sqrt{x^2-5x+4}>2x-8$.

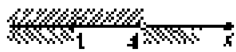
1) $\begin{cases}2x-8\geq 0,\\x^2-5x+4>(2x-8)^2;\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq 4,\\3x^2-27x+60<0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq 4,\\x^2-9x+20<0;\end{cases}$

$\begin{cases}x\geq 4,\\4<x<5.\end{cases}$ Тогда (рис. 54) $x\in(4;\,5)$.

Рис. 54

2) $\begin{cases}2x-8<0,\\x^2-5x+4\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<4,\\(x-1)(x-4)\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\in(-\infty;\,4),\\x\in(-\infty;\,1]\cup[4;\,+\infty).\end{cases}$

Тогда (рис. 55) $x\in(-\infty;\,1]$.



Ответ. $(-\infty;\,1]\cup(4;\,5)$.

Рис. 55

Неравенство $\sqrt[2n]{f(x)}>\sqrt[2n]{g(x)}$, $n\in N$, равносильно системе $\begin{cases}f(x)>g(x),\\g(x)\geq 0.\end{cases}$

Пример решения:

$\sqrt{2x^2-x-6}>\sqrt{x^2-4}$, $\begin{cases}2x^2-x-6>x^2-4,\\x^2-4\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-x-2>0,\\x^2-4\geq 0;\end{cases}$

$$\begin{cases}(x-2)(x+1)\geq 0,\\(x-2)(x+2)\geq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}x\in(-\infty;\,-1]\cup[2;\,+\infty),\\x\in(-\infty;\,-2]\cup[2;\,+\infty).\end{cases}$$

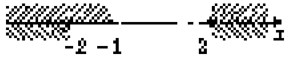


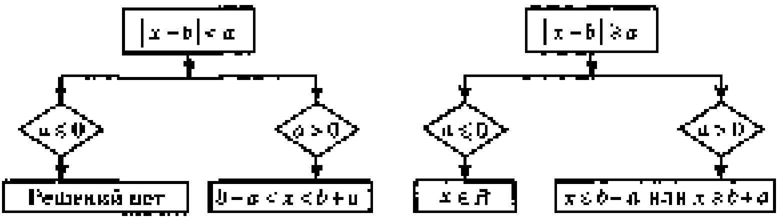
Рис. 56

Тогда (рис. 56) $x\in(-\infty;\,-2]\cup[2;\,+\infty)$.

Ответ. $(-\infty;\,-2]\cup[2;\,+\infty)$.

Неравенства с модулем

Простейшие неравенства с модулем



Неравенство $|f(x)|<a$ (где $a>0$) равносильно двойному неравенству $-a<f(x)<a$ или системе $\begin{cases}f(x)>-a,\\f(x)<a.\end{cases}$

Пример решения: $|x^2+5x|<6$, $-6<x^2+5x<6$, $\begin{cases}x^2+5x<6,\\x^2+5x>-6;\end{cases}$

$$\begin{cases}x^2+5x-6<0,\\x^2+5x+6>0;\end{cases}\quad \begin{cases}x\in(-6;\,1),\\x\in(-\infty;\,-3)\cup(-2;\,+\infty);\end{cases}$$

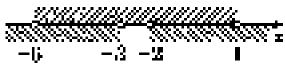


Рис. 57

Тогда (рис. 57) $x\in(-6;\,-3)\cup(-2;\,1)$.

Ответ. $(-6;\,-3)\cup(-2;\,1)$.

Неравенство $|f(x)|>a$, где $a\geq 0$, равносильно объединению неравенств $\left[\begin{array}{l}f(x)<-a,\\f(x)>a.\end{array}\right.$

Пример решения: $|3-x|>2$, $\left[\begin{array}{l}3-x>2,\\3-x<-2;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x<1,\\x>5.\end{array}\right.$ $x\in(-\infty;\,1)\cup(5;\,+\infty)$.

Ответ. $(-\infty;\,1)\cup(5;\,+\infty)$.

Неравенство $|f(x)| > g(x)$ равносильно объединению неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array}\right.$$

Пример решения: $|3x-2| > 2x+1$, $\left[\begin{array}{l}3x-2>2x+1,\\3x-2<-2x-1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x>3,\\5x<1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x>3,\\x<\frac{1}{5};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x>3,\\x<0{,}2.\end{array}\right.$ $x\in(-\infty;\ 0{,}2)\cup(3;\ +\infty)$. *Ответ.* $(-\infty;\ 0{,}2)\cup(3;\ +\infty)$.

Неравенство $|f(x)| < g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)<g(x),\\ f(x)>-g(x).\end{cases}$

Пример решения: $|2x-5| \leq x$, $\begin{cases}2x-5\leq x,\\2x-5\geq -x;\end{cases}$ $\begin{cases}x\leq 5,\\3x\geq 5;\end{cases}$ $\begin{cases}x\leq 5,\\x\geq 1\frac{2}{3}.\end{cases}$

Тогда (рис. 58) $x\in\left[1\frac{2}{3};\ 5\right]$. *Ответ.* $\left[1\frac{2}{3};\ 5\right]$.

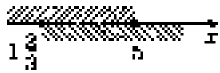


Рис. 58

Неравенство $|f(x)|>|g(x)|$ равносильно неравенству $f^2(x)>g^2(x)$ или неравенству $(f(x)-g(x))(f(x)+g(x))>0$.

Пример решения: $|3+x|\geq|x|$, $(3+x)^2\geq x^2$, $9+6x+x^2\geq x^2$, $6x\geq -9$, $x\geq-\frac{9}{6}$, $x\geq -1{,}5$. *Ответ.* $[-1{,}5;\ +\infty)$.

Если неравенство содержит несколько модулей, то находят значения x, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, равны нулю. Найденные значения x разбивают числовую прямую на интервалы, на каждом из которых выражение под модулем сохраняет знак. А потом на каждом интервале раскрывают модули и решают полученную систему. Объединение найденных решений составляет множество решений данного неравенства.

Пример решения: $|x-1|+|x-2|>x+3$.

Рассмотрим три случая (рис. 59).

Рис. 59

1) $\begin{cases}x<1,\\1-x-x+2>x+3;\end{cases}$ $\begin{cases}x<1,\\x<0;\end{cases}$ $x<0$;

2) $\begin{cases}1\leq x\leq 2,\\x-1-x+2>x+3;\end{cases}$ $\begin{cases}1\leq x\leq 2,\\x<-2;\end{cases}$ решений нет;

3) $\begin{cases}x>2,\\x-1+x-2>x+3;\end{cases}$ $\begin{cases}x>2,\\x>6;\end{cases}$ $x>6$.

Ответ. $(-\infty;\ 0)\cup(6;\ +\infty)$.

Решение рациональных неравенств методом интервалов

Чтобы решить неравенство $f(x)>0$ ($f(x)<0$), где

$$f(x)=\frac{(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_m)}{(x-a_{m+1})(x-a_{m+2})\cdot\ldots\cdot(x-a_n)},$$

надо:

1) изобразить числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на координатной прямой (эти числа, расположенные в порядке возрастания, разобьют координатную прямую на $n+1$ промежутков, на которых функция $f(x)$ сохраняет свой знак, т. е. если a_i и a_k — соседние точки, то для $x\in(a_i; a_k)$ функция сохраняет знак);
2) определить знаки функции $f(x)$ на каждом из промежутков;
3) записать ответ.

Такой метод решения неравенств называется *методом интервалов*.

Пример решения:

$(x+4)(x+2)(x-1)(x-3)<0$. Обозначим на координатной прямой нули функции $(x+4)(x+2)(x-1)(x-3)=0$, найдем знак функции на каждом промежутке.

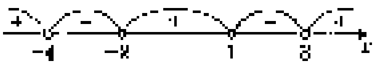
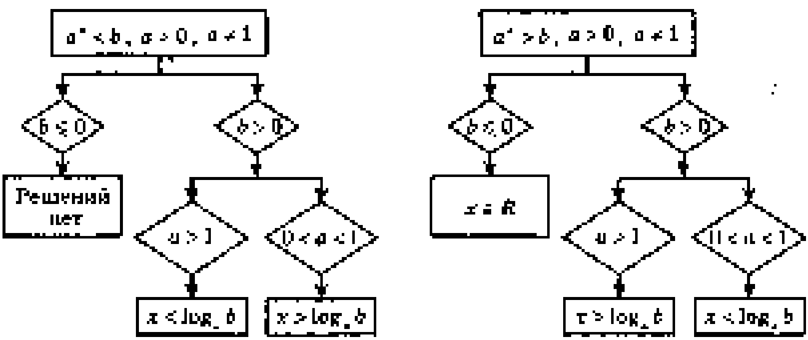


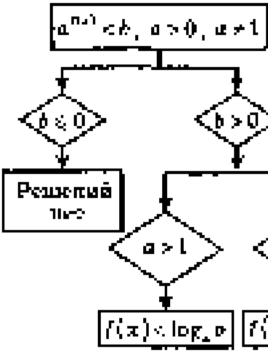
Рис. 60

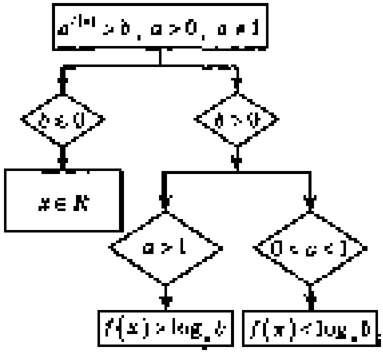
Из рисунка 60 видно, что $(x+4)(x+2)(x-1)(x-3)<0$, если $x\in(-4;-2)\cup(1;3)$. *Ответ:* $(-4;-2)\cup(1;3)$.

Показательные неравенства

Простейшие показательные неравенства







Неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ $\left(a^{f(x)} < a^{g(x)}\right)$, если $a > 1$, равносильно неравенству $f(x) > g(x)$ $\left(f(x) < g(x)\right)$.

Неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ $\left(a^{f(x)} < a^{g(x)}\right)$, если $0 < a < 1$, равносильно неравенству $f(x) < g(x)$ $\left(f(x) > g(x)\right)$.

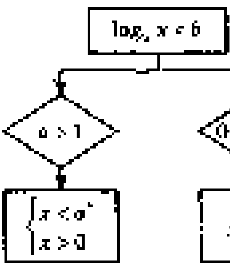
Примеры решений:

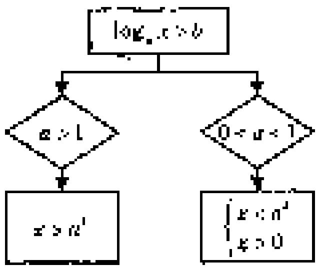
1. $7^{8-x^2} \le 7^{2x}$; $8-x^2 \le 2x$; $-x^2-2x+8 \le 0$; $x^2+2x-8 \ge 0$; $(x+4)(x-2) \ge 0$.
   Отсюда $x \in (-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$. *Ответ.* $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$.

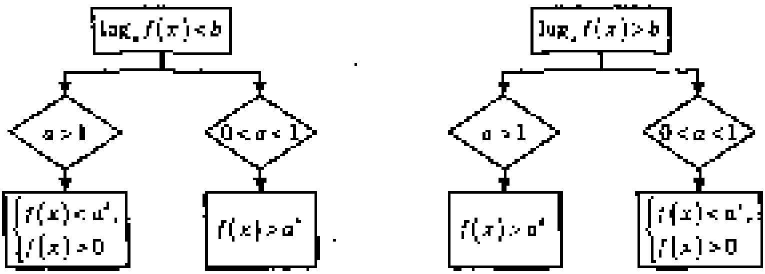
2. $\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^{x^2-2} \ge \left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)^{x}$; $x^2-2 \le x$; $x^2-x-2 \le 0$; $(x-2)(x+1) \le 0$.
   Отсюда $x \in [-1; 2]$. *Ответ.* $[-1; 2]$.

Логарифмические неравенства

Простейшие логарифмические неравенства







Неравенство $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ равносильно

1) системе $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$ если $a > 1$;

2) системе $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0, \end{cases}$ если $0 < a < 1$.

Пример решения:

$\log_6(5x-8) < \log_6(2x+7)$; $\begin{cases} 5x-8 < 2x+7, \\ 5x-8 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x < 15, \\ 5x > 8; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 5, \\ x > 1{,}6. \end{cases}$

Тогда (рис. 61) $x \in (1{,}6;\ 5)$. *Ответ.* $(1{,}6;\ 5)$.

Рис. 61

Неравенство $\log_{h(x)} f(x) < \log_{h(x)} g(x)$ равносильно объединению систем неравенств

$$\begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} h(x) > 0, \\ h(x) < 1, \\ f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Пример решения: $\log_{x+1}(x+3) > 1$, $\log_{x+1}(x+3) > \log_{x+1}(x+1)$.

1) $\begin{cases} x+1 > 1, \\ x+3 > x+1, \\ x+1 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x+1 > 1, \\ 0x > -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0, \\ 0x > -2. \end{cases}$ $x > 0$; $x \in (0;\ +\infty)$.

2) $\begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 < 1, \\ x+3 < x+1, \\ x+3 > 0. \end{cases}$ $\begin{cases} x > -1, \\ x < 0, \\ 0x < -2, \\ x > -3. \end{cases}$ Нет решений, поскольку неравенство $0x < -2$ не имеет решений.

Ответ. $(0;\ +\infty)$.

Метод интервалов (обобщенный)

Используется при решении неравенств $f(x)>0$; $f(x)<0$; $f(x)\geq 0$; $f(x)\leq 0$. Метод основан на том, что непрерывная на промежутке функция может изменять знак только в тех точках, где ее значение равно нулю (но может и не изменить) (рис. 62).

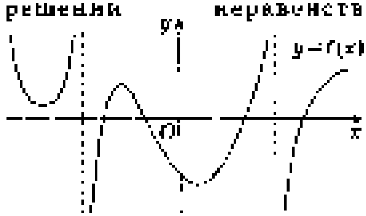


Рис. 62

Решая неравенство *методом интервалов*, надо:

1) найти область определения функции $y=f(x)$;
2) найти значения x, при которых функция равна нулю (найти нули функции): $f(x)=0$;
3) разбить область определения на промежутки, каждый из концов которого является корнем уравнения $f(x)=0$ или конечной точкой промежутка определения функции $y=f(x)$;
4) определить знак $f(x)$ на каждом из образовавшихся промежутков;
5) объединить промежутки, на которых функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству, во множество решений.

Пример решения:

$(3x-6)\log_{0,5} x>0$.

Пусть $y=(3x-6)\log_{0,5} x$. $D(y)=(0;\ +\infty)$. Найдем нули функции:

$(3x-6)\log_{0,5} x=0$; $\left[\begin{array}{l}3x-6=0,\\ \log_{0,5} x=0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=1.\end{array}\right.$

Разобьем область определения функции на промежутки точками 2 и 1 и найдем знаки функции на каждом промежутке.

Рис. 63

Итак (рис. 63), $x\in(1;\ 2)$. *Ответ*: $(1;\ 2)$.

Графический способ решения неравенств с одной переменной

Для графического решения неравенства $f(x) > g(x)$ нужно построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и выбрать те промежутки оси абсцисс, на которых график функции $y = f(x)$ расположен выше графика функции $y = g(x)$.

Пример решения: $\log_3 x \leq 4 - x$.

Построим графики функций $y = \log_3 x$ и $y = 4 - x$ в одной системе координат. Графики пересекаются в точке A с абсциссой $x = 3$. Из рисунка 64 видно, что множеством решений данного неравенства является промежуток $(0; 3]$.

Ответ. $(0; 3]$.

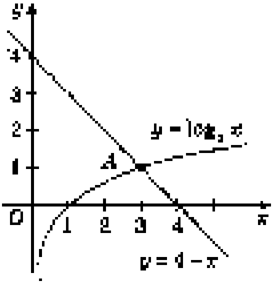


Рис. 64

Тригонометрические неравенства

Решение неравенств $\sin t > a$, $\sin t < a$

Неравенство	Значение		
	$a < -1$	$-1 \leq a < 1$	$a \geq 1$
$\sin t > a$	$t \in R$	$\arcsin a + 2\pi n < t < \pi - \arcsin a + 2\pi n$, $n \in Z$	Решений нет
Неравенство	Значение		
	$a \leq -1$	$-1 < a \leq 1$	$a > 1$
$\sin t < a$	Решений нет	$-\pi - \arcsin a + 2\pi n < t < \arcsin a + 2\pi n$, $n \in Z$	$t \in R$

Решение неравенств $\cos t > b$, $\cos t < b$

Неравенство	Значение		
	$b < -1$	$-1 \leq b < 1$	$b \geq 1$
$\cos t > b$	$t \in R$	$-\arccos b + 2\pi n < t < \arccos b + 2\pi n$, $n \in Z$	Решений нет

Окончание таблицы

Неравенство	Значение		
	$b \le -1$	$-1 < b \le 1$	$b > 1$
$\cos t < b$	Решений нет	$\arccos b + 2\pi n < t < 2\pi - \arccos b + 2\pi n$, $n \in Z$	$t \in R$

Решение неравенств $\mathrm{tg}\, t > a$, $\mathrm{tg}\, t < a$

Неравенство	$a \in R$
$\mathrm{tg}\, t > a$	$\mathrm{arctg}\, a + \pi n < t < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$
$\mathrm{tg}\, t < a$	$-\frac{\pi}{2} + \pi n < t < \mathrm{arctg}\, a + \pi n$, $n \in Z$

Решение неравенств $\mathrm{ctg}\, t > a$, $\mathrm{ctg}\, t < a$

Неравенство	$a \in R$
$\mathrm{ctg}\, t > a$	$\pi n < t < \mathrm{arcctg}\, a + \pi n$, $n \in Z$
$\mathrm{ctg}\, t < a$	$\mathrm{arcctg}\, a + \pi n < t < \pi + \pi n$, $n \in Z$

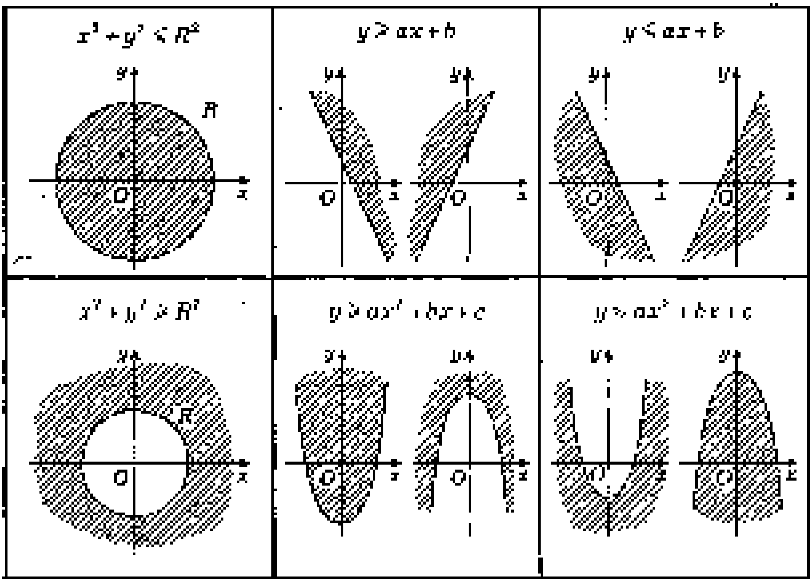
§ 18. Неравенства с двумя переменными

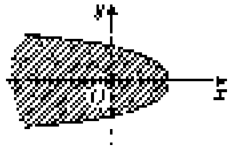
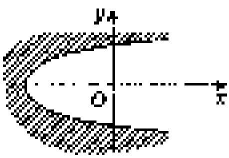
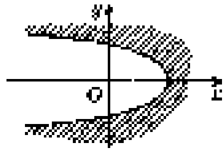
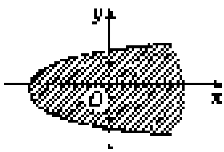
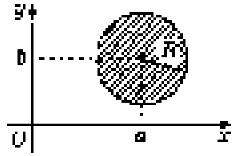
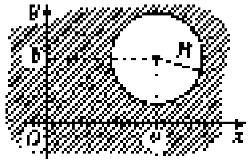
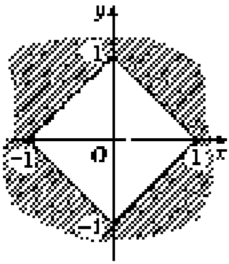
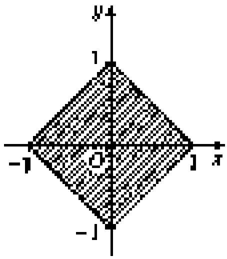
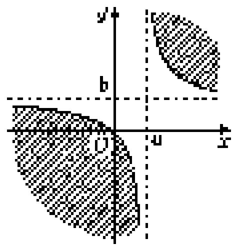
Решение и график неравенства

Решением неравенства $f(x, y) > 0$ $\left(f(x, y) < 0,\ f(x, y) \geq 0,\ f(x, y) \leq 0\right)$ называется упорядоченная пара чисел, которая превращает его в правильное числовое неравенство.

Графиком неравенства с двумя переменными x и y называется множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; y)$, где каждая пара $(x; y)$ является решением данного неравенства.

Графики некоторых неравенств



$x \le ay^2 - by + c$  	$x \ge ay^2 + by - c$  	$(x-a)^2+(y-b)^2 \le R^2$  $(x-a)^2+(y-b)^2 \ge R^2$ 
$\lvert x\rvert+\lvert y\rvert \ge 1$ 	$\lvert x\rvert+\lvert y\rvert \le 1$ 	$(x-a)(y-b) \ge k$, $k > 0$ 

Графический способ решения систем неравенств с двумя переменными

Чтобы построить на координатной плоскости решение системы неравенств, надо:

1) выполнить равносильные преобразования системы так, чтобы удобно было строить графики всех неравенств, которые входят в систему;

2) построить эти графики и найти пересечение областей.

Пересечение областей представляет собой решение системы неравенств.

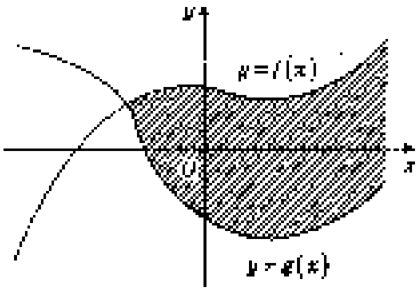


Рис. 65

Система $\begin{cases} y < f(x), \\ y > g(x) \end{cases}$ имеет решение, а именно — множество точек, принадлежащих заштрихованной области (рис. 65).

Пример решения.

Найдем множество решений системы $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4, \\ x+y \ge 0. \end{cases}$

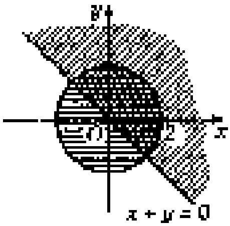


Рис. 66

Множеством решений первого неравенства является круг с радиусом 2 и центром в начале координат. Множеством решений второго неравенства является полуплоскость. Множеством решений системы является пересечение этих множеств, т. е. полукруг (рис. 66).

