

ЗАДАНИЕ 13 ИЗ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

УРАВНЕНИЕ



Оглавление

1	Образцы заданий 2018 года	5
2	Образцы заданий 2017 года	17
3	Образцы заданий 2016 года	35
4	Образцы заданий 2015 года	45
5	Образцы заданий 2014 года	53
6	Образцы заданий 2013 года	61
7	Образцы заданий 2012 года	71
8	Образцы заданий 2011 года	79

Глава 1

Образцы заданий 2018 года

1. а) Решите уравнение $\frac{\sin x}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 4 \sin^2 \frac{x}{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Область допустимых значений переменной x задается условием

$$\cos \frac{x}{2} \neq 0 \iff \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \iff x \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Умножая обе части уравнения на $\cos^2 \frac{x}{2} \neq 0$, получим:

$$\begin{aligned} \sin x = 4 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} &\iff \sin x = \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\right)^2 \iff \sin x = \sin^2 x \iff \\ &\iff \sin x \cdot (\sin x - 1) = 0 \iff \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

С учетом ОДЗ, корнями уравнения являются серии

$$x = 2\pi n, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -4\pi, x = -\frac{7\pi}{2}.$$

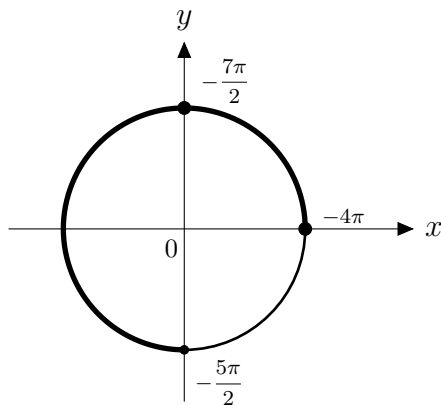
Ответ: а) $2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-4\pi; -\frac{7\pi}{2}$.

2. а) Решите уравнение $\frac{\cos x}{\sin x + 1} = \sin x - 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Область допустимых значений переменной x задается условием

$$\sin x + 1 \neq 0 \iff \sin x \neq -1 \iff x \neq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$



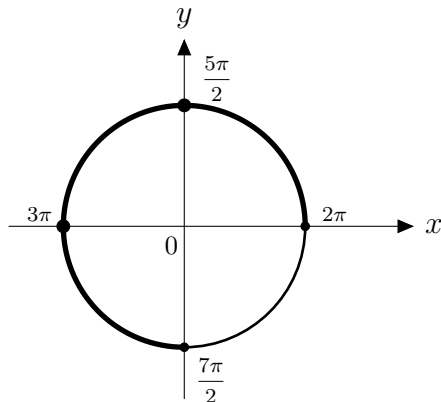
Умножая обе части уравнения на $\sin x + 1 \neq 0$, получим:

$$\begin{aligned} \cos x &= (\sin x - 1) \cdot (\sin x + 1) \iff \cos x = \sin^2 x - 1 \iff \cos x = -\cos^2 x \iff \\ &\iff \cos x(\cos x + 1) = 0 \iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

С учетом ОДЗ, корнями уравнения являются серии

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, x = \pi + 2\pi m, k, m \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:



$$x = \frac{5\pi}{2}, x = 3\pi.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi m, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}; 3\pi$.

3. а) Решите уравнение

$$\sqrt{x^3 - 4x^2 - 10x + 29} = 3 - x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\sqrt{3}; \sqrt{30}]$.

Решение. а) Имеем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x^3 - 4x^2 - 10x + 29 = (3 - x)^2 \end{cases} &\iff \begin{cases} x \leq 3 \\ x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0 \end{cases} \iff \\ \iff \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2(x - 5) - 4(x - 5) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x \leq 3 \\ (x - 5)(x - 2)(x + 2) = 0 \end{cases} \iff x = \pm 2. \end{aligned}$$

б) Так как $-2 = -\sqrt{4} < -\sqrt{3}$, а $2 = \sqrt{4} < \sqrt{30}$, то указанному промежутку принадлежит корень $x = 2$.

Ответ: а) ± 2 ; б) 2.

4. а) Решите уравнение

$$\sin x + 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \sin 2x + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right]$.

Решение. а) Имеем:

$$\begin{aligned} \sin x + 2 \left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x \right) &= \sqrt{3} \sin 2x + 1 \iff \sin x + \sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{3} \sin 2x + 1 \\ \iff \sin x + \cos 2x &= 1 \iff \sin x + 1 - 2 \sin^2 x = 1 \iff \sin x (1 - 2 \sin x) = 0 \iff \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{19\pi}{6}, x = -3\pi, x = -2\pi.$$

Ответ: а) $\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$. б) $-\frac{19\pi}{6}; -3\pi; -2\pi$.

5. а) Решите уравнение

$$2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$.

Решение. а) Имеем:

$$2 \sin^2 x + \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right) = \cos x \iff 2 \sin^2 x + \sin x + \cos x = \cos x \iff$$

$$2 \sin^2 x + \sin x = 0 \iff \sin x(2 \sin x + 1) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -2\pi, x = -\pi, x = -\frac{5\pi}{6}.$$

Ответ: а) $\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$. б) $-2\pi; -\pi; -\frac{5\pi}{6}$.