§ 19. Числовые последовательности

Определение числовой последовательности

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие действительное число a_n, то говорят, что задана *числовая последовательность*:

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots.$$

Итак, числовая последовательность — функция натурального аргумента.

Число a_1 называют *первым членом последовательности*, число a_2 — вторым членом последовательности, число a_3 — третьим и т. д. Число a_n называют n-м членом этой последовательности, а натуральное число n — его **номером**. Из двух соседних членов a_n; a_{n+1} последовательности член a_{n+1} называют *последующим* (по отношению к a_n), а a_n — *предыдущим* (по отношению к a_{n+1}).

Способы задания последовательности

Последовательность часто задают с помощью **формулы** n**-го члена**, т. е. формулы, которая позволяет определять члены последовательности по их номерам.

Например, если последовательность задана формулой n-го члена $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, то первые пять ее членов соответственно равны:

$$a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{2}{3};\ a_3 = \frac{3}{4};\ a_4 = \frac{4}{5};\ a_5 = \frac{5}{6}.$$

Последовательность можно задать *рекуррентной формулой*, т. е. формулой, выражающей любой член последовательности, начиная с некоторого, через предыдущие (один или несколько) члены.

Например, если $a_1 = 1$, а $a_{n+1} = a_n + 5$, то первые пять последовательностей соответственно равны: $a_1 = 1$; $a_2 = a_1 + 5 = 1 + 5 = 6$; $a_3 = a_2 + 5 = 6 + 5 = 11$; $a_4 = a_3 + 5 = 11 + 5 = 16$; $a_5 = a_4 + 5 = 16 + 5 = 21$.

Виды последовательностей

Последовательности бывают *конечные* и *бесконечные*.

Последовательность называется **конечной**, если она имеет конечное количество членов.

Например, последовательность двузначных натуральных чисел: 10; 11; 12; ...; 98; 99 конечная.

Последовательность называется ***возрастающей***, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего.

Например, последовательность 2; 4; 6; 8; ...; 2n; ... возрастающая.

Последовательность называется ***убывающей***, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего.

Например, последовательность $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; ...; \frac{1}{n}; ...$ убывающая.

Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется последовательность $a_1; a_2; a_3; ...$, каждый последующий член которой, начиная со второго, равен предыдущему, прибавленному к одному и тому же числу d, которое называется ***разностью арифметической прогрессии***: $a_{n+1} = a_n + d$, $n \in N$.

В арифметической прогрессии n-й член определяется по формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$, где n — номер члена, a_n — n-й член, a_1 — первый член, d — разность прогрессии.

Например, если $a_1 = 1$, $d = -4$, то $a_{100} = a_1 + 99d = 1 + 99 \cdot (-4) = -395$.

Любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Если все члены некоторой последовательности, начиная со второго, удовлетворяют условию $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, то эта последовательность является арифметической прогрессией.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Сумму первых n членов арифметической прогрессии можно найти и по формуле $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

Например, $1 + 2 + 3 + ... + 100 = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050$; $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = \frac{2 \cdot 1 + 2(n-1)}{2} \cdot n = (1 + n - 1) \cdot n = n^2$.

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность b_1; b_2; b_3; ..., b_n, ..., каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q ($q \neq 0$, $|q| \neq 1$, $b_1 \neq 0$), которое называется ***знаменателем геометрической прогрессии***:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q \text{, где } b_1 \neq 0,\ q \neq 0,\ |q| \neq 1,\ n \in N.$$

В геометрической прогрессии n-й член определяется по формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$, где n — номер члена, b_n — n-й член, b_1 — первый член, q — знаменатель прогрессии.

Например, если $b_1 = 64$, $q = \frac{1}{2}$, то $b_7 = b_1 q^6 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1$.

Модуль каждого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, является средним геометрическим двух соседних с ним членов:

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} \quad \left(\text{или } b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}\right).$$

Если все члены числовой последовательности, начиная со второго, удовлетворяют условию $|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ $\left(\text{или } b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}\right)$, то данная последовательность является геометрической прогрессией.

Сумму п первых членов геометрической прогрессии можно найти по формуле $S_n = b_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$, $q \neq 1$.

Например, $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{16}\right) + \frac{1}{32} + \left(-\frac{1}{64}\right) =$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{64}\right)}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{63}{64} \cdot \frac{2}{3} = \frac{21}{64}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия — это бесконечная геометрическая прогрессия, знаменатель которой q по модулю меньше 1, т. е. $|q| < 1$.

Сумма всех членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии $S = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} + \ldots$ есть конечное число, которое определяется по формуле $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

§ 20. Предел функции

Предел функции $y = f(x)$, если $x \to \infty$

Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если каким бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется такое число $M > 0$, что для всех $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Записывают так: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$. *Например*, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$, если каким бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется такое число $M > 0$, что для всех $x < -M$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Записывают так: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$. *Например*, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если каким бы ни было число $\varepsilon > 0$, найдется такое число $M > 0$, что для всех x таких, что $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Например, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{1 + x^2} = 1$.

Для вычисления пределов функций при $x \to \infty$ используют также теоремы:

1. Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = b$, то $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) + g(x)) = a + b$.
2. Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = b$, то $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) g(x)) = ab$.
3. Если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = b \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$.

Предел функции в точке

Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$, кроме, возможно, самой точки a, то число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 67). Записывается так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$, если $x \to a$.

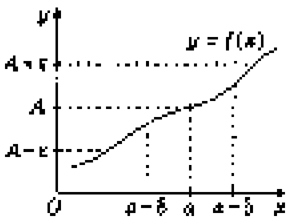


Рис. 67

Другими словами, число A является пределом функции $y=f(x)$ при $x \to a$, если для всех x, достаточно близких к числу a и отличных от него, соответствующие им значения функции $y=f(x)$ как угодно близко стремятся к числу A.

Например, $\lim\limits_{x \to 3}(3x-5)=4$.

Теоремы о пределах функций

1. Функция не может иметь в одной точке два различных предела.
2. Предел постоянной величины равен этой постоянной: $\lim\limits_{x \to a} c = c$.
   Например, $\lim\limits_{x \to a} 5 = 5$
3. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, то

$$\lim_{x \to a}\big(f(x)+g(x)\big)=A+B; \qquad \lim_{x \to a}\big(f(x)g(x)\big)=A \cdot B;$$

$$\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}, \text{ если } B \neq 0; \qquad \lim_{x \to a}\big(f(x)\big)^n = A^n, \ n \in N;$$

$$\lim_{x \to a}\big(cf(x)\big)=cA, \text{ где } c \text{ — постоянная.}$$

Непрерывные функции

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x=a$, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$. Функция $y=f(x)$ в точке $x=a$ будет непрерывной тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) функция $y=f(x)$ определена в точке $x=a$, т. е. существует $f(a)$;
2) существует предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ функции в точке $x=a$;
3) предел функции в точке $x=a$ равен значению функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$.

Другими словами, функция $y=f(x)$ *непрерывна в точке* $x=a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, таких что $|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Если функция $y=f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого промежутка, то ее называют *непрерывной на данном промежутке*.

Теоремы о непрерывности функции

1. Если $f(x)$ и $g(x)$ являются непрерывными в точке $x=a$, то в этой точке будут непрерывными и функции $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$.

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x=a$ и $g(a)\neq 0$, то в точке $x=a$ будет непрерывной также и функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Исходя из теорем 1 и 2, можно утверждать:

1) многочлен $y=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ — непрерывная функция в любой точке $a\in R$;
2) функция $y=\dfrac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}$ непрерывна во всех точках числовой оси, кроме тех точек, в которых знаменатель равен нулю;
3) функции $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=a^x$, $y=\log_a x$, $y=\sqrt[n]{x}$, $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$, $y=|x|$ также непрерывны во всех точках области определения.

Вычисление пределов функции в точке

Если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Например, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x+1}=\dfrac{1^2+1}{1+1}=\dfrac{2}{2}=1$;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos^2 x+\operatorname{tg} x}=\frac{\sin 0}{\cos^2 0+\operatorname{tg} 0}=\frac{0}{1+0}=\frac{0}{1}=0.$$

Если в результате подстановки $x=a$ при нахождении предела получаем выражение типа $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, то надо:

1) попробовать разложить числитель и знаменатель дроби на множители, выполнить сокращение, а потом находить предел;
2) избавиться от иррациональности в знаменателе, находить предел;
3) воспользоваться тем, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Например, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x-10}=$

$=\dfrac{2-3}{2-10}=\dfrac{1}{8}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}=\sqrt{1}=1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin mx}{mx}\cdot\dfrac{mx}{nx}\cdot\dfrac{nx}{\sin nx}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{mx}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{mx}{nx}\times$

$\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin nx}{nx}}=1\cdot\dfrac{m}{n}\cdot 1=\dfrac{m}{n}$.

§ 21. Производная

Приращение аргумента и приращение функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена в точках x_0 и $x_1=x_0+\Delta x$. Разность $x_1-x_0=\Delta x$ называется **приращением аргумента**, а разность $f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ называется **приращением функции** при переходе от значения аргумента x_0 к аргументу $x_1=x_0+\Delta x$ (рис. 68). Приращение функции обозначается Δf или Δy, т. е. $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Например, если $f(x)=x^2$, то $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=$ $=x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$.

Определение производной

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 (обозначают $f'(x_0)$) называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, т. е.

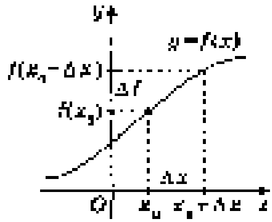


Рис. 68

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

где $\Delta x=x_1-x_0$ — приращение аргумента; x_1 и x_0 — два значения независимой переменной из области определения функции $f(x)$; $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f$ — приращение функции в точке x_0.

Например, если $f(x)=3x^2+2$, то $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3(x_0+\Delta x)^2+2-3x_0^2-2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\left[x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2\right]-3x_0^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6x_0\Delta x+3(\Delta x)^2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}(6x_0+3\Delta x)=6x_0+0=6x_0.$$

Функция, которая имеет производную в точке x_0, называется *дифференцируемой в этой точке.*

Если функция имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то говорят, что она *дифференцируема на этом промежутке*.

Производная функции $f(x)$, дифференцируемой на промежутке, сама является функцией аргумента x.

Для нахождения производной функции $f'(x)$ пользуются правилами и формулами дифференцирования.

Основные правила дифференцирования

1. Производная суммы равна сумме производных: $(u+v)'=u'+v'$.
2. Производная произведения равна сумме произведений производной одной функции на вторую функцию: $(uv)'=u'v+uv'$.
3. Постоянный множитель можно выносить за знак производной: $(Cu)'=Cu'$.
4. Производная частного вычисляется по формуле $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$, при условии, что $v\neq 0$.
5. Производная составной функции равна произведению производной функции по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной $\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$;

т. е. если $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, то $y'_x=f'_u(u)\cdot\varphi'_x(x)$ или $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

Таблица производных

Производные элементарных функций	Производные сложных функций
$C'=0$, $x'=1$; $(kx+b)'=k$;	$(ku+b)'=k\cdot u'$;
$(x^n)'=nx^{n-1}$;	$(u^n)'=nu^{n-1}u'$;
$(e^x)'=e^x$;	$(e^u)'=e^u\cdot u'$;
$(a^x)'=a^x\ln a$;	$(a^u)'=a^u\ln a u'$;
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$;	$(\ln u)'=\frac{1}{u}u'$;
$(\lg x)'=\frac{1}{x}\lg e$; $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$;	$(\lg u)'=\frac{1}{u}\lg e u'$; $(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}$;
$(\sin x)'=\cos x$; $(\cos x)'=-\sin x$;	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$;

Производные элементарных функций	Производные сложных функций
	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;	$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$;
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$;
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;	$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$;
$(x^x)' = x^x(1+\ln x)$;	$(u^u)' = u^u(1+\ln u)u'$.

Геометрический смысл производной

Пусть задана функция $y = f(x)$, которая имеет производную в точке $x = a$. **Проведем касательную** к графику функции $y = f(x)$ через точку $(a; f(a))$, тогда угловой коэффициент или тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox будет равен производной функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, т. е. $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(a)$.

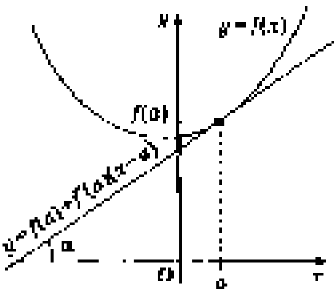


Рис. 69

Геометрический смысл производной: производная функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке: $f'(a) = k = \operatorname{tg}\alpha$ (рис. 69).

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = a$:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Например, уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 4x$ в точке $x = 1$ имеет вид: $y = -3 - 2(x - 1)$ или $y = -1 - 2x$, поскольку $f(a) = 1^2 - 4\cdot 1 = -3$; $f'(x) = 2x - 4$; $f'(a) = f'(1) = 2\cdot 1 - 4 = -2$.

Механический смысл производной

Если точка движется вдоль оси Ox и ее координата изменяется по закону $x = x(t)$, то мгновенная скорость точки

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t),$$

а ускорение

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t).$$

Например, если тело движется по закону

$$x(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^2 + 7t + 12,$$

то его скорость будет изменяться по закону

$$v(t) = (x(t))' = \left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^2 + 7t + 12\right)' = t^3 - t^2 + \frac{1}{6}t + 7,$$

а ускорение точки будет изменяться по закону

$$a(t) = v'(t) = \left(t^3 - t^2 + \frac{1}{6}t + 7\right)' = 3t^2 - 2t + \frac{1}{6}.$$

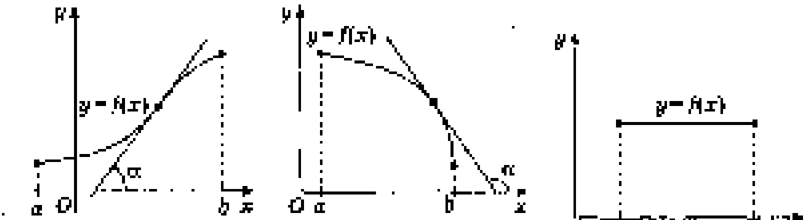
§ 22. Применение производной при исследовании функций и построении графиков

Достаточное условие возрастания (убывания) функции

Достаточное условие возрастания функции. Если в каждой точке интервала $(a; b)$ $f'(x)>0$, то функция $y=f(x)$ возрастает на этом интервале (рис. 70, *а*).

Достаточное условие убывания функции. Если в каждой точке интервала $(a; b)$ $f'(x)<0$, то функция $y=f(x)$ убывает на этом интервале (рис. 70, *б*).

Необходимое и достаточное условие постоянства функции. Функция $f(x)$ постоянна на интервале $(a; b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x)=0$ в каждой точке этого интервала (рис. 70, *в*).



$0°<\alpha<90°$ $90°<\alpha<180°$

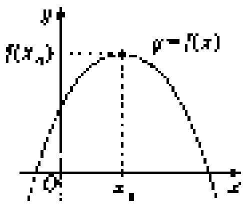
а *б* *в*

Рис. 70

Экстремумы (максимумы и минимумы) функции

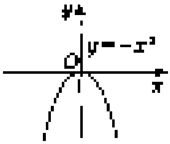
Точка максимума

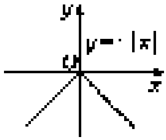
Точка x_0 называется ***точкой максимума*** (*локального максимума*) функции $y = f(x)$, если найдется такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется условие $f(x_0) \geq f(x)$.



x_0 — точка максимума функции $f(x)$; $f(x_0)$ — максимум функции $f(x)$.

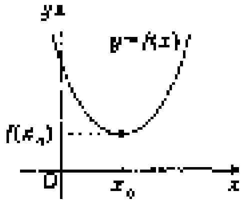
Например, $x = 0$ является точкой максимума для функций $y = -x^2$ и $y = -|x|$.





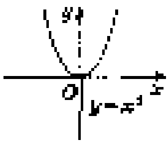
Точка минимума

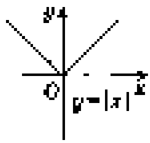
Точка x_0 называется ***точкой минимума*** (*локального минимума*) функции $y = f(x)$, если найдется такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется условие $f(x_0) \leq f(x)$.



x_0 — точка минимума функции $f(x)$; $f(x_0)$ — минимум функции $f(x)$.

Например, $x = 0$ является точкой минимума для функций $y = x^2$ и $y = |x|$.



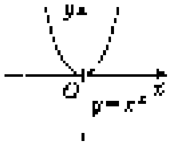


Точки максимума и точки минимума называются ***точками экстремума***; обозначаются так: x_{max}, x_{min}.

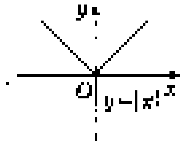
Значения функции в точках минимума и максимума называются ***экстремумами функции***, обозначаются так: y_{min}, y_{max} или f_{min}, f_{max}.

Необходимое условие экстремума (теорема Ферма)

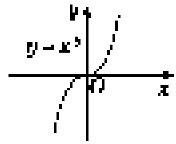
Если x_0 — точка экстремума функции $y = f(x)$, то в этой точке производная равна нулю или не существует (теорема Ферма).



$f'(0)=0$, $x=0$ – точка экстремума



$f'(0)$ – не существует, $x=0$ – точка экстремума



$f'(0)=0$, но $x=0$ не является точкой экстремума

Достаточные условия экстремума

Если функция $y=f(x)$ непрерывная в точке x_0 и производная $f'(x)$ изменяет знак в этой точке, то x_0 — точка экстремума функции $y=f(x)$.

Если в точке x_0 знак $f'(x)$ изменяется с «+» на «−», то x_0 — точка максимума.	Если в точке x_0 знак $f'(x)$ изменяется с «−» на «+», то x_0 — точка минимума.

Схема исследования функции на монотонность и экстремумы

1. Найти область определения и интервалы, на которых функция непрерывна.
2. Найти производную.
3. Найти критические точки, т. е. внутренние точки области определения, в которых производная функции равна нулю или не существует.
4. Обозначить критические точки на области определения, найти знак производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые критические точки разбивают область определения.
5. Определить относительно каждой критической точки, является ли она точкой максимума, минимума или не является точкой экстремума.
6. Записать результат исследования функции: промежутки монотонности и экстремумы.

Пример. Исследовать функцию $y=x^4-4x^3$ на монотонность и экстремумы.

Решение

$D(y)=R$. Функция непрерывна на R.

$y'=(x^4-4x^3)'=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$.

Находим критические точки: $D(y')=R$; $y'=0$, $4x^2(x-3)=0$, $x=0$ или $x=3$.

Наносим критические точки на координатную прямую (рис. 71) и определяем знак производной и характер поведения функции:

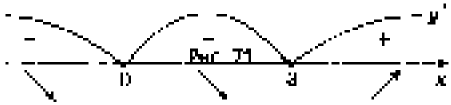


Рис. 71

(Значками ↘ и ↗ соответственно обозначают убывание и возрастание функции.)

Итак, функция убывает на промежутке $(-\infty; 3)$, возрастает на промежутке $(3; +\infty)$; $x=3$ — точка минимума, $y_{min}=3^4-4\cdot 3^3=-27$.

Ответ. Функция убывает на промежутке $(-\infty; 3)$, возрастает на промежутке $(3; +\infty)$; $x_{min}=3$, $y_{min}=-27$.

Схема нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции на промежутке

Для непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $y=f(x)$ ее наибольшее (или наименьшее) значение достигается или в критических точках, или на концах промежутка.

Поэтому, чтобы найти наибольшее или наименьшее значение непрерывной функции на промежутке $[a; b]$, необходимо вычислить значения функции во всех критических точках, принадлежащих промежутку $[a; b]$, и на концах промежутка для $x=a$, $x=b$, а потом среди полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x+e^{-x}$ на отрезке $[-1; 2]$.

Решение

Находим $f'(x)$: $f'(x)=\left(x+e^{-x}\right)'=1-e^{-x}$.

Находим критические точки: $f'(x)=0$; $1-e^{-x}=0$; $e^{-x}=1$; $x=0$.

Находим значение функции в критической точке и на концах отрезка:

$f(0)=0+e^0=1$; $f(-1)=-1+e^1=e-1$; $f(2)=2+e^{-2}=2+\dfrac{1}{e^2}$.

$f_{max}=f(2)=2+\dfrac{1}{e^2}$; $f_{min}=f(0)=1$.

Ответ. $f_{max}=f(2)=2+\dfrac{1}{e^2}$; $f_{min}=f(0)=1$.

Схема исследования функции. Построение графика функции

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить специфические признаки: является ли функция четной или нечетной, периодической.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат.
4. Определить промежутки знакопостоянства.
5. Выяснить промежутки монотонности функции.
6. Найти точки экстремума и значение функции в этих точках.
7. Исследовать поведение функции в окрестности «особых» точек и при больших по модулю x.
8. Построить схематический график функции.

Пример. Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 3x^2$ и постройте ее график.

Решение

$D(f) = R$.

Функция ни четная, ни нечетная.

Находим абсциссы точек пересечения графика с осью Ox:

$x^3 - 3x^2 = 0$; $x^2(x - 3) = 0$; $x = 0$ или $x = 3$.

Находим ординату точки пересечения графика с осью Oy:

$y = f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 = 0$.

Находим производную: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

$D(f') = R$.

Находим критические точки: $3x(x - 2) = 0$; $x = 0$ или $x = 2$

Составляем таблицу:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$
		max		min	

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2) = -\infty$.

Используя результаты исследования, строим график функции $y = x^3 - 3x^2$ (рис. 72).

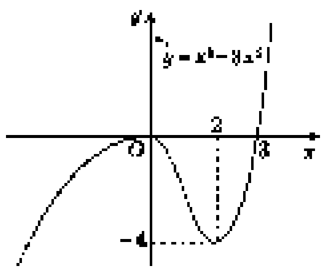


Рис. 72

§ 23. Первообразная, неопределенный интеграл

Первообразная

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x)=f(x)$.

Например, функция $F(x)=x^2$ — первообразная для функции $f(x)=2x$, поскольку $F'(x)=(x^2)'=2x=f(x)$.

Основное свойство первообразной

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на заданном промежутке, то функция $f(x)$ имеет бесконечно много первообразных, и все эти первообразные можно записать в виде $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная.

Например, функции $F(x)=x^2+C$ являются первообразными для функции $f(x)=2x$, поскольку $F'(x)=(x^2+C)'=2x=f(x)$.

Правила вычисления первообразных

1. Первообразная суммы функций равна сумме первообразных функций, т. е. если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а $G(x)$ — первообразная для $g(x)$, то $F(x)+G(x)$ — первообразная функции $f(x)+g(x)$.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак первообразной, т. е. если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ и C — постоянная, то $CF(x)$ — первообразная для $Cf(x)$.
3. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и $k\neq 0$, b — постоянные, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для функции $f(kx+b)$.

Неопределенный интеграл

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется выражение $F(x)+C$, т. е. совокупность всех первообразных данной функции $f(x)$.

Обозначается так: $\int f(x)dx=F(x)+C$, где функция $f(x)$ называется ***подинтегральной функцией***; выражение $f(x)dx$ — ***подинтегральным выражением***, $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$; C — произвольная постоянная.

Основные правила интегрирования

1. $\int [f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.
2. $\int cf(x)dx=c\int f(x)dx$.
3. Если $k\neq 0$ и $k,\ b$ – постоянные, то $\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C$.

Таблица первообразных и таблица неопределенных интегралов

Таблица первообразных

Функция $f(x)$	Первообразные $F(x)+C$
0	C
1	$x+C$
$x^n\ (n\neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$
e^x	e^x+C
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x+C$ или $-\operatorname{arcctg} x+C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+C$ или $-\arccos x+C$

Таблица неопределенных интегралов

$\int 0dx=C$;

$\int dx=x+C$;

$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\neq -1$;

$\int \frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$;

$\int \sin x dx=-\cos x+C$;

$\int \cos x dx=\sin x+C$;

$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C$;

$\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$;

$\int e^x dx=e^x+C$;

$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$;

$\int \frac{dx}{1+x^2}=\begin{cases}\operatorname{arctg} x+C,\\ -\operatorname{arcctg} x+C;\end{cases}$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+C,\\ -\arccos x+C.\end{cases}$

§ 24. Определенный интеграл и его применение

Определенный интеграл

Пусть задана непрерывная функция $y=f(x)$, определенная на промежутке $[a; b]$, тогда *определенным интегралом* от a до b функции $f(x)$ называется приращение первообразной $F(x)$ этой функции, т. е. $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$. Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Основные правила вычисления определенного интеграла

1. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, где C — постоянная.
2. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
4. $\int_a^b f(kx+l)dx = \frac{1}{k}\int_{ka+l}^{kb+l} f(x)dt$.
5. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Геометрический смысл определенного интеграла

Площадь S криволинейной трапеции (фигуры, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке $[a; b]$ функции $f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$, $x=b$) вычисляется по формуле $S=\int_a^b f(x)dx$ (рис. 73).

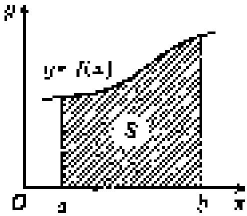


Рис. 73

Физический смысл определенного интеграла

При прямолинейном движении перемещение s численно равно $\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$, где $v(t)$ — скорость движения (рис. 74).

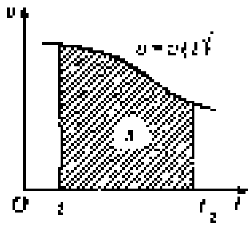


Рис. 74

Площадь фигуры

Если на заданном промежутке $[a;b]$ непрерывные функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ имеют свойство $f(x)\ge g(x)$ для всех $x\in[a;b]$, то $S=\int\limits_a^b(f(x)-g(x))dx$ (рис. 75).

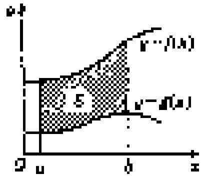


Рис. 75

Пример. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=-x+2$.

Решение.

Изобразим схематично графики данных функций и заштрихуем фигуру, площадь которой необходимо найти (рис. 76). Для нахождения пределов интегрирования решим уравнение: $x^2=-x+2$; $x^2+x-2=0$; $x=-2$ или $x=1$. Тогда

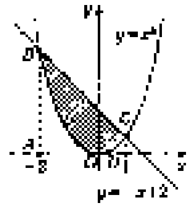


Рис. 76

$$S=\int\limits_{-2}^{1}((-x+2)-x^2)dx=\int\limits_{-2}^{1}(-x^2-x+2)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-2}^{1}=4,5.$$ *Ответ:* 4,5.

Объем тела вращения

Если тело, полученное в результате вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной функции $y=f(x)$ на промежутке $[a;b]$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, то $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$, где V — объем тела вращения.

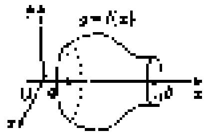


Рис. 77

Пример. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной синусоидой $y=\sin x$ и прямыми $x=0$ и $x=\frac{\pi}{2}$.

Решение

$$V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos2x}{2}dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos2x)dx=$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin\pi\right)-\frac{\pi}{2}\left(0-\frac{1}{2}\sin0\right)=\frac{\pi^2}{4}$$

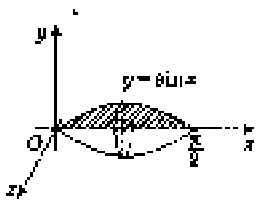


Рис. 78

Ответ. $\frac{\pi^2}{4}$.

§ 25. Элементы комбинаторики и метод математической индукции

Перестановки

Любое упорядоченное множество, состоящее из n элементов, называется *перестановкой* из n элементов.

Число перестановок из n элементов (обозначается P_n) равно произведению всех натуральных чисел от 1 до n, т. е. $n!$ (читается: эн факториал):

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$$

По определению $0! = 1$.

Таблица факториалов чисел от 1 до 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40 320	362 880	3 628 800

Размещение

*Любое упорядоченное подмножество с m элементов данного множества, содержащего n элементов, где $m \leq n$, называется **размещением** из n элементов по m элементов.*

Число размещений из n элементов по m обозначается A_n^m.

Число размещений из n элементов по m равно произведению m последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых n:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-m+1), \text{ или } A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Если $n = m$, то $A_n^n = P_n$.

Комбинации

Любое подмножество из m элементов данного множества, содержащего n элементов, называется ***комбинацией*** из n элементов по m элементов.

Число комбинаций из n элементов по m обозначается C_n^m.

Число комбинаций из n элементов по m $(1 \leq m \leq n)$ равно дроби, числителем которой является произведение m последовательных натуральных чисел, наибольшее из которых n, а знаменателем — произведение m первых последовательных натуральных чисел:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m},$$

или $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $C_n^0 = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^n = 1$.

Свойства числа комбинаций

$C_n^m = C_n^{n-m}$; $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$; $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$

Треугольник Паскаля

Все возможные значения C_n^m $(n = 0, 1, 2, \ldots, m = 0, 1, 2, \ldots)$ можно записать в виде треугольной таблицы. Такая таблица называется треугольником Паскаля.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & C_0^0 & & & & \\ & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\ & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\ & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\ C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Метод математической индукции

Для доказательства утверждения ***методом математической индукции*** надо:

1. Проверить справедливость этого утверждения для $n = 1$.
2. Предположить справедливость этого утверждения для $n = k$, где k — произвольное натуральное число, и с учетом этого предположения установить справедливость для $n = k + 1$.
3. Сформулировать справедливость утверждения для любого натурального n.

Бином Ньютона

Равенство $(x+a)^n = C_n^0 x^n a^0 + C_n^1 x^{n-1} a^1 + \ldots + C_n^m x^{n-m} a^m + \ldots + C_n^n x^0 a^n$ называют ***биномом Ньютона*** или ***формулой Ньютона***. Правая часть равенства называется ***биномиальным разложением*** (в сумму) или разложением бинома, а коэффициенты C_n^0, C_n^1, ..., C_n^n — ***биномиальными коэффициентами***.

Свойства разложения бинома

1. Число всех членов разложения на единицу больше показателя степени бинома, т. е. равно $n+1$.
2. Сумма показателей степеней x и a каждого члена разложения равна показателю степени бинома, т. е. $(n-m)+m=n$.
3. Общий член разложения (обозначается T_{m+1}) имеет вид: $T_{m+1} = C_n^m x^{n-m} a^m$, $m = 0, 1, \ldots, n$.
4. Биномиальные коэффициенты членов разложения, равноотстоящих от концов разложения, равны между собой: $C_n^m = C_n^{n-m}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, n$.
5. Сумма биномиальных коэффициентов всех членов разложения равна 2^n:
   $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$.
6. Сумма биномиальных коэффициентов членов разложения, стоящих на нечетных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, и равна 2^{n-1}:
   $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$.

§ 26. Начала теории вероятностей

Основные понятия

Событие — это явление, о котором можно сказать, что оно происходит или не происходит при определенных условиях.

События обозначают прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, ...

Любое событие происходит вследствие ***испытания*** (эксперимента, опыта). Испытание — это условие, в результате которого происходит (или не происходит) событие.

События разделяют на ***случайные***, ***возможные*** и ***невозможные***.

Случайным называется событие, которое может произойти или не произойти в результате определенного испытания.

Возможным называется событие, которое вследствие данного испытания обязательно произойдет.

Невозможным называется событие, которое вследствие данного испытания не может произойти. Невозможное событие обозначается символом $\varnothing$.

Теория вероятностей — раздел математики, изучающий закономерности случайных событий.

Попарно несовместимые события — это события, каждые два из которых не могут произойти одновременно.

Равновозможные события — события, каждое из которых не имеет никаких преимуществ появиться чаще других при проведении многоразовых испытаний, проводимых в одинаковых условиях.

Полной группой событий называется множество таких событий, когда в результате каждого испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них.

Если события имеют свойства: 1) образуют полную группу событий; 2) несовместны; 3) равновозможны, то такие события образуют множество, которое называется ***пространством элементарных событий***.

Классическое определение вероятности

Отношение числа m элементарных событий, благоприятствующих событию A, к общему количеству n событий пространства называется ***вероятностью случайного события A*** и обозначается $P(A)$, т. е.

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

где m — число событий, благоприятствующих событию A;

n — число событий пространства элементарных событий ($0 \le m \le n$).

Вероятность достоверного события равна 1, вероятность невозможного события равна 0, а вероятность $P(A)$ случайного события A удовлетворяет условию $0 < P(A) < 1$.

Например, вероятность того, что при бросании двух монет выпадет два герба, равна $\frac{1}{4}$, так как пространство элементарных событий: A_1 — выпали два герба, A_2 — выпали герб и число, A_3 — выпали число и герб, A_4 — выпали два числа, а заданному событию благоприятствует только одно событие — A_1.

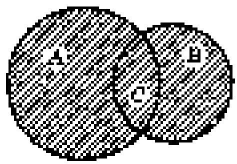
Статистическое определение вероятности

Пусть n — количество всех испытаний в отдельной серии испытаний, а m — количество тех испытаний, в которых происходит событие A.

Статистической вероятностью события A называется предел, к которому стремится относительная частота $\frac{m}{n}$ события A при неограниченном увеличении числа всех испытаний, т. е.

$$P(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}.$$

Операции над событиями

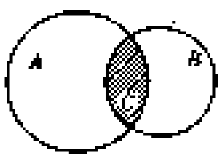


$C = A + B$

Рис. 79

Суммой двух событий A и B (рис. 79) называется событие C, заключающееся в осуществлении во время единичного испытания или события A, или события B, или обоих событий A и B одновременно (обозначается $C = A + B$ или $C = A \cup B$).

Событие $\bar{A}$ называется ***противоположным*** событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда событие A не происходит.



$C = A \cdot B$

Рис. 80

Произведением двух событий A и B (рис. 80) называется событие C, которое заключается в одновременном осуществлении обоих событий A и B во время единичного испытания (обозначается $C = A \cdot B$ или $C = A \cap B$).

Теорема о вероятности суммы событий

Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий. Если $A \cdot B = \varnothing$, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Например, если охотник стреляет по мишени, разделенной на две части, и вероятность попадания в первую часть равна 0,45, а во вторую — 0,35, то вероятность попадания в мишень будет равна $0{,}45 + 0{,}35 = 0{,}8$.

Из теоремы вытекают следствия.

Следствие 1. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$, которые образуют полную группу и попарно несовместны, равна единице: $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k) = 1$.

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Теорема о вероятности произведения событий

Два события называются *независимыми*, если вероятность появления одного из них не зависит от того, произошло второе событие или нет.

Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий, т. е. $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Например, если два охотника одновременно и независимо друг от друга стреляют по мишени, а вероятности попадания в мишень соответственно равны 0,7 и 0,8, то вероятность того, что оба охотника попадут в цель, равна $0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56$.

Если события $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ независимые, то вероятность того, что произойдет по крайней мере одно из них C, может быть выражена через вероятность этих событий формулой $P(C) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n))$.

Независимые испытания. Схема Бернулли

Взаимно независимыми называются такие испытания, в которых вероятность результата каждого из них не зависит от того, какие результаты имеют или будут иметь остальные испытания.

Многие задачи в теории вероятностей сводятся к такой схеме, которая называется схемой Бернулли: происходит n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может наступить или не наступить. Вероятность того, что случайное событие A в каждом испытании происходит одинаково и равно p, а вероятность того, что не происходит, — $q = 1 - p$. Нужно найти вероятность $P_{n,k}$ того, что событие A наступит m раз в этих n испытаниях. Искомую вероятность можно вычислить по *формуле Бернулли:*

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Закон больших чисел

Теорема Бернулли. Если в ряде испытаний вероятность некоторого события остается для каждого испытания постоянной и равна p, то при достаточно большом количестве испытаний практически достоверно, что частота $\frac{m}{n}$ появления события отличается от ее вероятности меньше, чем как угодно малое число $\varepsilon > 0$.

§ 27. Элементы статистики

Понятие о статистике

Статистика — наука, которая собирает, обрабатывает и изучает различные данные, связанные с массовыми явлениями, процессами, событиями.

Математическая статистика — раздел математики, посвящённый математическим методам систематизации, обработки и исследования статистических данных для научных и практических выводов.

Статистическое наблюдение — это спланированный, научно организованный сбор массовых данных о социально-экономических явлениях и процессах.

Наиболее распространено среди разновидностей статистических наблюдений ***выборочное наблюдение***. В процессе выборочного наблюдения изучается лишь часть совокупности, отобранная специальным методом, который называется ***выборкой***. Всю совокупность, из которой делают выборку, называют ***генеральной совокупностью***. Число объектов генеральной совокупности и выборки соответственно называют ***объемом генеральной совокупности*** и ***объемом выборки***.

Центральные тенденции выборки

Выборка характеризуется ***центральными тенденциями***: ***средним значением***, ***модой*** и ***медианой***.

Средним значением выборки называется среднее арифметическое всех ее значений:

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}, \text{ или } \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

($\sum$ — знак суммы — «сигма» большая).

Мода выборки — это ее значение, которое встречается наиболее часто (обозначается M_0).

Медиана выборки — это число, делящее пополам упорядоченную совокупность всех значений выборки, т. е. средняя величина изменяемого признака, который содержится в середине ряда, размещенного в порядке возрастания или убывания признака (обозначается M_e).

Например, если дана выборка 2, 3, 4, 4, 6, 6, 6, 7, 7, 8, то мода выборки $M_0 = 6$, так как число 6 встречается наиболее часто; среднее значение выборки $\bar{x} = \frac{2+3+4+4+6+6+6+7+7+8}{10} = \frac{53}{10} = 5,3$; медиана данной выборки $M_e = 6$, так как выборка имеет четное число значений и ее медиана равна полусумме ее средних значений: $M_e = \frac{6+6}{2} = 6$.

Средние значения

Статистика оперирует такими средними значениями: *среднее арифметическое, среднее квадратичное, среднее геометрическое.*

Отклонением значения x_i *от среднего значения* $\bar{x}$ называется разность $x_i - \bar{x}$.

В статистике пользуются показателем — *средним квадратичным отклонением*, который находят так: все отклонения возводят в квадрат; находят среднее арифметическое этих квадратов; из найденного среднего арифметического извлекают квадратный корень.

Среднее квадратичное отклонение обозначают греческой буквой σ («сигма» малая):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}.$$

В статистике σ^2 называют *дисперсией.*

Пример.

Найдем среднее квадратичное отклонение значений выборки: 5, 8, 10, 12, 17, 20.

Результаты представим в виде таблицы.

Функция	Значение					
	5	8	10	12	17	20
Сумма $\sum_{i=1}^{6} x_i$	72					
Среднее арифметическое $\bar{x}$	$\bar{x} = \frac{72}{6} = 12$					
Отклонение $x_i - \bar{x}$	−7	−4	−2	0	5	8
Квадрат отклонения $(x_i - \bar{x})^2$	49	16	4	0	25	64
Сумма квадратов отклонения $\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2 = 158$					

Квадратичное отклонение σ	$\sigma = \sqrt{\frac{158}{6}} \approx 5{,}13$

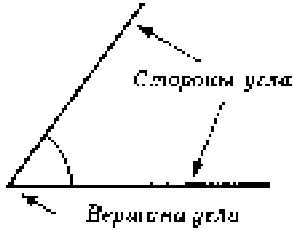
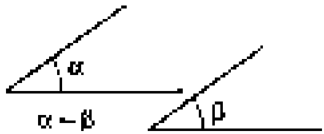
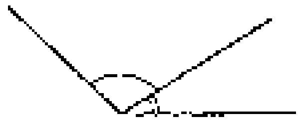
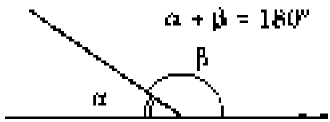
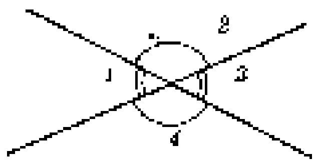
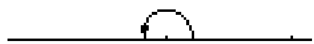
Среднее геометрическое n положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определяется по формуле $m_г = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$.

Например, средним геометрическим чисел 5, 8, 10, 12 является число $\sqrt[4]{5 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} = \sqrt[4]{4800} \approx 8{,}3$.

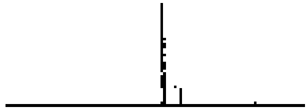
ГЕОМЕТРИЯ

Углы и прямые на плоскости

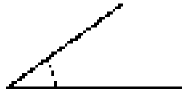
Углы

Угол — геометрическая фигура, состоящая из двух различных лучей, выходящих из одной точки. Лучи называются *сторонами* угла, а их общее начало — *вершиной* угла	
Два угла называются *равными*, если они могут быть совмещены так, что совпадут их соответствующие стороны и вершины	
Углы, имеющие общую вершину и одну общую сторону, называются *прилежащими*	
Два угла называются *смежными*, если у них общие вершина и одна сторона, а две другие образуют прямую. Сумма смежных углов равна 180°	
Углы называются *вертикальными*, если стороны одного являются продолжениями за вершину сторон другого. Вертикальные углы равны между собой	 $\angle 1 = \angle 3$; $\angle 2 = \angle 4$
Угол, у которого стороны образуют прямую, называется *развернутым*	

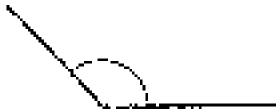
Угол, равный своему смежному, называется *прямым*



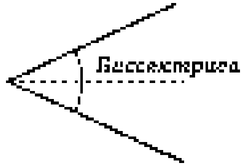
Угол, меньший прямого, называется *острым*



Угол, больший прямого, называется *тупым*



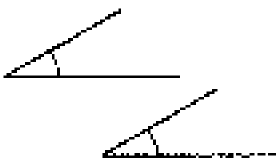
Биссектриса угла — луч, который исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам



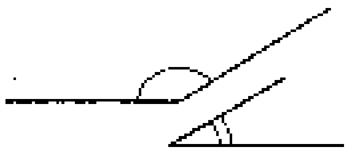
Свойства углов

Углы с соответственно параллельными сторонами

Либо равны

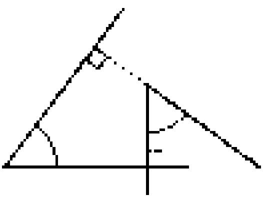


либо их сумма равна 180°

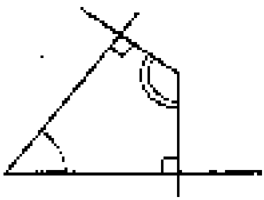


Углы с соответственно перпендикулярными сторонами

Либо равны

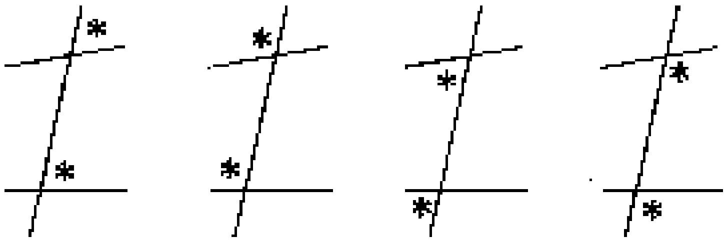


либо их сумма равна 180°

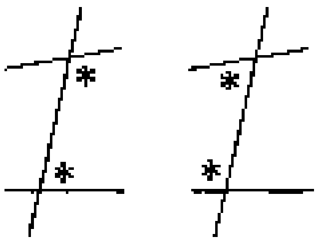


Углы, образованные при пересечении двух прямых секущей

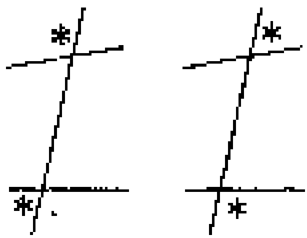
Соответственные



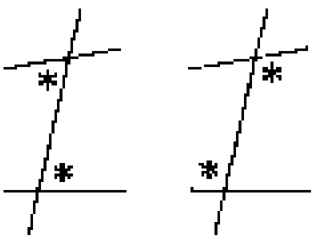
Внутренние односторонние



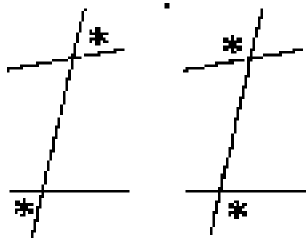
Внешние односторонние



Внутренние накрест лежащие



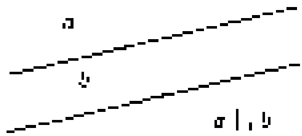
Внешние накрест лежащие



Параллельные и перпендикулярные прямые

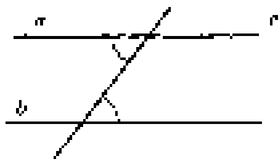
Параллельные прямые

Прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются, называются параллельными

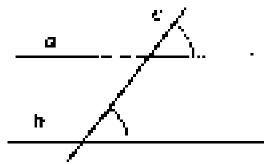


Признаки параллельности прямых

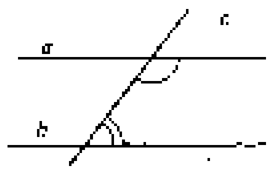
Внутренние (внешние) накрест лежащие углы равны



Соответственные углы равны



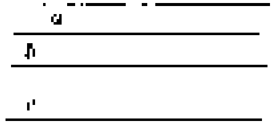
Сумма внутренних (внешних) односторонних углов равна 180°



Свойства параллельных прямых

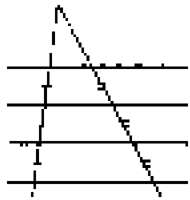
Две прямые, параллельные третьей, параллельны

$a \parallel b, a \parallel c \Rightarrow b \parallel c$



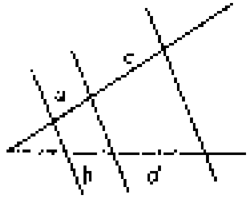
Теорема Фалеса

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне



Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки

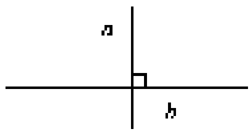
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$



Перпендикулярные прямые

Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом

$a \perp b$

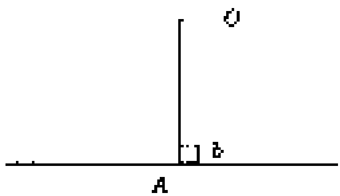


Перпендикуляр и наклонная

Перпендикуляром к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной к данной, от заданной точки до точки пересечения этих прямых

OA — перпендикуляр к b,

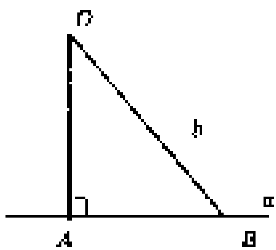
A — основание перпендикуляра



Наклонной к данной прямой a называется отрезок прямой, пересекающей данную под углом, отличным от прямого, от заданной точки до точки пересечения этих прямых.