6. а) Решите уравнение

$$4 \sin^3 x = 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2} \right]$.

Решение. а) Так как $\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x$, то имеем:

$$4 \sin^3 x - 3 \sin x = 0 \iff \sin x(4 \sin^2 x - 3) = 0 \iff \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin^2 x = \frac{3}{4} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = 3\pi, x = 4\pi, x = \frac{13\pi}{3}, x = \frac{10\pi}{3}, x = \frac{11\pi}{3}.$$

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$. б) $3\pi; 4\pi; \frac{13\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}; \frac{11\pi}{3}$.

7. а) Решите уравнение

$$2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \sin^2 x = \sqrt{2} \sin x + 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right]$.

Решение. а) Имеем:

$$\begin{aligned}
 2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right) + 2 \sin^2 x &= \sqrt{2} \sin x + 2 \iff \sqrt{2} \sin x + \sqrt{2} \cos x + 2 \sin^2 x = \sqrt{2} \sin x + 2 \\
 \iff \sqrt{2} \cos x + 2(\sin^2 x - 1) &= 0 \iff \sqrt{2} \cos x - 2 \cos^2 x = 0 \iff \cos x(\sqrt{2} - 2 \cos x) = 0 \\
 \iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} &\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{7\pi}{2}, x = -\frac{5\pi}{2}, x = -\frac{9\pi}{4}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$. б) $-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}; -\frac{9\pi}{4}$.

8. а) Решите уравнение

$$2 \cos x - \sqrt{3} \sin^2 x = 2 \cos^3 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Решение. а) Имеем:

$$\begin{aligned}
 2 \cos x - 2 \cos^3 x - \sqrt{3} \sin^2 x &= 0 \iff 2 \cos x(1 - \cos^2 x) - \sqrt{3} \sin^2 x = 0 \iff \\
 2 \cos x \sin^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x &= 0 \iff \sin^2 x(2 \cos x - \sqrt{3}) = 0 \iff \\
 \iff \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} &\iff \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -3\pi, x = -\frac{13\pi}{6}, x = -2\pi.$$

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$. б) $-3\pi; -\frac{13\pi}{6}; -2\pi$.

9. Решите уравнение

$$x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{3}; \sqrt{20}]$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x-1} = t, t \geq 0$. Тогда $x = t^2 + 1$, имеем:

$$t^2 + 1 - 3t + 1 = 0 \iff t^2 - 3t + 2 = 0 \iff \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}.$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} = 1 \\ \sqrt{x-1} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x-1 = 1 \\ x-1 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}.$$

б) Так как $\sqrt{3} < \sqrt{4} = 2 < \sqrt{20}$ и $\sqrt{20} < \sqrt{25} = 5$, то указанному промежутку принадлежит корень $x = 2$.

Ответ: а) 2; 5; б) 2.

Комментарий.

Для решения иррационального уравнения можно воспользоваться стандартным равносильным переходом:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \iff \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} x - 3\sqrt{x-1} + 1 = 0 &\iff 3\sqrt{x-1} = x+1 \iff \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 9(x-1) = (x+1)^2 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}. \end{aligned}$$

Задачи для самостоятельного решения

10. а) Решите уравнение $\frac{\sin x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-3\pi; -\frac{7\pi}{2}$.

11. а) Решите уравнение $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 - \cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Ответ: а) $2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2}; -2\pi$.

12. а) Решите уравнение $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{2}; 4\pi$.

13. а) Решите уравнение

$$\sqrt{x^3 - 6x^2 - 19x + 88} = 5 - x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\sqrt{8}; \sqrt{30}]$.

Ответ: а) ± 3 ; б) 3.

14. а) Решите уравнение

$$2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \sin x = \sin 2x + \sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; 3\pi; \frac{19\pi}{6}$.

15. а) Решите уравнение

$$2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos x = \sqrt{3} \sin 2x - 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi; \frac{11\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{2}; \frac{14\pi}{3}; \frac{16\pi}{3}; \frac{11\pi}{2}$.

16. а) Решите уравнение

$$2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - \cos x = \sqrt{3} \sin 2x - 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}; \frac{11\pi}{3}$.

17. а) Решите уравнение

$$\sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos x = \sin 2x - 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi \right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{4}$.

18. а) Решите уравнение

$$\sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{3} \cos x = \sin 2x - 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$.

19. а) Решите уравнение

$$\sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos x = \sin 2x - 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi \right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{2}; -\frac{16\pi}{3}; -\frac{14\pi}{3}; -\frac{9\pi}{2}$.

20. а) Решите уравнение

$$\sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \sin x = \sin 2x + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$.

Ответ: а) $\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4}; 2\pi; 3\pi$.

21. а) Решите уравнение

$$\sqrt{3} \sin x + 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \sin 2x + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-3\pi; -2\pi; -\frac{5\pi}{3}$.

22. а) Решите уравнение

$$\sqrt{6} \sin x + 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x - \sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-3\pi; -\frac{11\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}; -2\pi$.

23. а) Решите уравнение

$$\sqrt{6} \cos x + 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = \sin 2x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{4}; \frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}$.

24. а) Решите уравнение

$$\sqrt{6} \sin^2 x + \cos x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $3\pi; 4\pi; \frac{17\pi}{4}$.

25. а) Решите уравнение

$$2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi; -\pi; -\frac{5\pi}{6}$.