Перпендикуляр короче наклонной, проведенной из той же точки.

OB — наклонная



Движение

Движение — это преобразование пространства, сохраняющее расстояние между точками.

Примеры движения: параллельный перенос, поворот

Свойства движения

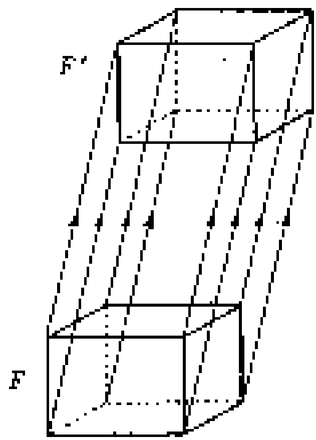
1. Два движения, выполненные последовательно, дают новое движение.
2. Точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.
3. При движении сохраняются углы между полупрямыми

Параллельный перенос

Параллельный перенос — преобразование пространства, при котором все точки смещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.

При параллельном переносе прямая переходит в параллельную прямую (или в себя).

Для любых двух точек M и M' существует один и только один параллельный перенос, при котором точка M переходит в точку M'

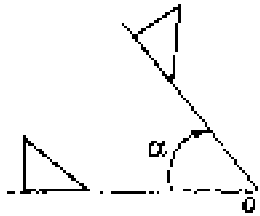


Поворот

Поворот (вращение) — вид движения, при котором по крайней мере одна точка пространства остается неподвижной.

При повороте на плоскости около данной точки (центра поворота) каждый луч, исходящий из данной точки, поворачивается на один и тот же угол в одном и том же направлении.

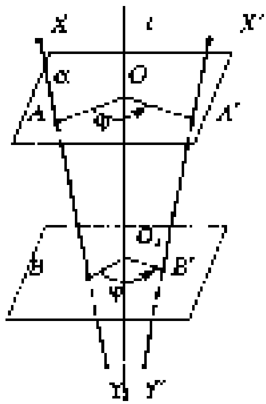
Поворот вокруг точки O на угол 180° называется ***центральной симметрией*** относительно точки O (центра симметрии).



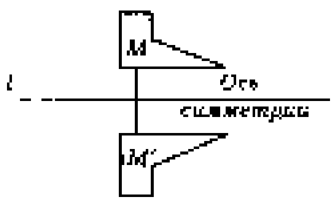
Поворот вокруг оси на угол φ — это преобразование, при котором:

1) имеется единственная прямая l, все точки которой переходят сами в себя (ось вращения);

2) любая точка A, не принадлежащая l, переходит в такую точку A', что точки A и A' лежат в плоскости α, перпендикулярной l и $\angle AOA' = \varphi$ является постоянным по величине и направлению.

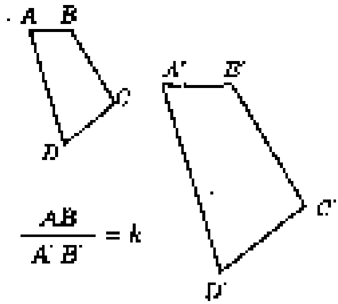


Поворот вокруг оси на угол $\varphi = 180°$ называется ***симметрией относительно прямой***, ось вращения — ***осью симметрии***, а полученная в результате преобразования фигура — ***зеркальным отражением***.



Подобие

Две фигуры F_1 и F_2 называются *подобными*, если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором отношение расстояний между любыми парами соответствующих точек равно одной и той же постоянной k, называемой ***коэффициентом подобия***.



$$\frac{AB}{A'B'} = k$$

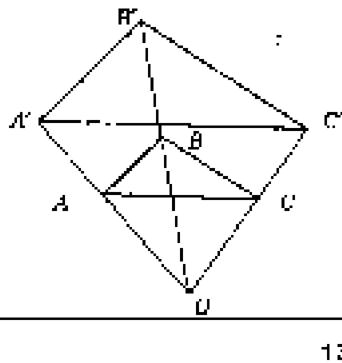
Свойства подобных фигур

1. Углы между соответствующими лучами равны.
2. Площади подобных фигур относятся как квадраты их линейных размеров.
3. Объемы подобных фигур относятся как кубы их линейных размеров.

Преобразование подобия

Всякое преобразование подобия — результат последовательного выполнения гомотетии и движения.

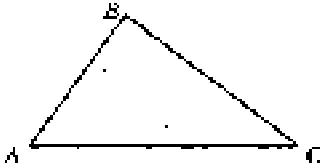
Гомотетия — преобразование пространства, ставящее в соответствие каждой точке M точку M', лежащую на прямой OM по правилу $OM' = k \cdot OM$, где k — постоянное, отличное от нуля число, называемое коэффициентом гомотетии, O — фиксированная точка, называемая центром гомотетии.



Треугольники

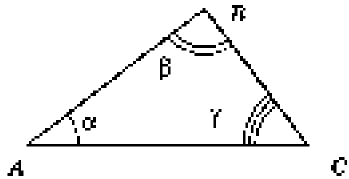
Основные определения

Треугольник — это фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой (вершин треугольника), и трех отрезков с концами в этих точках (сторон треугольника)



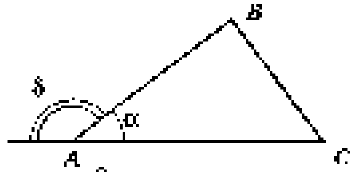
A, B, C — вершины
AB, BC, AC — стороны

Углами (внутренними углами) треугольника называются три угла, каждый из которых образован двумя лучами, исходящими из вершины треугольника и проходящими через две другие вершины



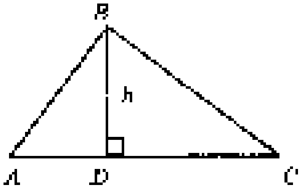
α, β, γ — углы треугольника

Внешним углом треугольника называется угол, смежный внутреннему углу треугольника

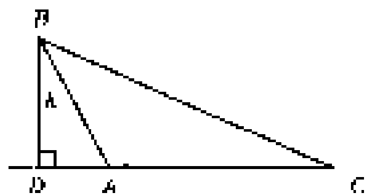


δ — внешний угол

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из какой-либо вершины треугольника на противоположную сторону или на продолжение стороны.

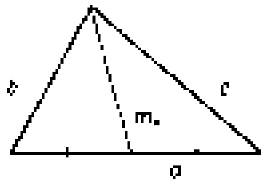


BD = h — высота, проведенная на сторону AC



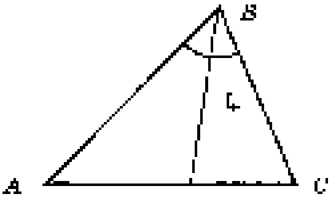
BD = h — высота, проведенная на продолжение стороны AC

Медианой треугольника называется отрезок прямой, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны



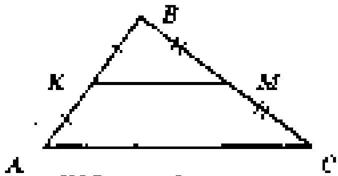
m_a — *медиана стороны a*

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника, соединяющий данную вершину с точкой на противоположной стороне



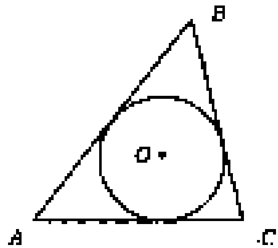
l_b — *биссектриса угла B треугольника*

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника

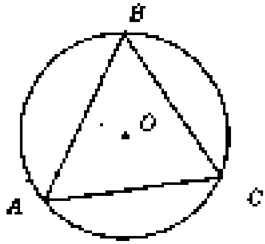


KM — средняя линия

Окружность называется ***вписанной*** в треугольник, если она касается всех его сторон



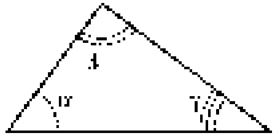
Описанной окружностью треугольника называется окружность, проходящая через вершины треугольника



Свойства углов и сторон треугольника

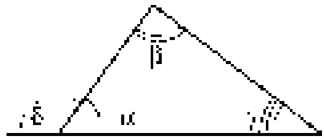
Сумма углов треугольника равна 180°

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$



Внешний угол равен сумме двух внутренних углов, с ним не смежных, и больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.

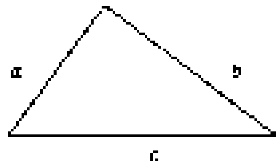
$$\delta = \beta + \gamma;\ \delta > \beta;\ \delta > \gamma$$



Неравенство треугольника

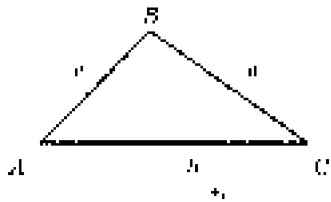
Длина каждой стороны меньше суммы и больше разности длин двух других сторон

$$|a - b| < c < a + b$$



В треугольнике против большей стороны лежит больший угол (и наоборот)

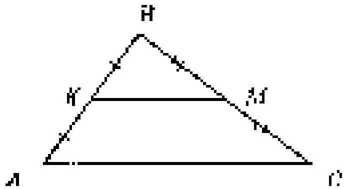
$$\angle B > \angle C \Rightarrow b > c$$



Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна ее половине

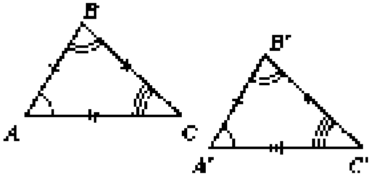
$$KM \parallel AC;$$

$$KM = \frac{AC}{2}$$



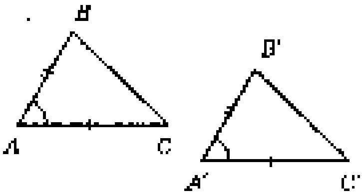
Равенство треугольников

Треугольники называются равными, если у них соответствующие стороны и углы равны
$\Delta ABC = \Delta A'B'C'$

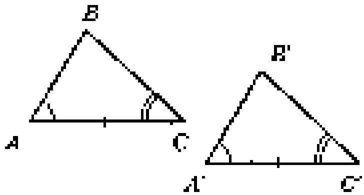


Признаки равенства треугольников

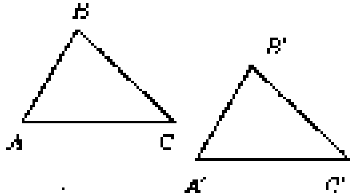
1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны



2. Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны



3. Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны



Свойства равных треугольников

У равных треугольников все соответствующие элементы равны (стороны, углы, высоты, медианы, биссектрисы).

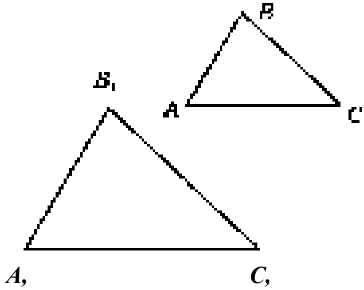
У равных треугольников против равных сторон лежат равные углы, а против равных углов лежат равные стороны

Подобие треугольников

Подобными называются *треугольники,* у которых соответствующие стороны пропорциональны.

Коэффициент пропорциональности называется коэффициентом подобия

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$



$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

Признаки подобия треугольников

Два треугольника подобны, если

1. Два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника.
2. Две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны.
3. Стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника.

Свойства подобных треугольников

У подобных треугольников соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны »,

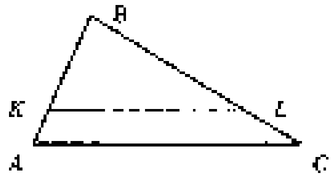
$$\angle A = \angle A_1;\ \angle B = \angle B_1;\ \angle C = \angle C_1,$$

К _ К _А _ ™а _ _ К _ ь
К \ Л, "ч "" к

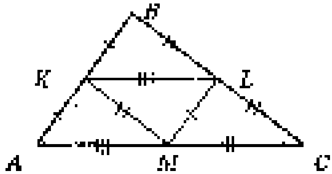
Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, отсекает треугольник, подобный данному
$KL \parallel AC$; $\triangle ABC \sim \triangle KBL$



Три средние линии треугольника делят его на четыре равные треугольника, подобные данному с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$

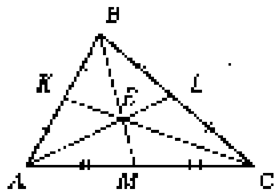


Медианы, биссектриссы, высоты и средние линии треугольника

Свойства медиан треугольника

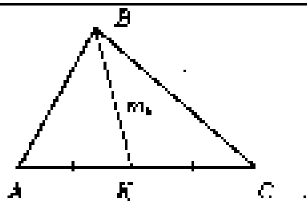
Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит медианы в отношении 2 : 1, считая от вершины.

$BE : EM = 2$



Медианы делит треугольник на равновеликие треугольники

$S_{\triangle ABK} = S_{\triangle KBC}$

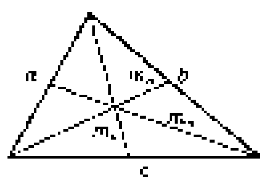


Длина медиан к соответствующим сторонам треугольника:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2};$$

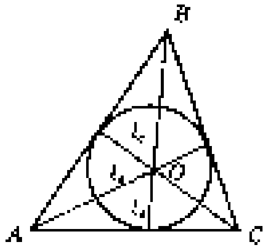
$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2};$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$



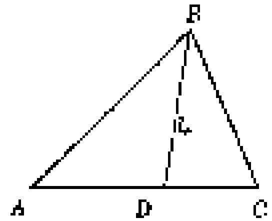
Свойства биссектрис треугольника

Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке, которая находится внутри треугольника, равноудалена от трех его сторон и является центром вписанной окружности



Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную углу сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$



Биссектрисы внутреннего и смежного с ним внешнего углов перпендикулярны.

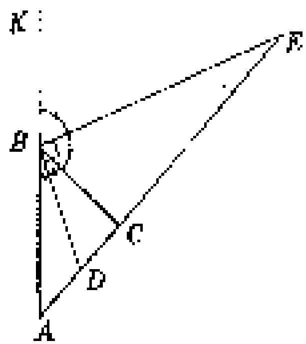
Биссектриса внешнего угла треугольника делит (внешним образом) противоположную сторону на отрезки, пропорциональные двум другим сторонам.

BD — биссектриса угла B;

BE — биссектриса внешнего угла

$$BD \perp BE;$$

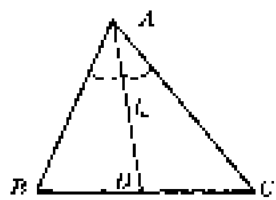
$$\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC}$$



Длина биссектрисы угла A

$$l_a = \frac{2bc \cdot \cos\frac{A}{2}}{b+c};$$

$$l_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc\,(a+b+c)\,(b+c-a)}$$

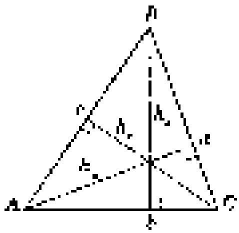


Свойства высот треугольника

Высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром треугольника

Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$



Длина высоты к стороне a

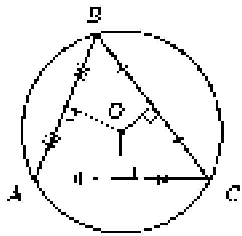
$$h_a = b \sin C = c \sin B = \frac{bc}{2R} = \frac{2S}{a},$$

где R — радиус описанной окружности, S — площадь треугольника

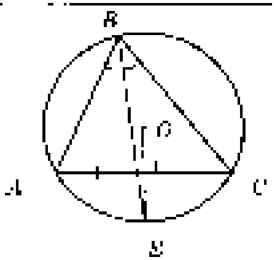
Свойства серединных перпендикуляров

Серединный перпендикуляр — это прямая, проходящая через середину стороны треугольника перпендикулярно к ней

Три серединных перпендикуляра треугольника пересекаются в одной точке, называемой центром описанной окружности



Точка пересечения биссектрисы угла треугольника с серединным перпендикуляром противолежащей стороны лежит на окружности, описанной вокруг данного треугольника



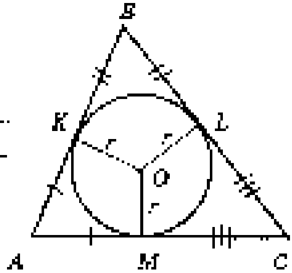
Вписанная и описанная окружности

Радиус вписанной** в треугольник **окружности — расстояние от центра до сторон треугольника

$$r = \frac{S}{p} = 4R\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} =$$

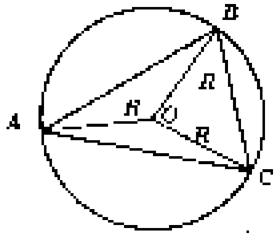
$$= (p-a)\,\mathrm{tg}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Точки касания вписанной окружности сторон треугольника отсекают три пары равных между собой отрезков



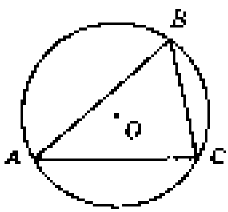
Радиус описанной окружности

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} = \frac{abc}{4S}$$



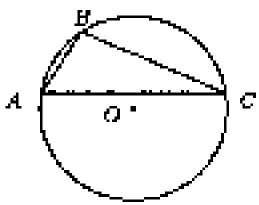
В зависимости от вида треугольника центр описанной окружности может находиться:

внутри треугольника



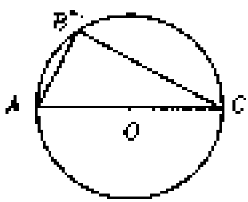
Остроугольный треугольник

вне треугольника



Тупоугольный треугольник

на середине его стороны

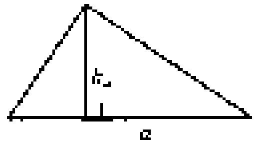


Прямоугольный треугольник

Площадь треугольника

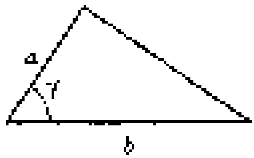
По стороне и высоте, опущенной на эту сторону,

$$S=\frac{1}{2}ah_a$$



По двум сторонам и углу между ними

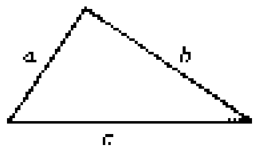
$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$



По трем сторонам (формула Герона)

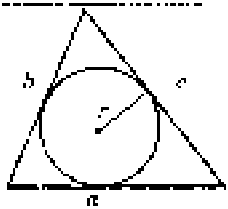
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p=\frac{a+b+c}{2}$



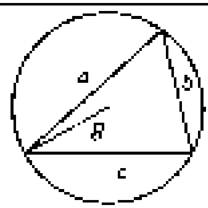
По полупериметру (p) и радиусу вписанной окружности

$$S=p\cdot r$$



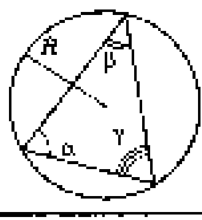
По трем сторонам и радиусу описанной окружности

$$S=\frac{abc}{4R}$$



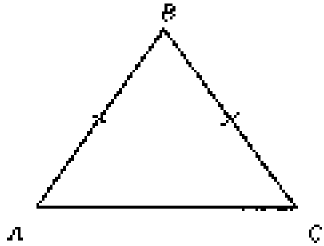
По трем углам и радиусу описанной окружности

$$S=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$



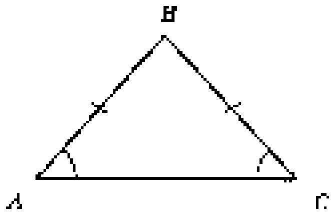
Равнобедренный треугольник

Треугольник называется *равнобедренным*, если у него две стороны равны. Равные стороны называют боковыми сторонами, а третью — основанием равнобедренного треугольника.



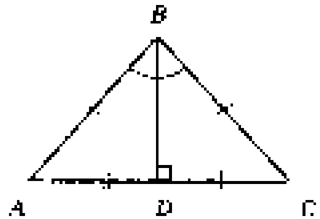
Свойства равнобедренного треугольника

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны
$\angle A = \angle C$

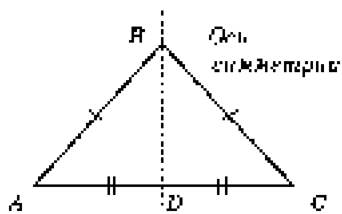


В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

BD — медиана, биссектриса, высота



Равнобедренный треугольник имеет одну ось симметрии

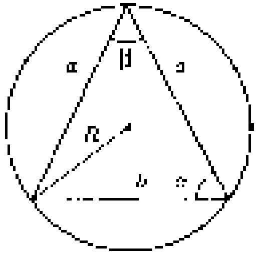


Основные формулы для равнобедренного треугольника

$b^2 = 2a^2(1 - \cos\beta)$; $a = \frac{b}{2\cos\alpha}$;

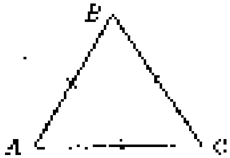
$S = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2} = \frac{a^2}{2}\sin\beta$;

$S = (p - a)\sqrt{p(p - b)}$, где $p = a + \frac{b}{2}$.



Равносторонний треугольник

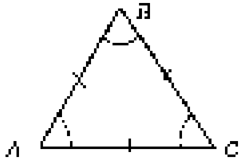
Треугольник, у которого все стороны равны, называется *равносторонним* или *правильным* треугольником



Свойства равностороннего треугольника

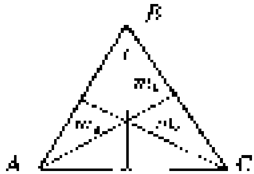
Все углы равны

$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

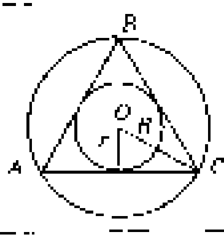


Каждая медиана совпадает с биссектрисой и высотой, проведенными из той же вершины

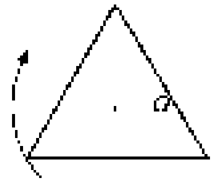
$m_a = l_a = h_a = \ldots = h_c$



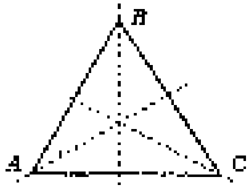
Центры вписанной и описанной окружностей совпадают



Равносторонний треугольник имеет поворотную симметрию (угол поворота — 120°)



Равносторонний треугольник имеет три оси симметрии



Основные соотношения для равностороннего треугольника

Обозначения:

a — сторона, h — высота, P — периметр, p — полупериметр, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, S — площадь

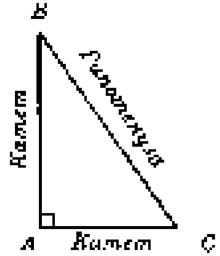
a	$\frac{2h\sqrt{3}}{3}$	$\frac{P}{3}$	$\frac{2p}{3}$	$R\sqrt{3}$	$2r\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3S\sqrt{3}}$
h	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{P\sqrt{3}}{6}$	$\frac{p\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3R}{2}$	$3r$	$\sqrt{S\sqrt{3}}$
P	$3a$	$2h\sqrt{3}$	$2p$	$3R\sqrt{3}$	$6r\sqrt{3}$	$2\sqrt{3S\sqrt{3}}$
p	$\frac{3}{2}a$	$h\sqrt{3}$	$\frac{P}{2}$	$\frac{3R\sqrt{3}}{2}$	$3r\sqrt{3}$	$\sqrt{3S\sqrt{3}}$
R	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2h}{3}$	$\frac{P\sqrt{3}}{9}$	$\frac{2p\sqrt{3}}{9}$	$2r$	$\frac{2}{3}\sqrt{S\sqrt{3}}$
r	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{P\sqrt{3}}{18}$	$\frac{p\sqrt{3}}{9}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{\sqrt{S\sqrt{3}}}{3}$
S	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$\frac{h^2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{P^2\sqrt{3}}{36}$	$\frac{p^2\sqrt{3}}{9}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$	$3r^2\sqrt{3}$

Прямоугольный треугольник

Треугольник называется *прямоугольным*, если у него есть прямой угол.

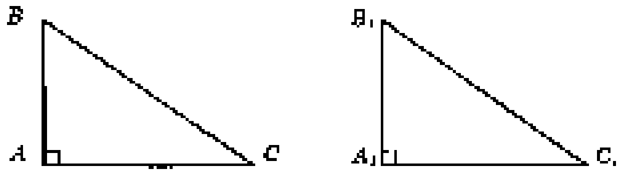
Стороны, прилегающие к прямому углу, называются *катетами*.

Сторона, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*.



Признаки равенства прямоугольных треугольников

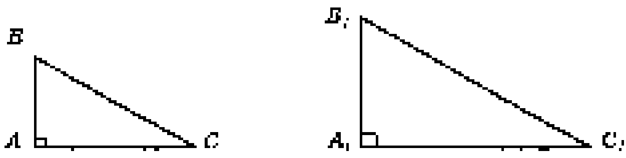
$$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$



По двум катетам
По катету и гипотенузе
По катету и прилежащему острому углу
По катету и противолежащему острому углу
По гипотенузе и острому углу

Признаки подобия прямоугольных треугольников

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

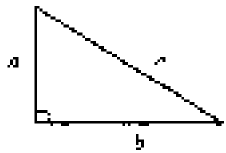


По одному острому углу
По пропорциональности двух катетов
По пропорциональности катета и гипотенузы

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Следствия теоремы Пифагора

В прямоугольном треугольнике любой из катетов меньше гипотенузы.

Если к прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонная, то наклонная больше перпендикуляра.

Равные наклонные имеют равные проекции.

Из двух наклонных больше та, у которой проекция больше.

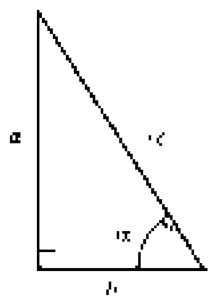
Соотношения между элементами сторон прямоугольного треугольника

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Синусом острого угла называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

Котангенсом острого угла называется отношение прилежащего катета к противолежащему.



$$\cos\alpha = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b};$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$$

Формулы, связывающие тригонометрические функции

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

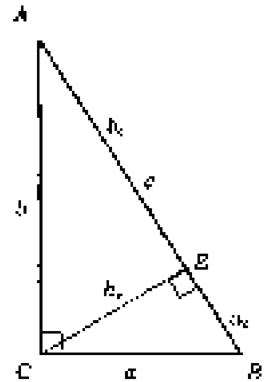
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Свойства катетов, медиан и высот прямоугольного треугольника

Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу

$$a = \sqrt{a_c c}; \quad b = \sqrt{b_c c}.$$



$a_c = EB;$

$b_c = AE;$

$a_c + b_c = c$

Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу

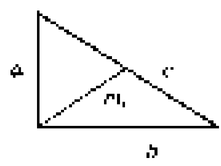
$$h_c = \sqrt{a_c b_c}.$$

Высота может быть определена через катеты и их проекции на гипотенузу

$$h_c = \frac{ab}{a_c + b_c}.$$

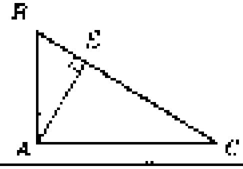
Медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы:

$$m_c = \frac{1}{2}c.$$



Высота, проведенная из вершины прямого угла треугольника, делит его на два треугольника, подобных данному

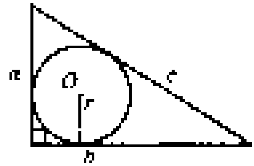
$\triangle ABE \sim \triangle AEC \sim \triangle ABC$



Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник

Радиус вписанной окружности

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{a+b-c}{2}$$

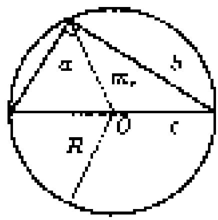


Окружность, описанная вокруг прямоугольного треугольника

Центр описанной окружности совпадает с серединой гипотенузы.

Радиус описанной окружности

$$R = \frac{c}{2} = m_c$$



Площадь прямоугольного треугольника

Площадь можно определить:

— через катеты

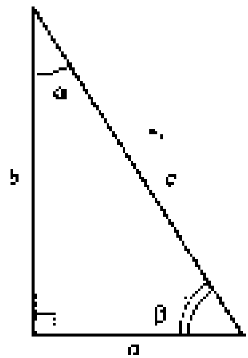
$$S = \frac{1}{2}\,ab;$$

— через катет и острый угол

$$S = \frac{1}{2}\,a^2\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{1}{2}\,a^2\,\mathrm{ctg}\,\alpha;$$

— через гипотенузу и острый угол

$$S = \frac{1}{4}\,c^2\sin 2\alpha = \frac{1}{4}\,c^2\sin 2\beta$$

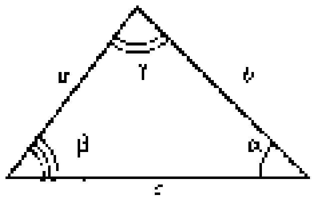


Решение треугольников

Теорема косинусов

Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



Следствия:

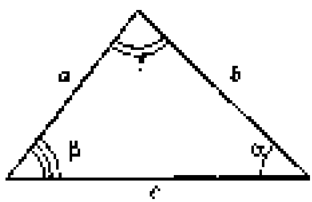
1. Если $c^2 > a^2 + b^2$, то угол γ — тупой ($\cos\gamma < 0$).
2. Если $c^2 < a^2 + b^2$, то угол γ — острый ($\cos\gamma > 0$).
3. Если $c^2 = a^2 + b^2$, то угол γ — прямой.
4. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

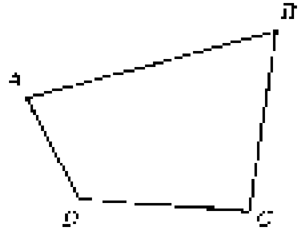
Коэффициент пропорциональности равен диаметру описанной окружности

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



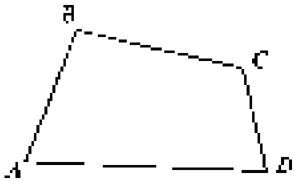
Основные определения и свойства

Четырехугольником называется фигура, которая состоит из четырех точек (вершин) и четырех последовательно соединяющих их отрезков (сторон). При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться



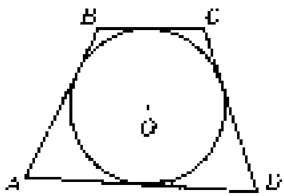
A, B, C, D — вершины;
AB, BC, CD, DA — стороны

Четырехугольник называется *выпуклым*, если он расположен в одной полуплоскости относительно прямой, содержащей любую его сторону

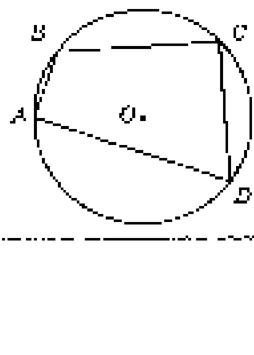


ABCD — выпуклый четырехугольник

Окружность, касающаяся всех сторон четырехугольника, называется вписанной в этот четырехугольник. (Четырехугольник описан около окружности)

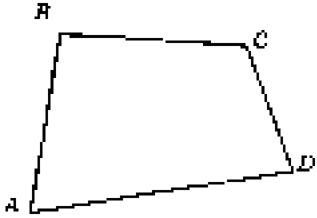


Окружность, содержащая все вершины четырехугольника, называется описанной около этого четырехугольника. (Четырехугольник вписан в окружность)



Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

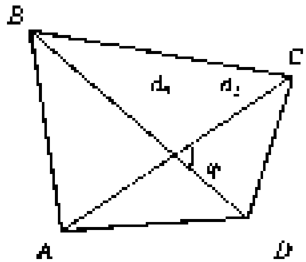


Площадь произвольного выпуклого четырехугольника

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2},$$

где d_1, d_2 — диагонали четырехугольника;

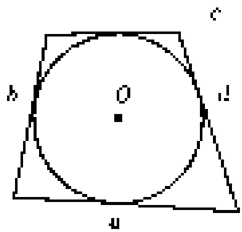
φ — угол между диагоналями



Описанные четырехугольники

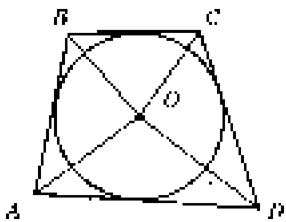
Если в четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность

$a + c = b + d$



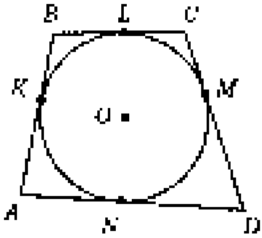
Центр вписанной в четырехугольник окружности является точкой пересечения всех четырех биссектрис углов этого четырехугольника.

BO, CO, DO, AO — биссектрисы углов



Точки касания вписанной окружности отсекают равные отрезки от углов четырехугольника

$BK = BL$; $LC = CM$;
$MD = DN$; $KA = AN$

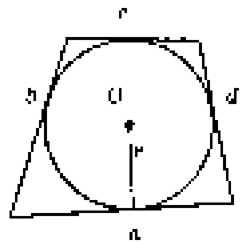


Площадь описанного четырехугольника

$$S = pr,$$

где r — радиус вписанной окружности;

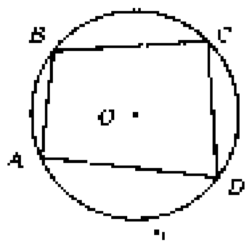
$$p = \frac{a + b + c + d}{2}$$



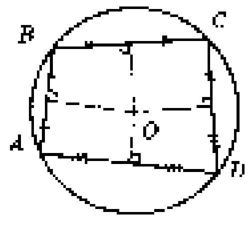
Окружность, описанная вокруг четырехугольника

Если сумма противолежащих углов четырехугольника равна 180°, то вокруг него можно описать окружность.

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

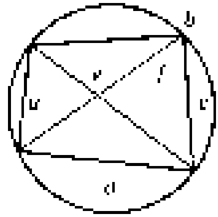


Центр описанной вокруг четырехугольника окружности является точкой пересечения всех четырех серединных перпендикуляров сторон этого четырехугольника



Теорема Птолемея:
сумма произведений противолежащих сторон вписанного в окружность четырехугольника равна произведению его диагоналей

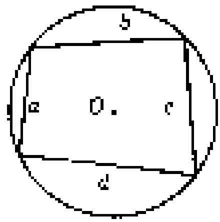
$$ac + bd = ef$$



Площадь вписанного четырехугольника

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

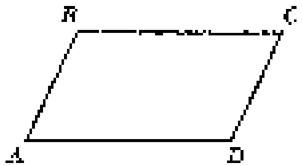
где $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$



Параллелограмм

Четырехугольник, противолежащие стороны которого попарно параллельны, называется *параллелограммом*

$AB \parallel CD; \quad BC \parallel AD$

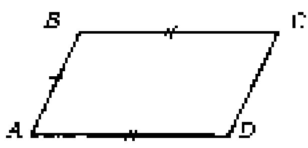


Свойства параллелограмма

Середина диагонали параллелограмма является его центром симметрии

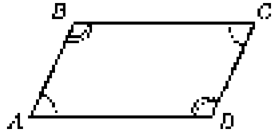
Противолежащие стороны равны

$AB = CD; \quad BC = AD$



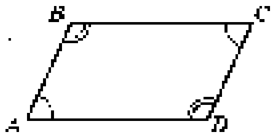
Противолежащие углы равны

$\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$



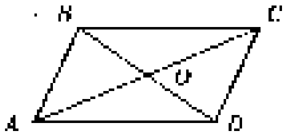
Сумма углов, прилежащих к произвольной стороне, равна 180°

$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C =$
$= \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180°$



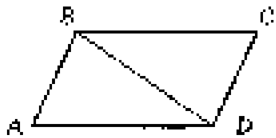
Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам:

$BO = OD$; $AO = OC$



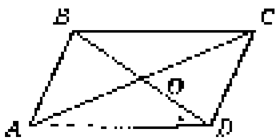
Каждая диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника

$\Delta ABD = \Delta BDC$



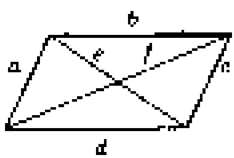
Две диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника

$S_{ABO} = S_{BOC} = S_{COD} = S_{AOD}$.



Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон

$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$



Признаки параллелограмма

Если в четырехугольнике противолежащие стороны попарно равны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

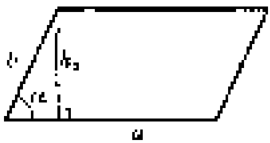
Если в четырехугольнике две противолежащие стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

Четырехугольник, диагонали которого в точке пересечения делятся пополам, — параллелограмм.

Высота параллелограмма

Условимся высотой параллелограмма называть перпендикуляр, проведенный из вершины этого параллелограмма к непротиволежащей стороне

$$h_a = b\sin\alpha$$

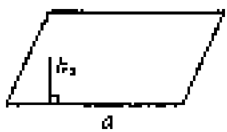


Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма можно определить:

через сторону параллелограмма и проведенную к ней высоту

$$S = ah_a$$

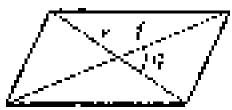


через две стороны параллелограмма и угол между ними

$$S = ab\sin\alpha$$

через диагонали параллелограмма и угол между ними

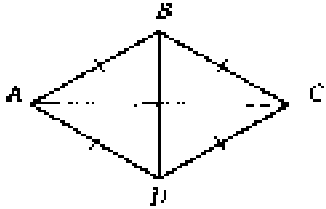
$$S = \frac{ef\sin\varphi}{2}$$



Ромб

Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется *ромбом*

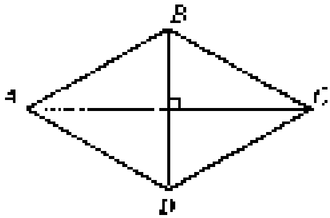
$AB = BC = CD = DA$



Свойства ромба

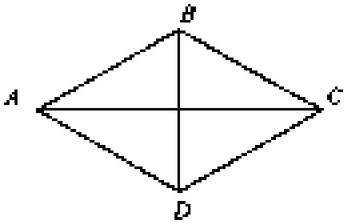
Диагонали ромба пересекаются под прямым углом

$AC \perp BD$

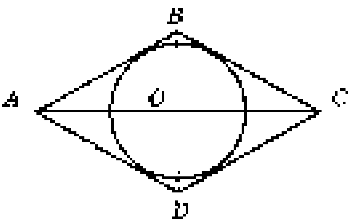


Диагонали ромба являются биссектрисами его углов

$\angle CAB = \angle CAD = \angle BCA = \angle ACD$



В любой ромб можно вписать окружность с центром в точке пересечения его диагоналей

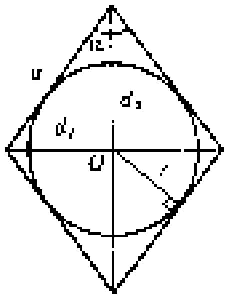


Площадь ромба

Площадь ромба может быть определена:

— через диагонали

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}$$



— через сторону и угол ромба

$$S = a^2 \sin\alpha;$$

— через сторону и высоту

$$S = ah$$

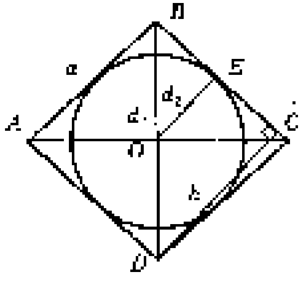
— через сторону и радиус вписанной окружности $S = 2ar$

Окружность, вписанная в ромб

Радиус окружности, вписанной в ромб, можно вычислить:

— через высоту ромба

$$r = \frac{h}{2};$$



— через диагонали ромба и сторону

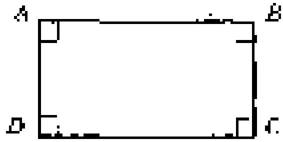
$$r = \frac{d_1 d_2}{4a};$$

— через отрезки, на которые делит сторону ромба точка касания

$$r = \sqrt{BE \cdot EC}$$

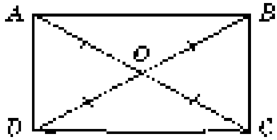
Прямоугольник

Прямоугольник — параллелограмм, у которого все углы прямые.

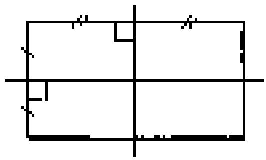


Свойства прямоугольника

Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам.

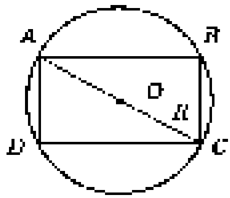


Прямоугольник имеет две оси симметрии, которые совпадают с серединными перпендикулярами к его сторонам.



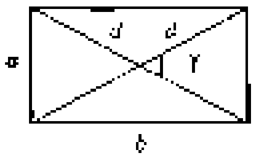
Вокруг любого прямоугольника можно описать окружность с центром в точке пересечения диагоналей и радиусом, равным половине диагонали.

$$AC = 2R$$



Площадь прямоугольника можно определить:

— через его стороны
$$S = ab;$$



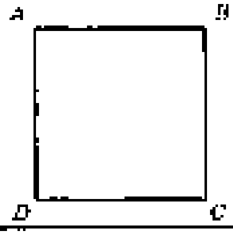
— через диагонали и угол между ними

$$S = \frac{d^2 \sin\gamma}{2}$$

Квадрат

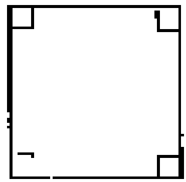
Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны

$AB = BC = CD = AD$

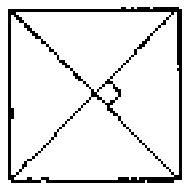


Свойства квадрата

У квадрата все углы прямые

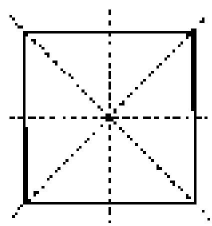


Диагонали квадрата равны и пересекаются под прямым углом

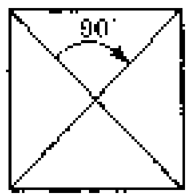


Квадрат имеет четыре оси симметрии — прямые, проходящие:

- через его диагонали;
- через середины противоположных сторон



Квадрат имеет поворотную симметрию. Центр симметрии — точка пересечения диагоналей, угол поворота 90°



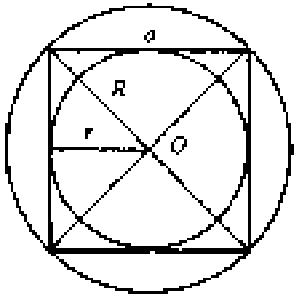
В квадрате центры вписанной и описанной окружностей совпадают и находятся в точке пересечения его диагоналей.

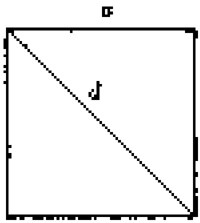
Радиус описанной окружности

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Радиус вписанной окружности

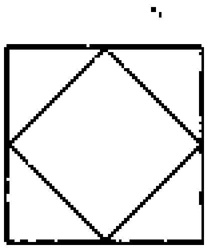
$$r = \frac{a}{2}$$





Площадь квадрата

$$S = a^2 = \frac{d^2}{2}$$



Последовательно соединенные отрезками середины соседних сторон квадрата образуют квадрат

Трапеция

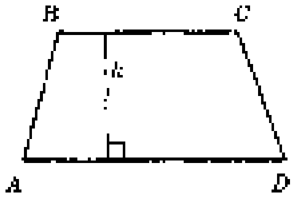
Основные определения

Трапеция — это четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Параллельные стороны называются основаниями трапеции.

Непараллельные стороны называются боковыми сторонами.