26. а) Решите уравнение

$$2\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos^2 x = \sqrt{6} \cos x + 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-3\pi; -2\pi; -\frac{7\pi}{4}$.

27. а) Решите уравнение

$$2 \cos^3 x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{15\pi}{4}; -\frac{7\pi}{2}; -\frac{13\pi}{4}; -\frac{11\pi}{4}; -\frac{5\pi}{2}$.

28. а) Решите уравнение

$$4 \cos^3 \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \sin x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{6}; -3\pi; -\frac{17\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}; -2\pi$.

29. а) Решите уравнение

$$2 \sin^3 \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) + \cos x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}; \frac{7\pi}{2}; \frac{15\pi}{4}$.

30. а) Решите уравнение

$$2\sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) + 2 \sin^2 x = 3 \sin x + 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}$.

31. а) Решите уравнение

$$\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \sin^2 x = \sin x + 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2} \right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}; \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}$.

32. а) Решите уравнение

$$2 \cos x + \sin^2 x = 2 \cos^3 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi \right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-4\pi; -\frac{10\pi}{3}; -3\pi$.

33. а) Решите уравнение

$$2 \sin x - \sqrt{2} \cos^2 x = 2 \sin^3 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ:

34. Решите уравнение

$$x - 5\sqrt{x-2} + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{10}; \sqrt{326}]$.

Ответ: а) 3; 18; б) 18.

Глава 2

Образцы заданий 2017 года

1. а) Решите уравнение

$$8^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 2^{5-x} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_5 2; \log_5 20]$.

Решение. а) Запишем уравнение в виде

$$2^{3x} - 18 \cdot 2^x + \frac{32}{2^x} = 0$$

и умножим обе части уравнения на $2^x > 0$, получим:

$$\begin{aligned} 2^{4x} - 18 \cdot 2^{2x} + 32 = 0 &\iff (2^{2x} - 2) \cdot (2^{2x} - 16) = 0 \iff \begin{cases} 2^{2x} - 2 = 0 \\ 2^{2x} - 16 = 0 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} 2^{2x} = 2^1 \\ 2^{2x} = 2^4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

б) Так как $\log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} < \log_5 20 < \log_5 25 = 2$, то указанному промежутку принадлежит корень $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: а) $\frac{1}{2}$; 2; б) $\frac{1}{2}$.

Комментарий.

А. При решении показательных уравнений совокупности мы учли равносильный переход

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x),$$

который верен ввиду монотонности показательной функции $y = a^x$.

Б. При решении уравнения $2^{4x} - 18 \cdot 2^{2x} + 32 = 0$ можно сделать замену переменной $2^{2x} = t$. Получим квадратное уравнение $t^2 - 18t + 32 = 0$, корнями которого являются числа $t_1 = 2$, $t_2 = 16$. Далее необходимо сделать обратную замену.

2. а) Решите уравнение $\cos^2(\pi - x) - \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

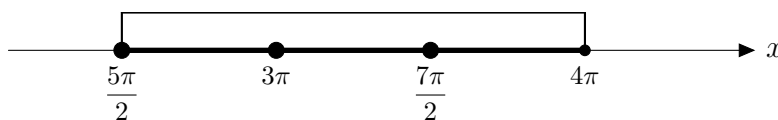
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение. а) Так как $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$, то имеем:

$$\begin{aligned} (-\cos x)^2 - (-\cos x) = 0 &\iff \cos^2 x + \cos x = 0 \iff \cos x (\cos x + 1) = 0 \iff \\ &\iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

б) С помощью числовой прямой находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{5\pi}{2}, x = 3\pi, x = \frac{7\pi}{2}.$$

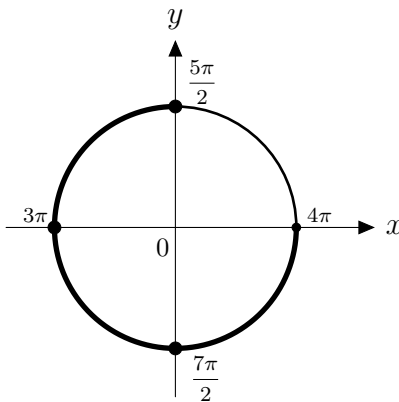


Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pi + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}$; 3π ; $\frac{7\pi}{2}$.

Комментарий.

А. Отбор корней можно сделать, используя окружность. Для этого отметим на единичной окружности точки $\frac{5\pi}{2}$ и 4π и выделим часть дуги, на которой требуется найти корни. Указанной дуге окружности принадлежат три корня:

$$x = \frac{5\pi}{2}, x = 3\pi, x = \frac{7\pi}{2}.$$



Б. Отбор корней можно сделать, используя двойные неравенства.

Решив неравенство

$$\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq 4\pi \iff \frac{5}{2} \leq \frac{1}{2} + n \leq 4 \iff 2 \leq n \leq \frac{7}{2} \iff n \in \{2; 3\},$$

находим корни

$$x = \frac{5\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{2}.$$

Решив неравенство

$$\frac{5\pi}{2} \leq \pi + 2\pi k \leq 4\pi \iff \frac{5}{2} \leq 1 + 2k \leq 4 \iff \frac{3}{4} \leq k \leq \frac{3}{2} \iff k = 1,$$

находим корень $x = 3\pi$.