Условимся высотой трапеции называть перпендикуляр, опущенный из произвольной точки основания трапеции на другое основание

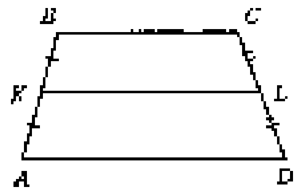


BC, AD — основания;
AB, CD — боковые стороны;
h — высота

Средняя линия трапеции — это отрезок, соединяющий середины боковых сторон

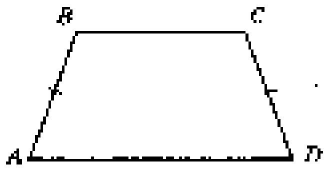
$AK = KB$; $CL = LD$;

KL — средняя линия трапеции

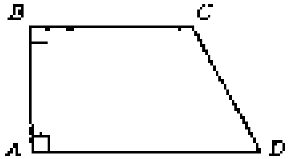


Равнобокая (равнобедренная) трапеция — трапеция, у которой боковые стороны равны

$AB = CD$



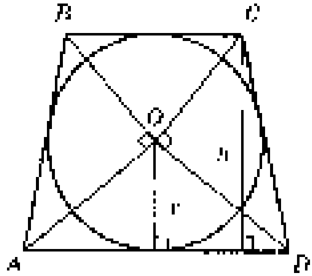
Прямоугольной называется трапеция, у которой одна боковая сторона перпендикулярна основаниям



Свойство трапеции

Окружность можно вписать в трапецию, если сумма ее боковых сторон равна сумме оснований

$$AB + CD = BC + AD$$



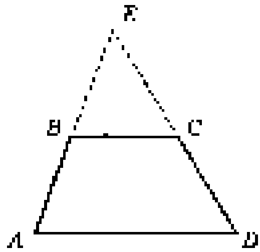
Центр вписанной в трапецию окружности — точка пересечения биссектрис внутренних углов

Радиус вписанной окружности равен половине высоты

$$r = \frac{h}{2}$$

При продолжении боковых сторон трапеции образуются два подобных треугольника

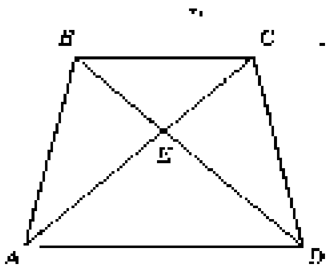
$$\triangle BEC \sim \triangle AED$$



Треугольники, образованные основаниями и отрезками диагоналей, — подобны. Коэффициент подобия равен отношению оснований

$$\triangle BEC \sim \triangle DEA;$$

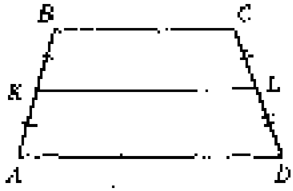
$$k = \frac{BC}{AD}$$



Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме

$$KL \parallel BC;\ KL \parallel AD;$$

$$KL = \frac{BC + AD}{2}$$



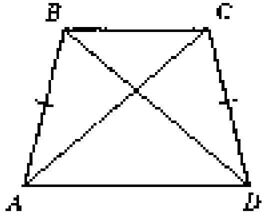
В равнобокой трапеции:

— углы при основании равны,

$$\angle A = \angle D; \quad \angle B = \angle C;$$

— диагонали равны

$$BD = CA$$



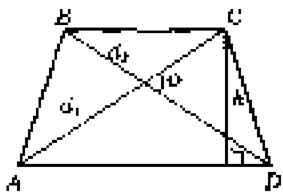
Площадь трапеции можно определить:

— через полусумму оснований (среднюю линию трапеции) и высоту

$$S = \frac{a + b}{2} h;$$

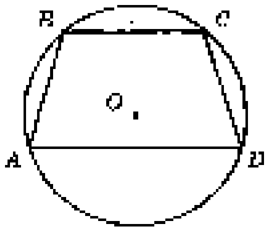
— через диагонали и угол между ними

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$



Вокруг любой равнобокой трапеции можно описать окружность

Если трапеция вписана в окружность, то она равнобокая

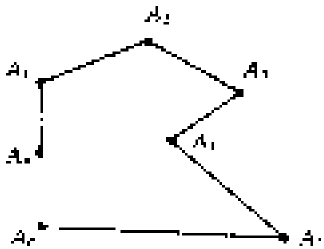


Многоугольники

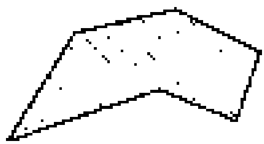
Основные определения

Многоугольник — замкнутая ломаная линия, которая получается, если взять n любых точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и соединить прямолинейным отрезком каждую из них с последующей, а последнюю — с первой.

Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются вершинами многоугольника, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ — его сторонами.

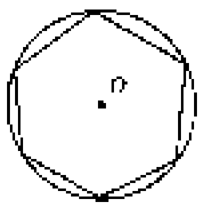


Плоским многоугольником или многоугольной областью называется конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником.



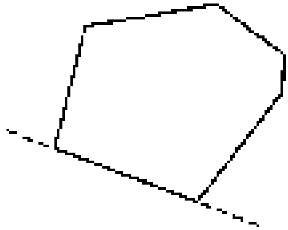
Окружность, касающаяся всех сторон многоугольника, называется вписанной в этот многоугольник.

Окружность, содержащая все вершины многоугольника, называется описанной около этого многоугольника.



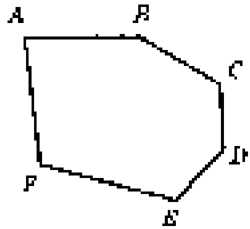
Выпуклые многоугольники

Многоугольник называется выпуклым, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону



Углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, образованный его сторонами, сходящимися в этой вершине.

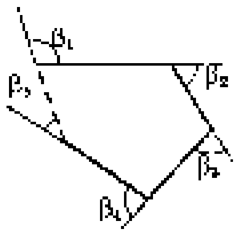
Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180° (n - 2)$



$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = 4 \cdot 180°$

Внешним углом выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, смежный внутреннему углу многоугольника при данной вершине.

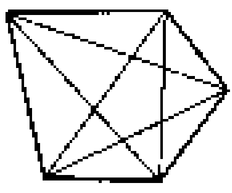
Сумма внешних углов любого выпуклого n-угольника равна $360°$



$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = 360°$

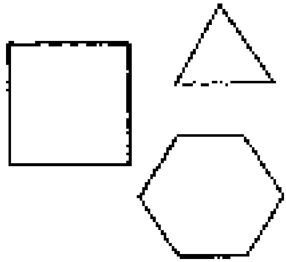
Количество диагоналей выпуклого n-угольника равно

$$\frac{n(n-3)}{2}$$



Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник называется правильным, если все его стороны равны и все его внутренние углы равны.



Внутренний угол правильного n–угольника равен

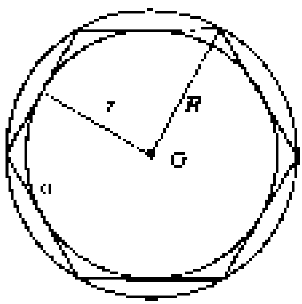
$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$$

Центры вписанной в правильный многоугольник окружности и окружности, описанной около него, совпадают.

Радиусы описанной и вписанной окружностей:

$$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}};$$

$$r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}}$$



Площадь правильного n–угольника можно определить:

— через сторону многоугольника $S = \frac{na^2}{4}\,\mathrm{ctg}\,\frac{180^\circ}{n}$;

— через радиус описанной окружности:

$$S = \frac{nR^2}{2}\sin\frac{360^\circ}{n};$$

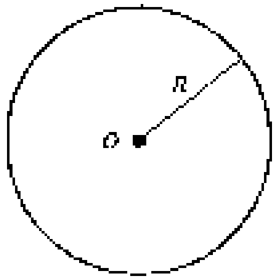
— через радиус вписанной окружности $S = nr^2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}$

Окружность

Основные определения

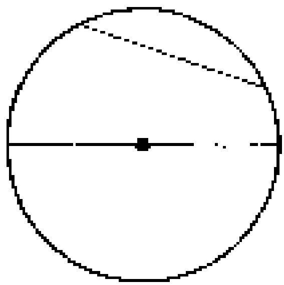
Окружностью называется замкнутая плоская кривая, все точки которой одинаково удалены от данной точки (центра окружности), лежащей в той же плоскости, что и кривая.

Отрезок R, соединяющий центр окружности с какой—либо ее точкой (а также длина этого отрезка), называется *радиусом*



Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*. Хорда, проходящая через центр окружности, называется диаметром.

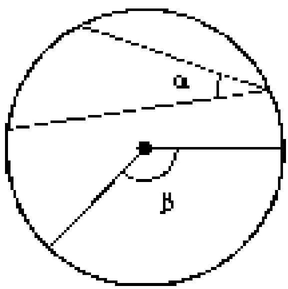
Диаметр — наибольшая из хорд



Дуга — часть окружности, расположенная между двумя ее точками.

Вписанным углом называется угол, образованный двумя хордами, имеющими общий конец.

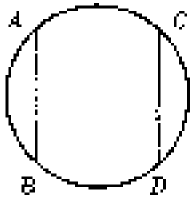
Центральным углом называется угол, образованный двумя радиусами



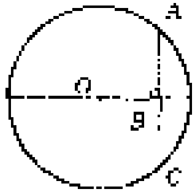
Свойства хорд, касательных и секущих

Равные хорды стягивают равные дуги

$AB = CD \Rightarrow \cup AB = \cup CD$

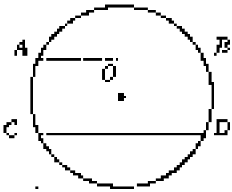


Диаметр, который проходит через середину хорды, перпендикулярен к ней



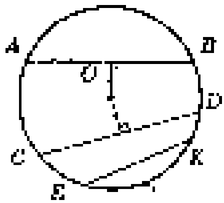
Параллельные хорды отсекают на окружности равные дуги

$AB \parallel CD \Rightarrow \cup AC = \cup BD$



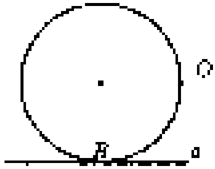
Хорды, равноудаленные от центра окружности, равны.

Большая из двух хорд находится ближе к центру окружности



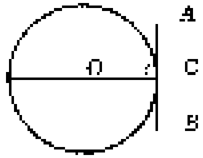
Касательная к окружности

Прямая, лежащая в одной плоскости с окружностью и имеющая с ней только одну общую точку, называется *касательной* к этой окружности

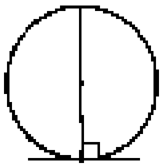


Свойства касательной к окружности

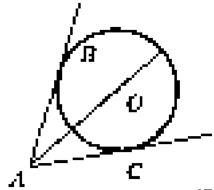
Прямая, перпендикулярная диаметру окружности и проходящая через его конец, является касательной к этой окружности



Касательная к окружности перпендикулярна диаметру, проходящему через точку касания

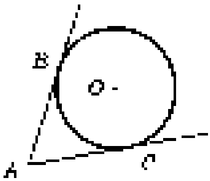


Углы, образованные касательными, проведенными из одной точки, и прямой, проходящей через центр окружности и эту точку, равны: $\angle BAO = \angle OAC$



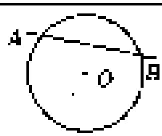
Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны:

$$AB = AC$$



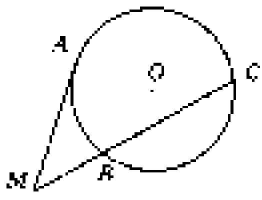
Секущая окружности и ее свойства

Прямая, пересекающая окружность в двух различных точках, называется секущей



Если из точки M вне окружности проведена секущая к ней, то произведение расстояний от точки M до точек пересечения с окружностью равно квадрату длины отрезка касательной из точки M к окружности.

$$MB \cdot BC = MA^2$$



Касание двух окружностей

Углы в окружности

Угловая величина дуги

Угловой величиной дуги называется величина соответствующего ей центрального угла.

Угловая величина дуги обладает следующими свойствами.

1. Угловая величина дуги неотрицательна.
2. Равные дуги имеют одинаковую угловую величину.
3. Если две дуги одной окружности (или двух равных окружностей) имеют одинаковую угловую величину, то они равны.

Круговое (радианное) измерение углов

Радиан — угол, соответствующий дуге, длина которой равна ее радиусу; содержит приблизительно 57°17'44,8".

Радиан принимается за единицу измерения углов при так называемом круговом, или радианном, измерении углов.

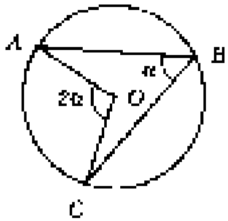
Если круговая мера угла равна α, то угол содержит $\frac{180}{\pi}\alpha$ градусов; обратно: угол в $n°$ имеет круговую меру $\frac{\pi n}{180}$.

Например, углам в 30°, 45°, 60°, 90°, 180° соответствуют углы, содержащие $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, π радиан.

Вписанные углы

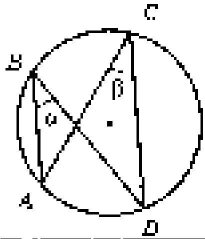
Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, и равен половине центрального угла, заключающего ту же дугу:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$$



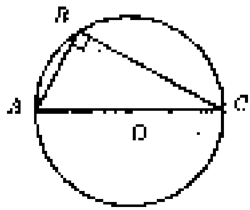
Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны

$$\angle\alpha = \angle\beta$$



Вписанный угол, опирающийся на диаметр (полуокружность), — прямой

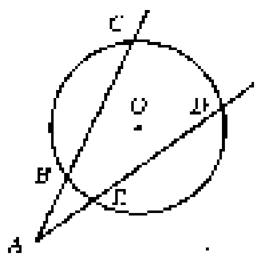
$$\angle ABC = 90^\circ$$



Угол, образованный двумя секущими

Угол, образованный двумя секущими, измеряется полуразностью дуг, заключенных между двумя его сторонами.

$$\angle BAE = \frac{1}{2}(\cup CD - \cup BE)$$



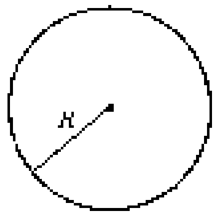
Длина окружности и дуги

Длиной окружности называется общий предел периметров вписанных и описанных правильных многоугольников при неограниченном удвоении числа их сторон.

Отношение длины окружности к ее диаметру одинаково для всех окружностей и обозначается π.

$$\pi = 3{,}14159...$$

Длина окружности радиуса R равна $2\pi R$



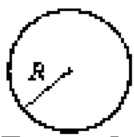
$$l = 2\pi R$$

Длина дуги окружности равна радиусу окружности, умноженному на радианную меру дуги

$$l = \alpha \cdot R$$

Площадь круга и его частей

Площадь круга $S = \pi R^2$

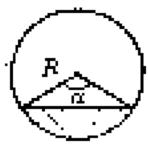


Площадь сектора $S = \dfrac{1}{2}\alpha R^2$

(α — угол в радианах)

Площадь сегмента

$$S = \frac{1}{2}(\alpha - \sin\alpha)R^2$$

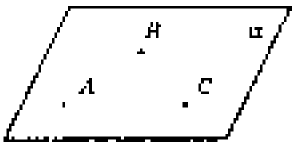


Прямые и плоскости в пространстве

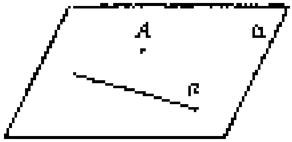
Способы задания плоскости

Плоскость в пространстве однозначно определяется:

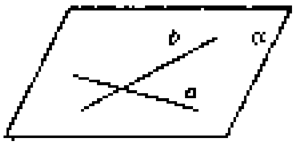
тремя точками, не лежащими на одной прямой



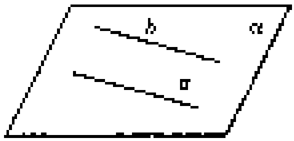
прямой и точкой, не лежащей на прямой



двумя пересекающимися прямыми



двумя параллельными прямыми

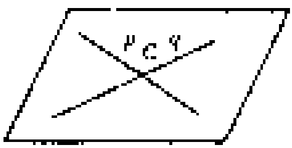


Параллельность прямых и плоскостей

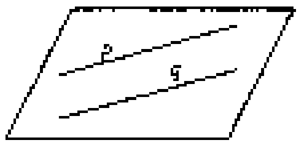
Взаимное расположение прямых в пространстве

Две прямые в пространстве пересекаются, если они имеют лишь одну общую точку

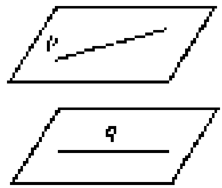
$p \cap q = C$



Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек



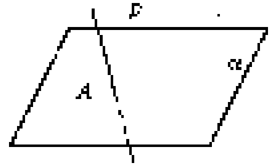
Две прямые в пространстве называются **скрещивающимися**, если не существует плоскости, содержащей эти прямые



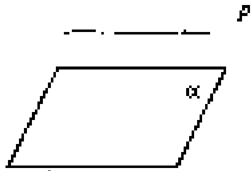
Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Прямая и плоскость пересекаются, если они имеют одну общую точку: $p \cap \alpha = A$

(A называется **следом** прямой p на плоскости α)



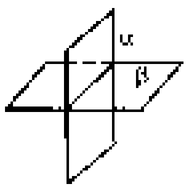
Прямая называется параллельной плоскости, если она лежит в этой плоскости или не имеет с ней общих точек



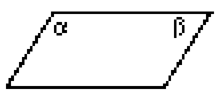
Взаимное расположение плоскостей в пространстве

Две плоскости в пространстве могут:

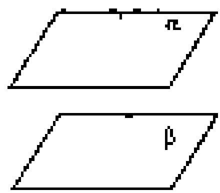
пересекаться



совпадать



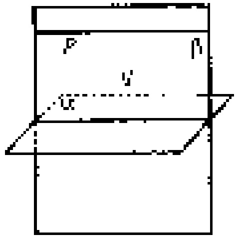
не иметь общих точек



Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек или совпадают

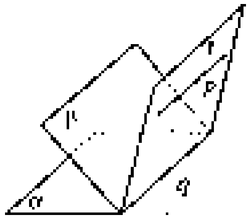
Признаки параллельности прямых и плоскостей в пространстве

Для того чтобы прямая p была параллельна плоскости α, достаточно, чтобы эта прямая была параллельна хотя бы одной прямой q, лежащей в плоскости α



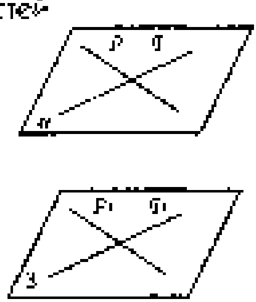
Если прямая p параллельна плоскости α, то она параллельна линии пересечения α с любой плоскостью β, проходящей через p

Прямая p, параллельная каждой из двух пересекающихся плоскостей α и β, параллельна их линии пересечения q



Признак параллельности двух плоскостей

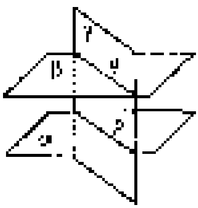
Если две пересекающиеся прямые, лежащие в плоскости α, соответственно параллельны двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости β, то эти плоскости параллельны



Свойства параллельных прямых в пространстве

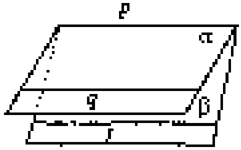
Прямые, полученные при пересечении двух параллельных плоскостей третьей, параллельны между собой

$\alpha \parallel \beta;\ q \parallel p$



Две прямые, попарно параллельные третьей, параллельны между собой

$$\left.\begin{array}{l} p \parallel q, \\ l \parallel q \end{array}\right\} \Rightarrow p \parallel l$$

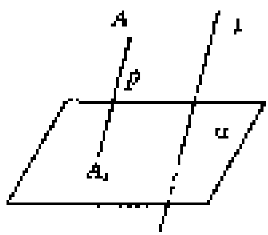


Параллельное проектирование

При *параллельном проектировании* задаются:
— плоскость проектирования α,
— направление проектирования (прямая l).

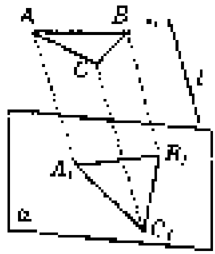
Параллельной проекцией точки A на плоскость α называется точка пересечения прямой p, проходящей через точку A и параллельной направлению проектирования, с плоскостью проектирования α

$$A_1 = пр_{\alpha} A$$



Параллельная проекция на плоскость α всех точек фигуры Φ образует фигуру Φ_1, которая называется параллельной проекцией фигуры Φ на плоскость α

$$\Phi_1 = пр_{\alpha} \Phi$$



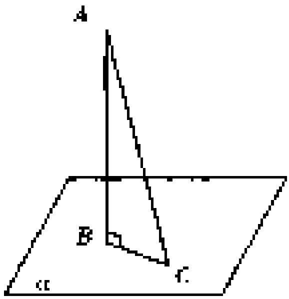
Свойства параллельных проекций

1. Параллельная проекция прямой есть либо точка, либо прямая.
2. Параллельные проекции параллельных прямых p и q, не параллельных направлению проектирования l, параллельны.
3. Отношение длин отрезков прямой равно отношению длин их проекций.

Перпендикулярность прямых и плоскостей

Перпендикуляр и наклонная к плоскости

Перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной к плоскости.

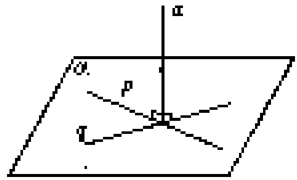


AB – перпендикуляр к плоскости α
AC – наклонная к плоскости α

Наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется *любой* отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и не являющийся перпендикуляром к этой плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Для того чтобы прямая была перпендикулярна плоскости, достаточно, чтобы она была перпендикулярна двум любым пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости



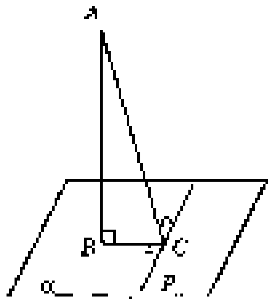
Теорема о трех перпендикулярах

Прямая теорема

Прямая, проведенная на плоскости перпендикулярно проекции некоторой наклонной, перпендикулярна и самой наклонной

Обратная теорема

Прямая, проведенная в плоскости перпендикулярно наклонной, перпендикулярна и ортогональной проекции этой наклонной

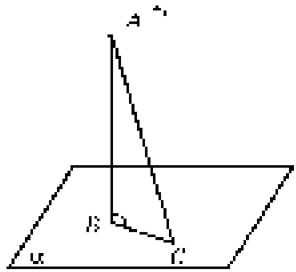


Расстояние от точки до плоскости

Если из точки A, лежащей вне плоскости α, провести к ней перпендикуляр и наклонную, то:

1) перпендикуляр короче всякой наклонной;

2) равные наклонные имеют равные проекции и равным проекциям соответствуют равные наклонные;

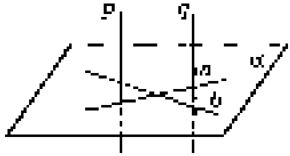


3) из двух наклонных, имеющих неравные проекции, длиннее та, проекция которой длиннее

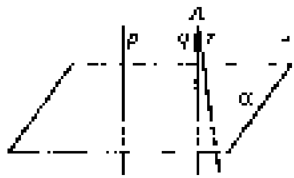
Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, равно длине перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость

Свойства перпендикуляров к плоскости

Плоскость, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и другой прямой

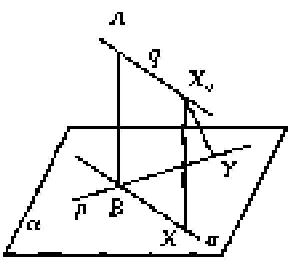


Прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны между собой



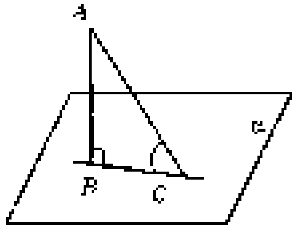
Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине перпендикуляра, опущенного из любой точки одной прямой на плоскость, проходящую через другую прямую параллельно первой

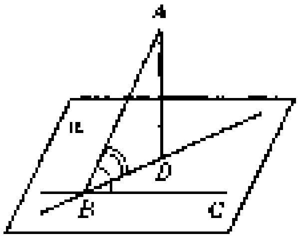


Угол между прямой и плоскостью

Углом между наклонной AC и плоскостью α называется величина угла между наклонной и ее ортогональной проекцией (BC) на эту плоскость.

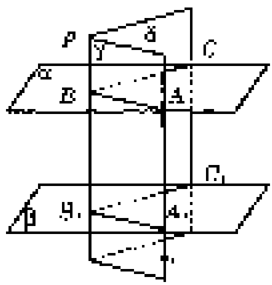


Угол между наклонной и ее ортогональной проекцией меньше угла между наклонной и любой другой прямой, проведенной в этой плоскости через основание наклонной.

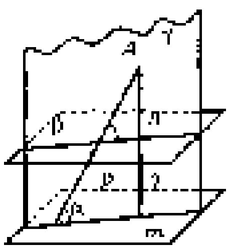


Прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и другой.

Плоскости α и β, перпендикулярные одной и той же прямой p, параллельны между собой.



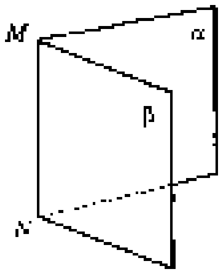
Наклонная к двум параллельным плоскостям образует с ними равные углы.



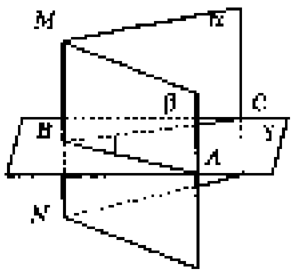
Двугранные углы

Двугранным углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями α и β с общей ограничивающей их прямой MN.

Полуплоскости α и β называются гранями, а прямая MN — ребром двугранного угла



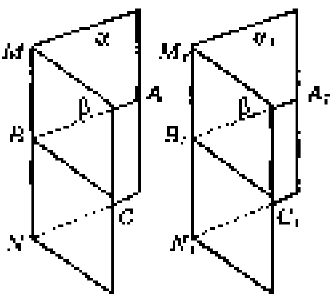
Пересечение двугранного угла с плоскостью, перпендикулярной его ребру, называется *линейным углом* двугранного угла



Все линейные углы двугранного угла равны

За величину двугранного угла принимают величину его линейного угла

Линейные углы, соответствующие равным двугранным углам, равны, и обратно: равным линейным углам соответствуют равные двугранные углы



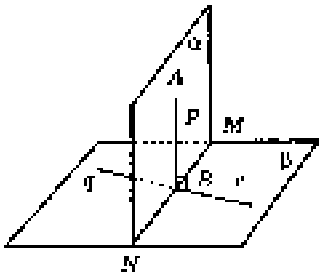
Угол между плоскостями. Перпендикулярные плоскости

Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьшая из величин двугранных углов, определённых этими плоскостями.

Плоскости α и β, угол между которыми равен $90°$, называются перпендикулярными ($\alpha \perp \beta$). Если две плоскости параллельны, то угол между ними считается равным $0°$.

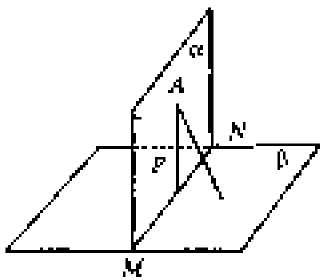
$$0° \le (\widehat{\alpha, \beta}) \le 90°$$

Плоскость α, проходящая через перпендикуляр p к другой плоскости β, перпендикулярна плоскости β.



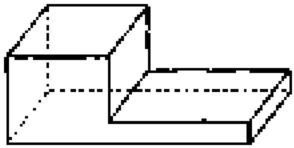
Если две плоскости α и β взаимно перпендикулярны, то прямая p, проведенная в одной из этих плоскостей перпендикулярно их линии пересечения, перпендикулярна и другой плоскости.

Если α и β — две взаимно перпендикулярные плоскости и из точки A плоскости α опущен перпендикуляр p на плоскость β, то он лежит в плоскости α.



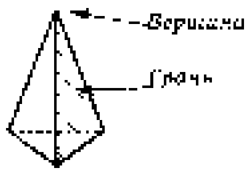
Многогранники

Основные определения

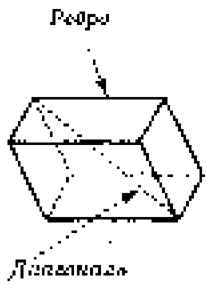


Многогранником называется геометрическое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников.

Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону плоскости каждого плоского многоугольника на его поверхности.



Многоугольники, из которых составлена многогранная поверхность, называются ее гранями; стороны многоугольников — ребрами, а вершины — вершинами многогранника.

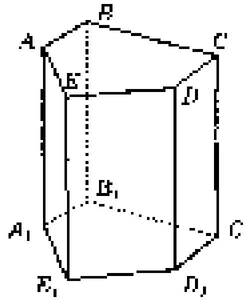


Отрезок, соединяющий две вершины многогранника, не лежащие на одной грани, называется диагональю многогранника.

Призма и параллелепипед

Призмой называется многогранник, поверхность которого есть объединение двух равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях (оснований призмы), и параллелограммов (боковых граней), число которых равно числу сторон основания.

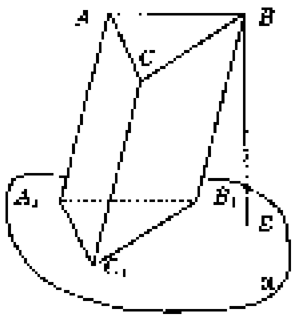
Объединение граней, не являющихся основаниями призмы, называется ее боковой поверхностью



Прямая призма

Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны плоскостям оснований. Боковые грани прямой призмы — прямоугольники

Непрямая призма называется *наклонной*

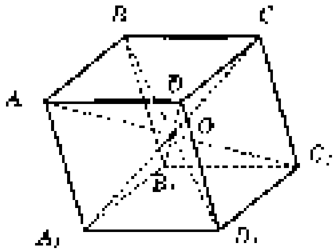


Высотой любой призмы называется перпендикуляр, опущенный из какой-нибудь точки верхнего основания на плоскость нижнего основания

Наклонная призма
BE — высота призмы

Параллелепипед

Призма, в основании которой лежит параллелограмм, называется *параллелепипедом*



Середина любой диагонали параллелепипеда является центром его симметрии

Противолежащие грани параллелепипеда равны и параллельны

Все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам

O — центр симметрии

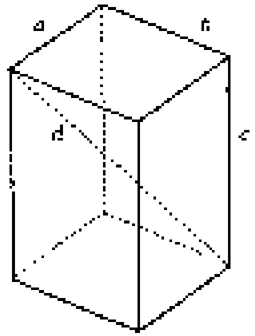
Прямоугольный параллелепипед

Прямой параллелепипед, в основании которого лежит прямоугольник, называется прямоугольным

Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, называются его измерениями

Прямоугольный параллелепипед, у которого все три измерения равны, называется кубом

В прямоугольном параллелепипеде квадрат длины диагонали равен сумме квадратов трех его измерений



$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Площадь поверхности и объем призмы

Боковая поверхность $S_б = p \cdot l$,

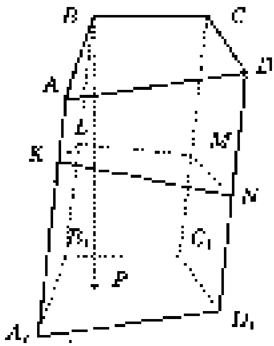
где p — периметр перпендикулярного сечения (для прямой призмы — периметр основания);
l — длина бокового ребра

Полная поверхность

$$S_п = S_б + 2S_о,$$

где $S_о$ — площадь основания

Объем $V = S \cdot l$,
где S — площадь перпендикулярного сечения (для прямой призмы — площадь основания);
l — длина бокового ребра.



KLMN — *перпендикулярное сечение*,
BP — *высота*

Площадь поверхности и объем прямоугольного параллелепипеда

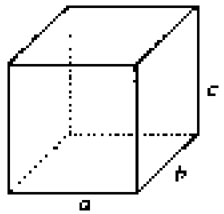
Боковая поверхность

$$S_б = 2c\,(a + b)$$

Полная поверхность

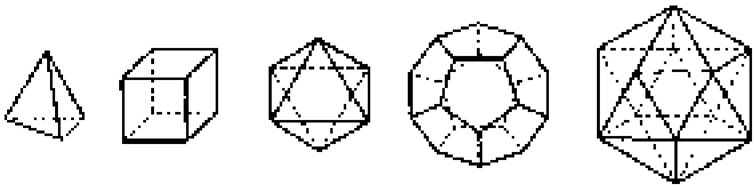
$$S_п = 2\,(ac + bc + ab)$$

Объем $V = abc$



Правильные многогранники

Выпуклые многогранники, все грани которых правильные многоугольники, называются правильными многогранниками



Тетраэдр Куб Октаэдр Додекаэдр Икосаэдр

Основные формулы

Правильные многогранники	Радиус описанной сферы	Радиус вписанной сферы	Объем
Тетраэдр	$\frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{a\sqrt{6}}{12}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Куб	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$	a^3
Октаэдр	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

a — длина ребра многогранника

Пирамида

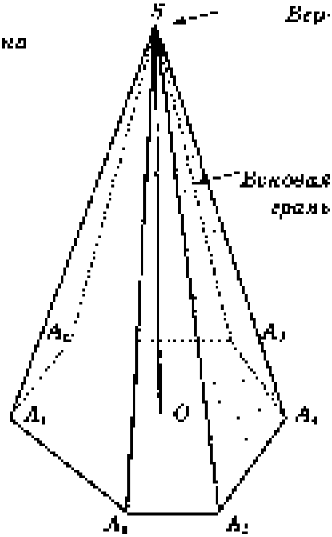
Пирамидой называется многогранник, одной из граней которого служит многоугольник (основание пирамиды), а остальные грани (боковые грани) — треугольники с общей вершиной (вершина пирамиды).

Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания, называется высотой пирамиды.

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_о \cdot h,$$

где $S_о$ — площадь основания;
h — высота



$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ — основание, SO — высота

Полная поверхность пирамиды

$$S_п = S_б + S_о,$$

где $S_б$ — площадь боковых граней,
$S_о$ — площадь основания

Усеченная пирамида

Плоскость, пересекающая пирамиду и параллельная ее основанию, делит ее на две части: пирамиду, подобную данной ($SA_1B_1C_1D_1$) и, так называемую, усеченную пирамиду ($A_1B_1C_1D_1ABCD$).

Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники, а боковые грани — трапеции.

Высота усеченной пирамиды — это расстояние между плоскостями ее оснований.

Объем усеченной пирамиды

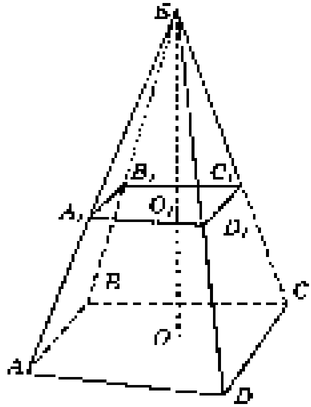
$$V = \frac{1}{3} h \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right),$$

где S_1 и S_2 — площади оснований, h — высота

Полная поверхность усеченной пирамиды

$$S_п = S_1 + S_2 + S_б,$$

где S_1 и S_2 — площади оснований, $S_б$ — площадь боковых граней



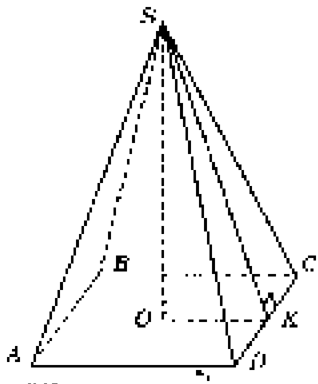
OO_1 — высота

Правильная пирамида

Пирамида называется правильной, если в ее основании лежит правильный многоугольник и высота пирамиды проходит через центр основания

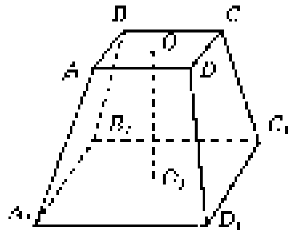
Боковые грани правильной пирамиды — равные между собой равнобедренные треугольники, высота каждого из этих треугольников называется апофемой

Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению полупериметра основания на апофему



SK — апофема

Усеченная пирамида, которая получается из правильной пирамиды, также называется правильной

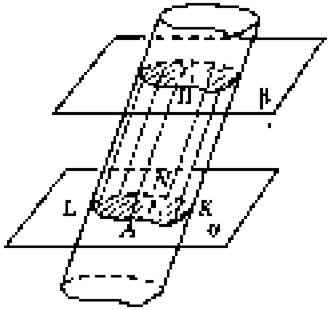


Тела вращения

Цилиндр

Цилиндрическая поверхность — это множество прямых (образующих) пространства, параллельных заданному направлению и проходящих через некоторую линию (направляющую).

Цилиндр — это тело, ограниченное замкнутой цилиндрической поверхностью и двумя секущими ее параллельными плоскостями — основаниями цилиндра



AB — образующая.
F_1 и F_2 — основания.
AKNLA — направляющая

Цилиндр, у которого основания перпендикулярны образующей и представляют собой круги, называется прямым круговым цилиндром (часто называют просто цилиндром).

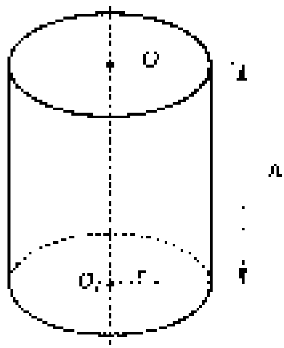
Объем такого цилиндра

$$V = \pi r^2 h;$$

Боковая поверхность

$$S = 2\pi r h,$$

где r — радиус основания,
h — высота цилиндра

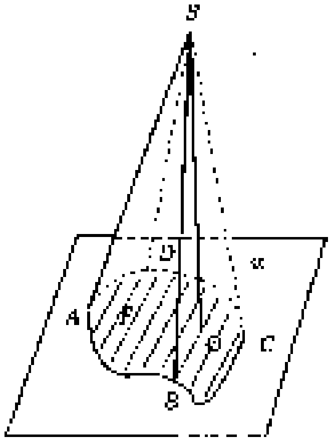


Конус

Коническая поверхность — это множество прямых (образующих) пространства, соединяющих все точки некоторой линии (направляющей) с данной точкой (вершиной) пространства, не лежащей в плоскости направляющей

Конус — это тело, ограниченное замкнутой конической поверхностью и плоскостью, содержащей направляющую (плоскость основания).

Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания, называется высотой конуса.

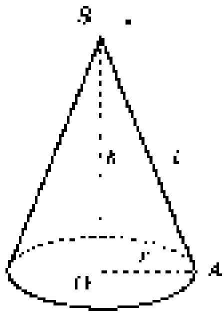


S — вершина,
F — основание,
ABCDA — направляющая,
SA, SB, SC, SD — образующие,
SO — высота

Часть конической поверхности, заключенная между вершиной и плоскостью основания, называется боковой поверхностью конуса

Прямой круговой конус

Конус называется *прямым* круговым, если его направляющая — окружность, а вершина ортогонально проецируется в ее центр. (В курсе элементарной геометрии его называют просто конус)



Основные свойства и формулы

Прямой круговой конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. При этом вращении другой катет описывает основание конуса, а гипотенуза — боковую поверхность конуса.

Длина образующей $l = \sqrt{h^2 + r^2}$.

Объем $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

Боковая поверхность $S_б = \pi r l$.

Полная поверхность $S_п = \pi r(l + r)$,

где r — радиус окружности основания,

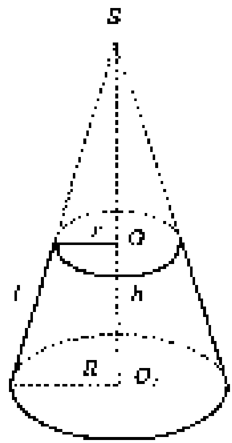
h — высота конуса.

Усеченный конус

При пересечении конуса плоскостью, параллельной его основанию, образуется фигура, гомотетичная основанию, причем центром гомотетии служит вершина конуса.

Часть конуса, заключенная между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется **усеченным конусом**.

Высотой усеченного конуса называется отрезок перпендикуляра, опущенного из любой точки верхнего основания на нижнее.



Основные свойства и формулы

Площади параллельных сечений конуса относятся к площади его основания, как квадраты их расстояний до вершины конуса.

Длина образующей $l = \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$;

Объем $V = \dfrac{1}{3} \pi h \, (R^2 + r^2 + Rr)$;

Боковая поверхность $S_б = \pi \, (R + r) \, l$,

где r — радиус окружности верхнего основания,
R — радиус окружности нижнего основания,
h — высота усеченного конуса.

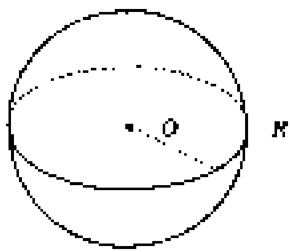
Сфера и шар

Сфера — это замкнутая поверхность, состоящая из всех точек пространства, которые одинаково удалены от одной точки (центра сферы).

Отрезок, соединяющий центр сферы с какой-либо ее точкой, называется **радиусом сферы**.

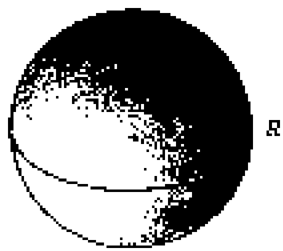
Площадь поверхности сферы

$$S = 4\pi R^2$$

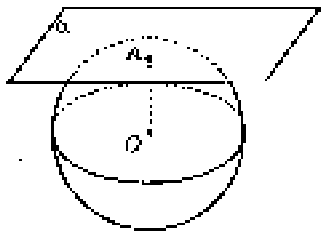


Часть пространства, ограниченная сферой и содержащая ее центр, называется *шаром*.

Объем шара $V = \dfrac{4}{3} \pi R^3$



Плоскость, имеющая с шаром (сферой) только одну общую точку, называется касательной к шару (α), а имеющая более одной общей точки — секущей плоскостью.



Шаровой сегмент — это часть шара, отсекаемая секущей плоскостью.

Объем шарового сегмента

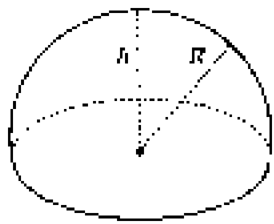
$$V=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h);$$

боковая поверхность

$$S=2\pi Rh,$$

где R — радиус шара,

h — высота шарового сегмента.



Шаровой слой — это часть шара, заключенная между двумя пересекающими шар параллельными плоскостями.

Объем шарового слоя

$$V=\frac{1}{6}\pi h(3a^2+3b^2+h^2);$$

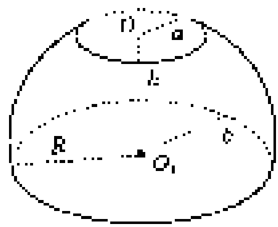
боковая поверхность

$$S=2\pi Rh,$$

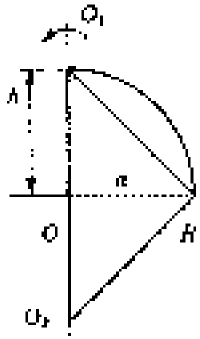
где R — радиус шара,

h — расстояние между плоскостями оснований,

a и b — радиусы оснований.



Шаровой сектор — это геометрическое тело, возникающее при вращении кругового сектора вокруг одного из ограничивающих круговой сектор радиусов.



Объем шарового сектора

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h;$$

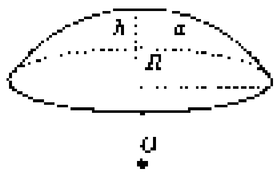
поверхность шарового сектора

$$S = \pi R(2h + a),$$

где R — радиус сектора,

h — проекция хорды, стягивающей дугу сектора на ось вращения;

a — расстояние от концов хорды до оси



Взаимное расположение двух сфер

Пусть даны две сферы с центрами соответственно O_1 и O_2 и радиусами R_1 и R_2. Тогда:

1) если $O_1O_2 > R_1 + R_2$ или $O_1O_2 < |R_1 - R_2|$, то эти сферы не имеют общих точек;

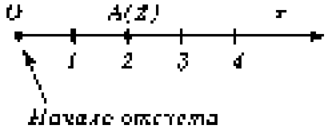
2) если $O_1O_2 = R_1 + R_2$ или $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$, то они касаются;

3) если $|R_1 - R_2| < O_1O_2 < R_1 - R_2$, то они пересекаются по окружности

Декартова система координат

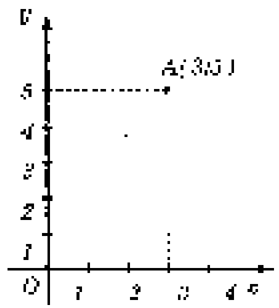
Ось — прямая линия с указанным на ней направлением.

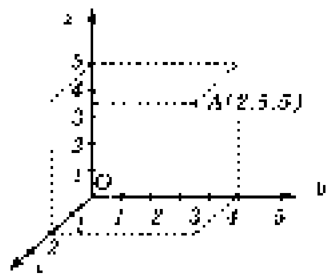
Ось координат — ось, на которой задано начало отсчета, единица масштаба и каждому действительному числу соответствует определенная точка.