В. Использовать двойные неравенства удобно, в случае если серий решений у уравнения немного. Тригонометрический круг удобен, когда длина отрезка, на котором ищутся корни, не превышает полного оборота, то есть 2π .

3. а) Решите уравнение

$$\log_4(2^{2x} - \sqrt{3} \cos x - \sin 2x) = x.$$

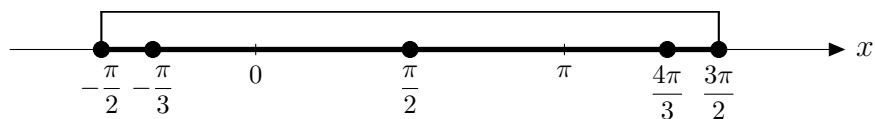
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Согласно равносильному переходу $\log_a f(x) = g(x) \iff f(x) = a^{g(x)}$, имеем:

$$\begin{aligned} \log_4(2^{2x} - \sqrt{3} \cos x - \sin 2x) = x &\iff 2^{2x} - \sqrt{3} \cos x - \sin 2x = 4^x \iff \\ &\iff -\sqrt{3} \cos x - \sin 2x = 0 \iff 2 \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos x = 0 \iff \\ &\iff \cos x (2 \sin x + \sqrt{3}) = 0 \iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

б) С помощью числовой прямой находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{4\pi}{3}, x = \frac{3\pi}{2}.$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{4\pi}{3} + 2\pi m$, $n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$.

Комментарий.

При решении исходного уравнения мы не написали явно ОДЗ: $2^{2x} - \sqrt{3} \cos x - \sin 2x > 0$, так как из уравнения $2^{2x} - \sqrt{3} \cos x - \sin 2x = 4^x$ оно следует автоматически (правая часть положительна).

4. а) Решите уравнение

$$25^{\sqrt{3} \cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2 \cos(\pi + x)}.$$

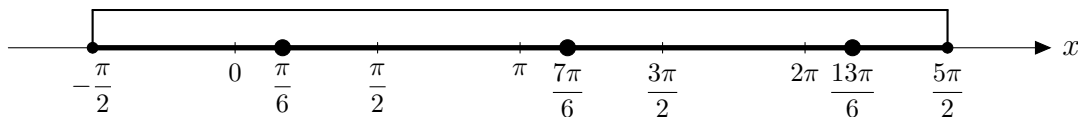
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Так как $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$, то имеем:

$$\begin{aligned} 25^{\sqrt{3} \cos(\frac{3\pi}{2} + x)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2 \cos(\pi + x)} &\iff 5^{2\sqrt{3} \sin x} = 5^{2 \cos x} \iff 2\sqrt{3} \sin x = 2 \cos x \iff \\ &\iff \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

б) С помощью числовой прямой находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{13\pi}{6}.$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.

Комментарий.

Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$, где $a \neq 0, b \neq 0$ называется *однородным тригонометрическим уравнением первой степени*. Для такого уравнения, очевидно, $\cos x \neq 0$ иначе $\sin x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Поделив обе части уравнения на $\cos x \neq 0$, получим равносильное уравнение $\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}$.

5. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x} = 9^{2 \sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -2\pi]$.

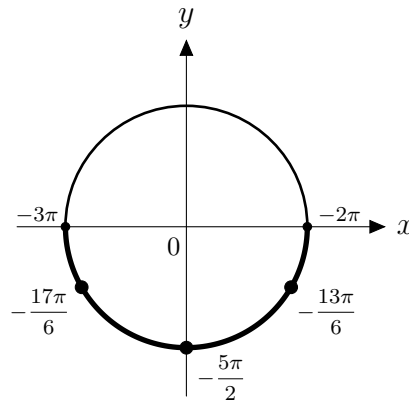
Решение. а) Имеем:

$$9^{-2 \cos x} = 9^{2 \sin 2x} \iff -2 \cos x = 2 \sin 2x \iff 4 \sin x \cos x + 2 \cos x = 0 \iff$$

$$2 \cos x (2 \sin x + 1) = 0 \iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{5\pi}{2}, x = -\frac{13\pi}{6}, x = -\frac{17\pi}{6}.$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{7\pi}{6} + 2\pi m$, $n, k, m \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{13\pi}{6}$; $-\frac{17\pi}{6}$.

6. а) Решите уравнение

$$\frac{9^{\sin 2x} - 3^{2\sqrt{2} \sin x}}{\sqrt{11 \sin x}} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

Решение. а) Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 9^{\sin 2x} - 3^{2\sqrt{2} \sin x} = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 9^{\sin 2x} = 9^{\sqrt{2} \sin x} \\ \sin x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \sin x \\ \sin x > 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2 \cos x = \sqrt{2} \\ \sin x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \sin x > 0 \end{cases} \iff x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) Решив двойное неравенство

$$\frac{7\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq 5\pi \iff \frac{13}{8} \leq n \leq \frac{19}{8} \iff n = 2,$$

находим корень, принадлежащий заданному промежутку: $x = \frac{17\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{4}$.

Комментарий.

При решении уравнения $2 \sin x \cos x = \sqrt{2} \sin x$ мы поделили обе части на $\sin x$. Такое деление возможно, поскольку в нашем случае $\sin x > 0$.