Декартовы координаты на плоскости и в пространстве

На плоскости	В пространстве
Две взаимно перпендикулярные оси координат (ось абсцисс Ox, ось ординат Oy) с общим началом отсчета. Каждой точке плоскости ставится в соответствие пара чисел (x_A, y_A) — координаты проекций точки на соответствующие оси координат	Три взаимно перпендикулярные оси координат (ось абсцисс Ox, ось ординат Oy, ось аппликат Oz) с общим началом отсчета. Каждой точке пространства ставится в соответствие тройка чисел (x_A, y_A, z_A) — координаты проекций точки на соответствующие оси координат

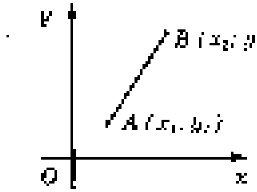




Основные координатные формулы

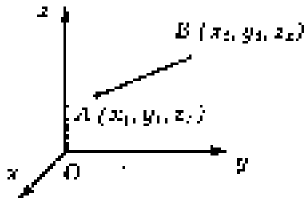
Расстояние между точками

На плоскости



$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

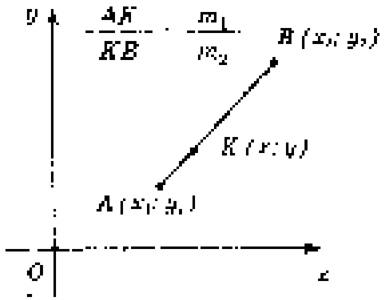
В пространстве



$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Координаты точки деления отрезка в данном отношении

На плоскости

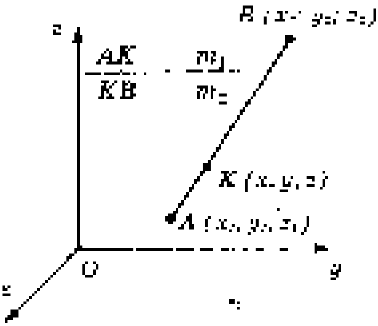


$$\frac{AK}{KB} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$x = \frac{m_2x_1 + m_1x_2}{m_1 + m_2};$$

$$y = \frac{m_2y_1 + m_1y_2}{m_1 + m_2}$$

В пространстве



$$\frac{AK}{KB} = \frac{m_1}{m_2}$$

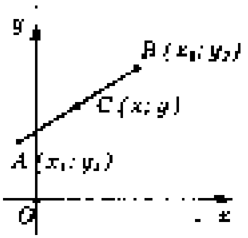
$$x = \frac{m_2x_1 + m_1x_2}{m_1 + m_2};$$

$$y = \frac{m_2y_1 + m_1y_2}{m_1 + m_2};$$

$$z = \frac{m_2z_1 + m_1z_2}{m_1 + m_2}$$

Координаты середины отрезка

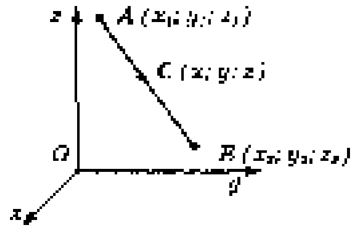
На плоскости



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

В пространстве



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

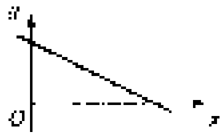
$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Уравнение прямой

Общее уравнение прямой

$$ax + by + c = 0,$$

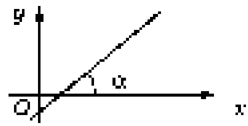
где $a \neq 0$ или $b \neq 0$



Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b,$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$



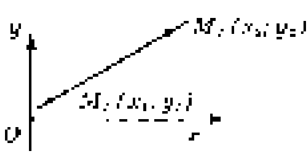
Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

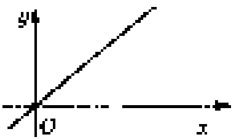
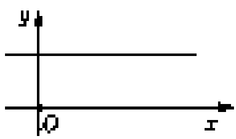
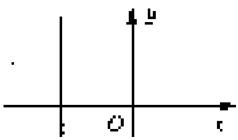
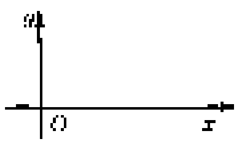
$(a \neq 0,\ b \neq 0)$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$



Частные случаи уравнения прямой

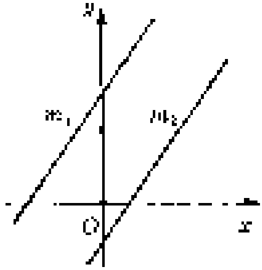
Вид прямой	Вид уравнения прямой	
	$ax + by + c = 0$	$y = kx + b$
График прямой пропорциональности 	$ax + by = 0$; $y = -\frac{a}{b}x$; $(a \neq 0;\ b \neq 0)$	$y = kx$; $(k \neq 0)$
Прямая, параллельная оси x 	$by + c = 0$; $y = -\frac{c}{b}$; $(b \neq 0;\ c \neq 0)$	$y = b$; $(b \neq 0)$
Прямая, параллельная оси y 	$ax + c = 0$; $x = -\frac{c}{a}$; $(a \neq 0;\ c \neq 0)$	$x = m$, где m — любое действительное число, отличное от нуля
Уравнение оси x 	$by = 0$; $y = 0$; $(b \neq 0)$	$y = 0$

Условие параллельности прямых

m_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$;
m_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$;

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

m_1: $k_1x + b_1$;
m_2: $k_2x + b_2$;
$k_1 = k_2$; $(b_1 \neq b_2)$

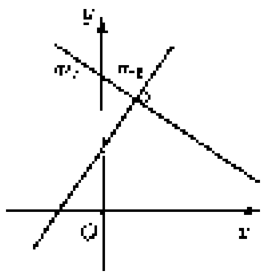


Условие перпендикулярности прямых

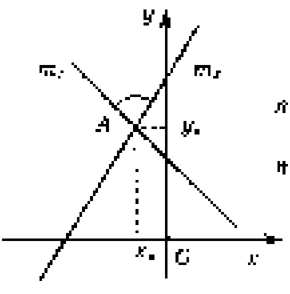
m_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$;
m_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$;

$$\frac{a_1}{b_1} = -\frac{b_2}{a_2}$$

m_1: $y = k_1x + b_1$;
m_2: $y = k_2x + b_2$;
$k_1k_2 = -1$



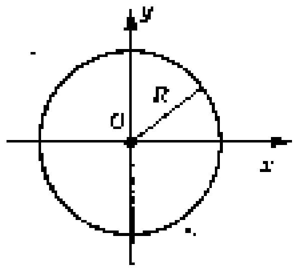
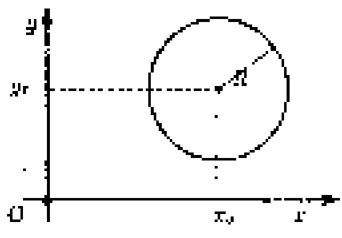
Пересечение прямых



m_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $\quad$ m_1: $y = k_1x + b_1$

m_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ $\quad$ m_2: $y = k_2x + b_2$

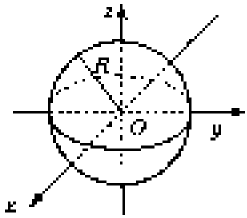
Условие пересечения прямых	$\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$	$k_1 \neq k_2$
Координаты точки пересечения	$x_A = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$ $y_A = \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$	$x_A = \dfrac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}$ $y_A = \dfrac{k_1b_2 - k_2b_1}{k_1 - k_2}$
Угол между пересекающимися прямыми	$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}$	$\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$

Уравнение окружности	
С центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$	
С центром в точке $(x_0; y_0)$ $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	

Уравнение сферы

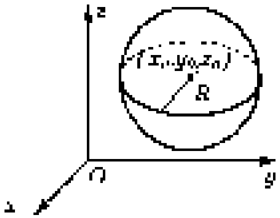
С центром в начале координат

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



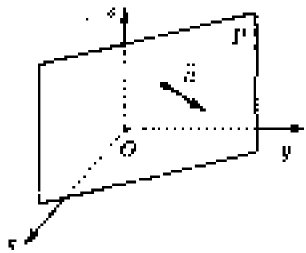
С центром в точке (x_0, y_0, z_0)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$



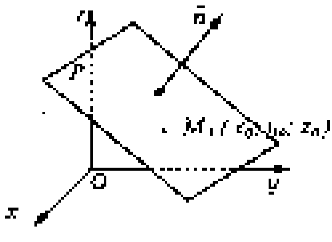
Уравнение плоскости

Общее уравнение плоскости
$ax + by + cz + d = 0$,
где коэффициенты a, b, c равны координатам вектора $\bar{n}$ $(a; b; c)$, перпендикулярного данной плоскости (a, b, c не равны нулю одновременно)



Уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 $(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярной вектору $\bar{n}$ $(a; b; c)$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
или
$ax + by + cz + d = 0$,
где $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$

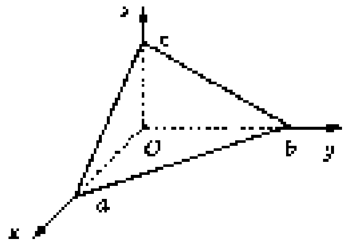


Уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

где a, b, c — отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях

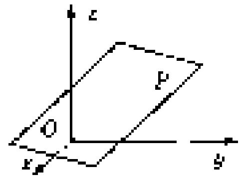
$(a \neq 0;\ b \neq 0;\ c \neq 0)$



Частные случаи положения плоскости относительно системы координат

Плоскость проходит через начало координат

$$ax+by+cz=0$$

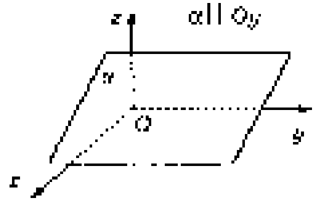


Плоскость параллельна координатной оси

Oz: $ax+by+d=0$

Oy: $ax+cz+d=0$

Ox: $by+cz+d=0$

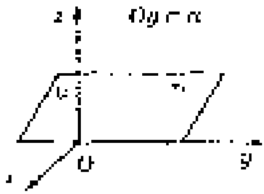


Плоскость проходит через координатную ось

Ox: $by+cz=0$

Oy: $ax+cz=0$

Oz: $ax+by=0$

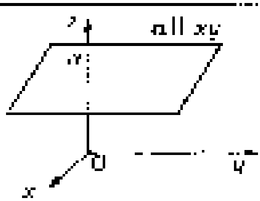


Плоскость параллельна координатной плоскости

xy: $cz+d=0$

xz: $by+d=0$

yz: $ax+d=0$



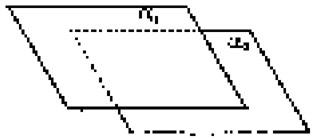
Взаимное расположение двух плоскостей

$$\alpha_1:\quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0;$$
$$\alpha_2:\quad a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

Условие параллельности плоскостей:

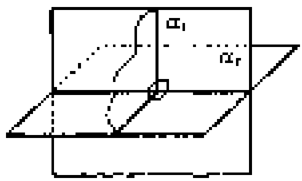
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

При $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$ плоскости совпадают



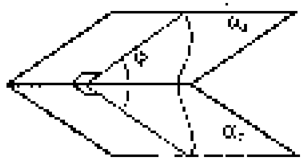
Условие перпендикулярности плоскостей:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$



Угол между плоскостями: (меньший из двух смежных)

$$\cos\varphi = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$



Векторы

Основные определения

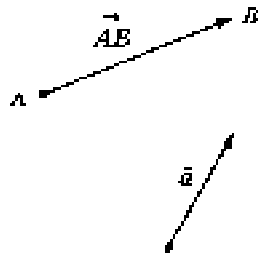
Скаляр (скалярная величина) — величина, каждое значение которой может быть выражено действительным числом.

Скаляры: — длина; — площадь; — объем

Вектор — направленный отрезок прямой, у которого один конец (точка A) называется *началом вектора*, другой конец (точка B) — *концом вектора*.

Обозначения вектора:

$\vec{AB}$, $\overline{AB}$, a, $\vec{a}$, $\bar{a}$



Модуль вектора — скалярная величина, равная расстоянию между началом и концом вектора (длина вектора).

Обозначения модуля вектора:

$|\vec{AB}|$, $|a|$

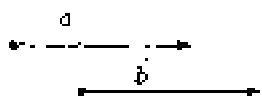
$|\overline{AB}| = 4$

Нулевой вектор — вектор, начало и конец которого совпадают.

A

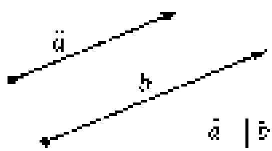
$|\vec{AA}| = 0$

Два вектора называются *равными*, если они имеют равные модули и одинаково направлены.



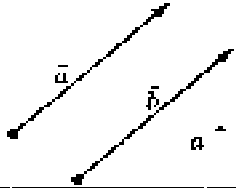
$\vec{a} = \vec{b}$

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или на параллельных прямых.



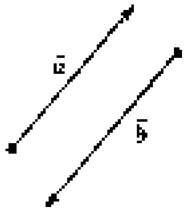
$\vec{a} \parallel \vec{b}$

Два одинаково направленных коллинеарных вектора называются *сонаправленными*



$\vec a \uparrow\uparrow \vec b$

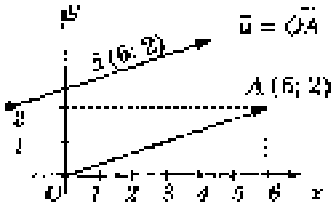
Два неодинаково направленных коллинеарных вектора называются *противоположно направленными*



$\vec a \uparrow\downarrow \vec b$

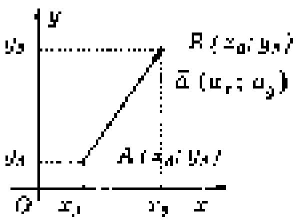
Координаты вектора

Координатами вектора называются координаты конца равного ему вектора, отложенного от начала координат



Вычисление координат и модуля вектора

На плоскости

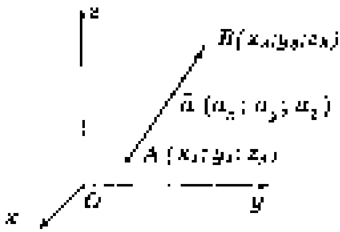


$a_x = x_B - x_A,$

$a_y = y_B - y_A,$

$|\vec a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

В пространстве



$a_x = x_B - x_A,$

$a_y = y_B - y_A,$

$a_z = z_B - z_A,$

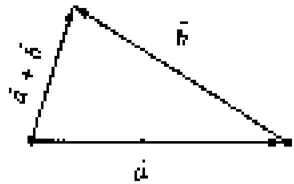
$|\vec a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

Линейные операции над векторами

Сумма векторов

Правило треугольника

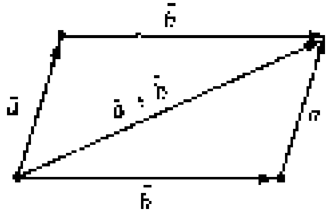
Суммой $\bar{a} + \bar{b}$ векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор, проведенный из начала $\bar{a}$ к концу $\bar{b}$, если конец $\bar{a}$ и начало $\bar{b}$ совмещены.



$$\bar{a}(a_x; a_y) + \bar{b}(b_x; b_y) = \bar{c}(a_x + b_x; a_y + b_y)$$

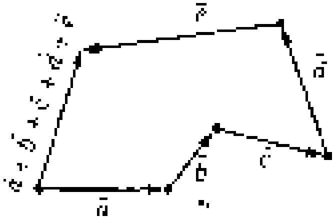
Правило параллелограмма

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ приложены к общему началу, то их сумма есть вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$

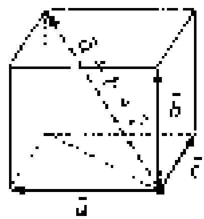


Правило многоугольника

Если к концу каждого слагаемого приложить начало следующего, то вектор, идущий из начала первого в конец последнего слагаемого, и является суммой всех этих слагаемых



Правило параллелепипеда

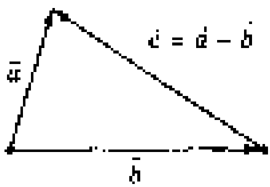


Свойства операции сложения векторов

1. $\bar a + \bar b = \bar b + \bar a$ (переместительный закон).
2. $(\bar a + \bar b) + \bar c = \bar a + (\bar b + \bar c)$ (сочетательный закон).
3. $\bar a + \bar 0 = \bar a$ (наличие нулевого элемента).
4. $\bar a + (-\bar a) = \bar 0$ (наличие противоположного элемента).

Разность векторов

Разностью $\bar a - \bar b$ векторов $\bar a$ и $\bar b$ называется вектор $\bar c$ такой, что $\bar c + \bar b = \bar a$.



На плоскости:

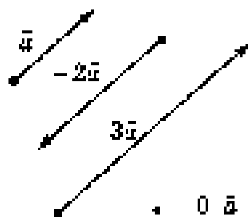
$\bar a(a_x; a_y) - \bar b(b_x; b_y) = \bar c(a_x - b_x; a_y - b_y)$

В пространстве:

$\bar a(a_x; a_y; a_z) - \bar b(b_x; b_y; b_z) = \bar c(a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z)$

Умножение вектора на число

Произведением $\lambda \bar a$ вектора $\bar a$ на число λ в случае $\lambda \neq 0$, $\bar a \neq \bar 0$ называется вектор, коллинеарный $\bar a$, модуль которого равен $|\lambda||\bar a|$ и который направлен в ту же сторону, что и вектор $\bar a$, если $\lambda > 0$, и в противоположную, если $\lambda < 0$.



Если $\lambda = 0$ или $\bar a = \bar 0$, то $\lambda \bar a = \bar 0$

На плоскости: $\lambda \cdot \overline{(a_x; a_y)} = \overline{(\lambda a_x; \lambda a_y)}$.

В пространстве: $\lambda \cdot \overline{(a_x; a_y; a_z)} = \overline{(\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)}$

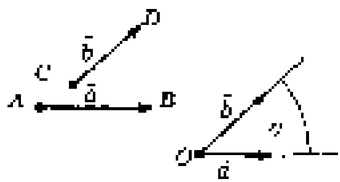
Свойства операции умножения вектора на число

1. $\lambda(\bar a + \bar b) = \lambda\bar a + \lambda\bar b$ (распределительный закон относительно сложения векторов).
2. $(\lambda + \mu)\bar a = \lambda\bar a + \mu\bar a$ (распределительный закон относительно сложения чисел).
3. $\lambda(\mu\bar a) = (\lambda\mu)\bar a$ (сочетательный закон).
4. $1\cdot\bar a = \bar a$ (умножение на единицу)

Угол между векторами

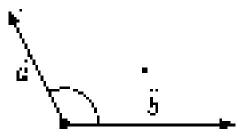
Углом между векторами называется угол между векторами, равными данным и имеющими общее начало

$$\alpha = \angle(\bar a, \bar b) = (\widehat{\bar a; \bar b})$$



Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением ненулевых векторов $\bar a$ и $\bar b$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними



$$\bar a\cdot\bar b = |\bar a|\cdot|\bar b|\cos\left(\widehat{\bar a,\bar b}\right)$$

На плоскости: $\bar a\cdot\bar b = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y$.

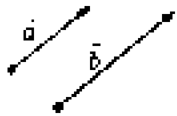
В пространстве: $\bar a\cdot\bar b = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$

Свойства скалярного произведения

1. $\bar{a}\cdot\bar{a} = |\bar{a}|^2$
2. $\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}$
3. $(x\bar{a})\cdot\bar{b} = x(\bar{a}\cdot\bar{b})$
4. $(\bar{a}+\bar{c})\cdot\bar{b} = \bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{c}\cdot\bar{b}$

Условие коллинеарности векторов

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, если их соответствующие координаты пропорциональны



$\bar{a}\parallel\bar{b}$

$\bar{b} = k\bar{a}$

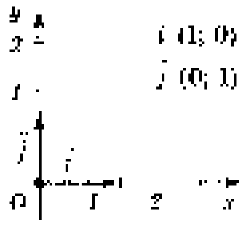
На плоскости: $\dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y} = k$,

В пространстве: $\dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z} = k$

Координатные векторы

Вектор называется *единичным*, если его абсолютная величина равна единице. Единичные векторы, имеющие направление положительных координатных полуосей, называются ***координатными векторами*** или ***ортами***. Координатные векторы осей Ox, Oy, Oz принято обозначать $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ или $\bar{e}_x$, $\bar{e}_y$, $\bar{e}_z$, соответственно.

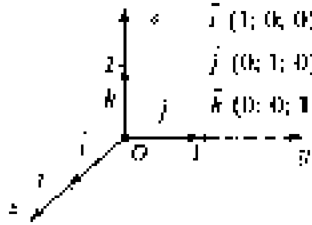
На плоскости:



$\bar{i}$ (1; 0)

$\bar{j}$ (0; 1)

В пространстве:



$\bar{i}$ (1; 0; 0);

$\bar{j}$ (0; 1; 0);

$\bar{k}$ (0; 0; 1).

Содержание

Алгебра и начала анализа

Раздел IV. Тригонометрия

Раздел V. Уравнения и системы уравнений

Раздел VIII. Комбинаторика, метод математической индукции, элементы теории вероятностей и статистики

ГЕОМЕТРИЯ

КНИГИ ИЗДАТЕЛЬСТВА «ФЕНИКС»

По вопросам оптовых продаж обращаться:

г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80
тел: 8 (863) 261-89-53; e-mail: torg@phoenixrostov.ru

Региональные представительства:

Москва

Москва, ул. Космонавта Волкова, д. 25/2, 1-этаж, М. "Войковская"
тел.: (095) 156-05-68, 450-08-35, 8-916-523-4378
e-mail: fenix-m@yandex.ru
Контактное лицо: Моисеенко Сергей Николаевич

Москва, Шоссе Фрезер, 17, район метро "Авиамоторная"
тел.: (095) 517-32-95, 107-44-98, 711-79-81
тел./факс: 8-501-413-75-78
e-mail: mosfen@pochta.ru mosfen@bk.ru
Директор: Мячин Виталий Васильевич

Торговый Дом "КноРус"
Москва, ул. Б. Переяславская, 46, М "Рижская", "Проспект мира"
тел.: (095) 680-02-07, 680-72-54, 680-91-06, 680-92-13
e-mail: phoenix@knorus.ru
Контактное лицо: Андрей Лебедев

Санкт-Петербург

Региональное представительство
198096, г. Санкт-Петербург, ул. Кронштадская, 11, офис 17
тел.: (812) 335-34-84, e-mail: fnx.spb@mail.ru
Директор: Стрельникова Оксана Борисовна

Новосибирск

ООО "ТОП-Книга"
г. Новосибирск, ул.Арбузова, 1/1
тел.: (3832) 36-10-28 доб. 105; e-mail: phoenix@top-kniga.ru

Украина

ООО ИКЦ "Кредо"
г. Донецк, ул. Университетская, 96
тел.: +38 (062) 345-63-08, 339-60-85; e-mail: moisaenko@skif.net

По вопросам издания книг обращаться:

office@phoenixrostov.ru