7. а) Решите уравнение

$$\log_8(7\sqrt{3} \sin x - \cos 2x - 10) = 0.$$

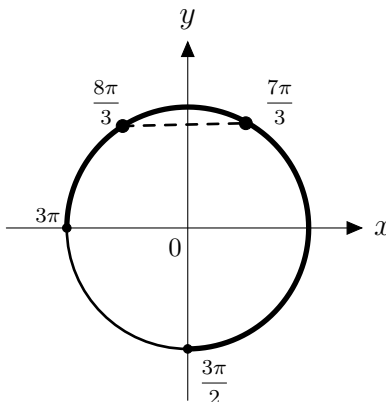
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение. а) Согласно равносильному переходу $\log_a f(x) = g(x) \iff f(x) = a^{g(x)}$, имеем:

$$\begin{aligned} \log_8(7\sqrt{3} \sin x - \cos 2x - 10) = 0 &\iff 7\sqrt{3} \sin x - \cos 2x - 10 = 1 \iff \\ \iff 2 \sin^2 x + 7\sqrt{3} \sin x - 12 = 0 &\iff (2 \sin x - \sqrt{3})(\sin x + 4\sqrt{3}) = 0 \iff \\ \iff \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = -4\sqrt{3} \end{cases} &\iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{7\pi}{3}, x = \frac{8\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}$.

Комментарий.

А. При решении исходного уравнения мы не написали явно ОДЗ: $7\sqrt{3}\sin x - \cos 2x - 10 > 0$, так как из уравнения $7\sqrt{3}\sin x - \cos 2x - 10 = 1$ оно следует автоматически (правая часть положительна).

Б. При решении задачи мы воспользовались формулой $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. Важно знать все три формулы для косинуса двойного угла:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

В. Уравнение $\sin x = -4\sqrt{3}$ не имеет действительных корней, так как $-4\sqrt{3} < -1$.

8. а) Решите уравнение

$$4 \cdot 4^{2\sin x} - 9 \cdot 4^{\sin x} + 2 = 0.$$

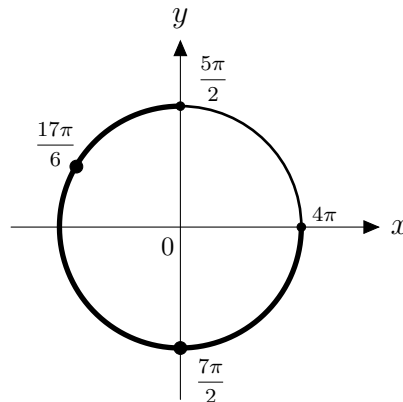
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение. а) Раскладывая левую часть уравнения на множители, получим:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 4^{2\sin x} - 9 \cdot 4^{\sin x} + 2 = 0 &\iff (4 \cdot 4^{\sin x} - 1)(4^{\sin x} - 2) = 0 \iff \begin{cases} 4^{\sin x} = 4^{-1} \\ 4^{\sin x} = 2 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} 4^{\sin x} = 4^{-1} \\ 2^{2\sin x} = 2^1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{7\pi}{2}, x = \frac{17\pi}{6}.$$



Ответ: а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{17\pi}{6}$.

Комментарий.

А. При решении уравнения можно сделать замену переменной $4^{\sin x} = t$. Получим квадратное уравнение $4t^2 - 9t + 2 = 0$, корнями которого являются числа $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = 2$. Далее необходимо сделать обратную замену.

9. а) Решите уравнение

$$6 \log_8^2(\cos x) - 5 \log_8(\cos x) - 1 = 0.$$

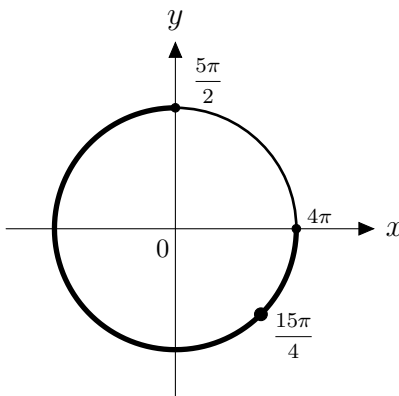
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение. а) Раскладывая левую часть уравнения на множители, получим:

$$\begin{aligned} 6 \log_8^2(\cos x) - 5 \log_8(\cos x) - 1 = 0 &\iff (6 \log_8(\cos x) + 1)(\log_8(\cos x) - 1) = 0 \iff \\ &\iff \begin{cases} \log_8(\cos x) = -\frac{1}{6} \\ \log_8(\cos x) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x = 8 \end{cases} \iff x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{15\pi}{4}.$$



Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{15\pi}{4}$.

Комментарий.

А. При решении уравнения можно сделать замену переменной $\log_8(\cos x) = t$. Получим квадратное уравнение $6t^2 - 5t - 1 = 0$, корнями которого являются числа $t_1 = -\frac{1}{6}$, $t_2 = 1$. Далее необходимо сделать обратную замену.

Б. Уравнение $\log_a f(x) = b \iff f(x) = a^b$.

$$\text{В. } 8^{-\frac{1}{6}} = 2^{-\frac{3}{6}} = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Г. Уравнение $\cos x = 8$ не имеет действительных корней, так как $8 > 1$.

10. а) Решите уравнение

$$16^{\sin x} + 16^{\sin(x+\pi)} = \frac{17}{4}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение. а) Так как по формулам приведения $\sin(\pi + x) = -\sin x$, то имеем:

$$\begin{aligned} 16^{\sin x} + 16^{-\sin x} = \frac{17}{4} &\iff 16^{\sin x} + \frac{1}{16^{\sin x}} = \frac{17}{4} \iff 4 \cdot 16^{2\sin x} - 17 \cdot 16^{\sin x} + 4 = 0 \iff \\ &\iff (4 \cdot 16^{\sin x} - 1)(16^{\sin x} - 4) = 0 \iff \begin{cases} 16^{\sin x} = \frac{1}{4} \\ 16^{\sin x} = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 4^{2\sin x} = 4^{-1} \\ 4^{2\sin x} = 4^1 \end{cases} \iff \\ &\iff \sin x = \pm \frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

б) Решив двойные неравенства

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + \pi n \leq 2\pi \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \pi k \leq 2\pi,$$

находим $n \in \{0; 1, 2\}$, $k \in \{0; 1\}$, откуда

$$x = -\frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6}.$$

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$.

Комментарий.

А. При решении уравнения $16^{2\sin x} - 17 \cdot 16^{\sin x} + 4 = 0$ можно сделать замену переменной $16^{\sin x} = t$. Получим квадратное уравнение $4t^2 - 17t + 4 = 0$, корнями которого являются числа $t_1 = \frac{1}{4}$, $t_2 = 4$. Далее необходимо сделать обратную замену.

Б. При решении уравнений $\sin x = \pm \frac{1}{2}$ мы объединили четыре серии решения в две. Это сделано для более простого отбора корней.

11. а) Решите уравнение

$$\log_3 (x^2 - 24x) = 4.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_2 0.1; 12\sqrt{5}]$.

Решение. а) Согласно равносильному переходу $\log_a f(x) = b \iff f(x) = a^b$, имеем:

$$\log_3 (x^2 - 24x) = 4 \iff x^2 - 24x = 81 \iff x^2 - 24x - 81 = 0 \iff \begin{cases} x = -3 \\ x = 27 \end{cases}.$$

б) Так как $\log_2 0.1 = -\log_2 10 < -\log_2 8 = -3 < 12\sqrt{5} = \sqrt{720} < \sqrt{729} = 27$, то заданному отрезку принадлежит корень $x = -3$.

Ответ: а) -3 ; 27 ; б) -3 .

12. а) Решите уравнение

$$2x \cos x - 8 \cos x + x - 4 = 0.$$

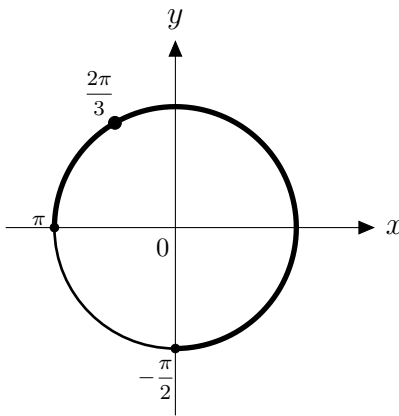
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Решение. а) Раскладывая левую часть уравнения на множители, получим:

$$\begin{aligned} 2x \cos x - 8 \cos x + x - 4 = 0 &\iff 2 \cos x \cdot (x - 4) + x - 4 = 0 \iff \\ &\iff (x - 4)(2 \cos x + 1) = 0 \iff \begin{cases} x = 4 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4 \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

б) С помощью числовой окружности находим корень, принадлежащий заданному отрезку:

$$x = \frac{2\pi}{3}.$$



Ответ: а) 4 ; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{2\pi}{3}$.

Комментарий.

А. Функция $y = \arccos x$ — ни четная, ни нечетная. Для отрицательного значения аргумента имеем

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

Б. Число $x = 4$ не принадлежит указанному промежутку, так как $4 > \pi \approx 3.1415\dots$

13. а) Решите уравнение

$$\log_2^2 x^2 - 16 \log_2(2x) + 31 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[3; 6]$.

Решение. а) Так как $x > 0$, то $\log_2 x^2 = 2 \log_2 x$, $\log_2(2x) = 1 + \log_2 x$. Имеем:

$$\begin{aligned} (2 \log_2 x)^2 - 16(1 + \log_2 x) + 31 = 0 &\iff 4 \log_2^2 x - 16 \log_2 x + 15 = 0 \iff \\ \iff (2 \log_2 x - 3)(2 \log_2 x - 5) = 0 &\iff \begin{cases} \log_2 x = \frac{3}{2} \\ \log_2 x = \frac{5}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2^{\frac{3}{2}} \\ x = 2^{\frac{5}{2}} \end{cases}. \end{aligned}$$

б) Так как $\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 8 < 3^2 = 9$, $\left(2^{\frac{5}{2}}\right)^2 = 32 < 6^2 = 36$, то заданному отрезку принадлежит корень

$$x = 2^{\frac{5}{2}}.$$

Ответ: а) $2^{\frac{3}{2}}$; $2^{\frac{5}{2}}$; б) $2^{\frac{5}{2}}$.

Комментарий.

А. В общем случае для четного показателя степени верна формула $\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|$. В нашем случае, так как $x > 0$, то $|x| = x$.

Б. При решении уравнения $4 \log_2^2 x - 16 \log_2 x + 15 = 0$ можно сделать замену переменной $\log_2 x = t$. Получим квадратное уравнение $4t^2 - 16t + 15 = 0$, корнями которого являются числа $t_1 = \frac{3}{2}$, $t_2 = \frac{5}{2}$. Далее необходимо сделать обратную замену.

Задачи для самостоятельного решения

14. а) Решите уравнение

$$27^x - 4 \cdot 3^{x+2} + 3^{5-x} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_7 4; \log_7 16]$.**Ответ:** а) $1; \frac{3}{2}$; б) $\frac{3}{2}$.

15. а) Решите уравнение

$$27^x - 28 \cdot 3^{x+1} + 3^{5-x} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{3}; \log_2 5]$.**Ответ:** а) $\frac{1}{2}; 2$; б) 2 .16. а) Решите уравнение $2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - \sin(\pi - x) = 0$.б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.**Ответ:** а) $\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6}; 3\pi; 4\pi$.17. а) Решите уравнение $\sin^3 \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) + \cos^2(\pi - x) = 0$.б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi \right]$.**Ответ:** а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 2\pi$.

18. а) Решите уравнение

$$\log_9(3^{2x} + 5\sqrt{2} \sin x - 6 \cos^2 x - 2) = x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$.**Ответ:** а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}$.

19. а) Решите уравнение

$$\log_4(2^{2x} - \sqrt{3} \cos x - 6 \sin^2 x) = x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$.**Ответ:** а) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}$.

20. а) Решите уравнение

$$3^{2 \sin(x + \frac{\pi}{2})} = \left(\frac{1}{9} \right)^{\cos(\frac{\pi}{2} - x)}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}$.

21. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin(x+\pi)} = 2^{2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{3}$.

22. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{\sin(x+\pi)} = 7^{2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{10\pi}{3}; \frac{13\pi}{3}$.

23. а) Решите уравнение

$$2^{4\sqrt{3}\sin x} = 2^{-4\sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\pi; 2\pi; 3\pi; \frac{7\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}$.

24. а) Решите уравнение

$$49^{\sin x} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-\sqrt{2}\sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; 3\pi; \frac{9\pi}{4}$.

25. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{125}\right)^{-\cos x} = 5^{\sqrt{3}\sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{3}; -\frac{4\pi}{3}$.

26. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{\cos x} = 7^{\sqrt{2}\sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2}; -\frac{3\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}$.

27. а) Решите уравнение

$$7^{2 \cos x} = 49^{\sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{13\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}$.

28. а) Решите уравнение

$$\frac{4^{\sin 2x} - 2^{2\sqrt{3} \sin x}}{\sqrt{7} \sin x} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{13\pi}{2}; -5\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{35\pi}{6}$.

29. а) Решите уравнение

$$\log_{13}(\cos 2x - 9\sqrt{2} \cos x - 8) = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}$.

30. а) Решите уравнение

$$\log_7(2 \cos^2 x + 3 \cos x - 1) = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$.

31. а) Решите уравнение

$$\log_3 \left(\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \sin 2x + 81 \right) = 4.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-3\pi; -2\pi; -\frac{13\pi}{4}; -\frac{11\pi}{4}$.

32. а) Решите уравнение

$$81^{\cos x} - 12 \cdot 9^{\cos x} + 27 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $2\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-4\pi; -\frac{11\pi}{3}$.

33. а) Решите уравнение

$$9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $3\pi; \frac{11\pi}{3}$.

34. а) Решите уравнение

$$16^{\sin x} - 6 \cdot 4^{\sin x} + 8 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{17\pi}{6}$.

35. а) Решите уравнение

$$8 \cdot 16^{\cos x} - 6 \cdot 4^{\cos x} + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $3\pi; \frac{8\pi}{3}$.

36. а) Решите уравнение

$$27 \cdot 81^{\sin x} - 12 \cdot 9^{\sin x} + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}$.

37. а) Решите уравнение

$$4 \log_9^2(2 \sin x) - 5 \log_9(2 \sin x) + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}$.

38. а) Решите уравнение

$$3 \log_8^2(\sin x) - 5 \log_8(\sin x) - 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{6}$.

39. а) Решите уравнение

$$2 \log_2^2(\sin x) - 5 \log_2(\sin x) - 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{4}$.

40. а) Решите уравнение

$$2 \log_3^2(2 \cos x) - 7 \log_3(2 \cos x) + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{6}$; $-\frac{11\pi}{6}$.

41. а) Решите уравнение

$$2 \log_2^2(2 \cos x) - 9 \log_2(2 \cos x) + 4 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{4}$.

42. а) Решите уравнение

$$2 \log_3^2(2 \cos x) - 5 \log_3(2 \cos x) + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$.

43. а) Решите уравнение

$$2 \log_4^2(4 \sin x) - 5 \log_4(4 \sin x) + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

44. а) Решите уравнение

$$16^{\cos x} + 16^{\cos(\pi-x)} = \frac{17}{4}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}$.

45. а) Решите уравнение

$$9^{\sin x} + 9^{\sin(\pi+x)} = \frac{10}{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{6}; -\frac{17\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}$.

46. а) Решите уравнение

$$4^{\sin x} + 4^{\sin(\pi+x)} = \frac{5}{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}; \frac{23\pi}{6}$.

47. а) Решите уравнение

$$0.4^{\sin x} + 2.5^{\sin x} = 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; 3\pi$.

48. а) Решите уравнение

$$\log_2(x^2 - 14x) = 5.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 0.1; 5\sqrt{10}]$.

Ответ: а) $-2; 16$; б) -2 .

49. а) Решите уравнение

$$\log_3(x^2 - 2x) = 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_2 0.2; \log_2 5]$.

Ответ: а) $-1; 3$; б) -1 .

50. а) Решите уравнение

$$2x \sin x - 6 \sin x + 3\sqrt{3} - \sqrt{3}x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Ответ: а) $3; \frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; 3$.

51. а) Решите уравнение

$$2x \cos 2x - 14 \cos 2x - x + 7 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $7; \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}; \frac{23\pi}{6}$.

52. а) Решите уравнение

$$\log_4^2 x^2 - 16 \log_4(4x) + 23 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[8; 256]$.

Ответ: а) 2; 128; б) 128.

53. а) Решите уравнение

$$\log_3^2 x^3 - 3 \log_3(9x^3) + 8 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 3]$.

Ответ: а) $3^{\frac{1}{3}}; 3^{\frac{2}{3}}$; б) $3^{\frac{2}{3}}$.

Глава 3

Образцы заданий 2016 года

1. а) Решите уравнение

$$8^x - 3 \cdot 4^x - 2^x + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1.5; 3]$.

Решение. а) Имеем:

$$\begin{aligned} 8^x - 3 \cdot 4^x - 2^x + 3 = 0 &\iff 2^x(4^x - 1) - 3(4^x - 1) = 0 \iff \\ (4^x - 1)(2^x - 3) = 0 &\iff \begin{cases} 4^x - 1 = 0 \\ 2^x - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_2 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

б) Так как $1.5 = \log_2 2^{1.5} = \log_2 \sqrt{8} < \log_2 \sqrt{9} = \log_2 3 < \log_2 8 = 3$, то указанному отрезку принадлежит корень $x = \log_2 3$.

Ответ: а) 0; $\log_2 3$; б) $\log_2 3$.

2. а) Решите уравнение

$$\cos 2x + \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = 0.75.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

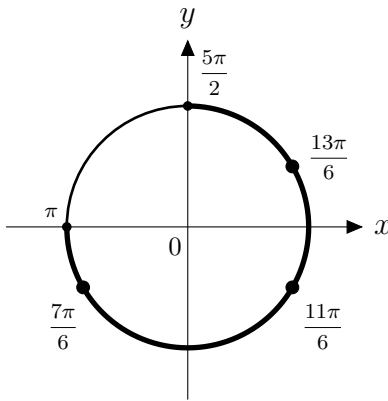
Решение. а) Так как $\cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \sin x$ и $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, то имеем:

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = 0.75 &\iff \cos 2x + \sin^2 x = 0.75 \iff \cos 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{3}{4} \\ &\iff \cos 2x = \frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие указанному отрезку:

$$x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6}, x = \frac{13\pi}{6}.$$

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.



3. а) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

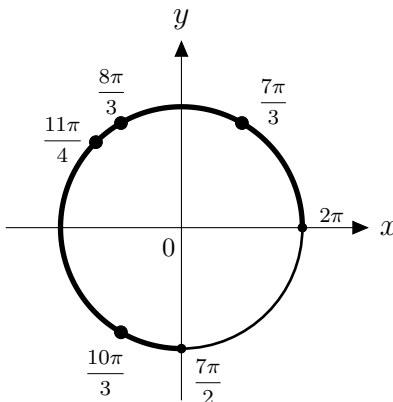
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg} x + 1) - 3(\operatorname{tg} x + 1) = 0 &\iff (\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0 \iff \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \\ \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{7\pi}{3}, x = \frac{8\pi}{3}, x = \frac{11\pi}{4}, x = \frac{10\pi}{3}.$$



Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n; \pm\frac{\pi}{3} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{4}; \frac{10\pi}{3}$.

4. а) Решите уравнение

$$2 \log_2^2(2 \sin x) - 7 \log_2(2 \sin x) + 3 = 0.$$

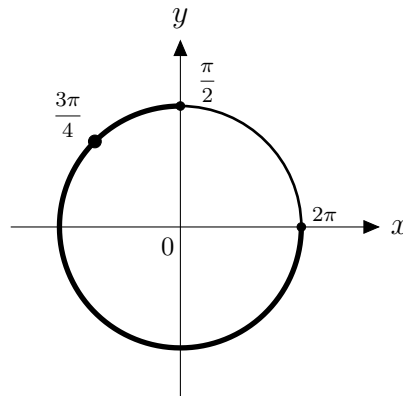
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение. а) Имеем:

$$\begin{aligned} 2 \log_2^2(2 \sin x) - 7 \log_2(2 \sin x) + 3 = 0 &\iff (2 \log_2(2 \sin x) - 1)(\log_2(2 \sin x) - 3) = 0 \iff \\ &\iff \begin{cases} \log_2(2 \sin x) = \frac{1}{2} \\ \log_2(2 \sin x) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{3\pi}{4}.$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4}$.

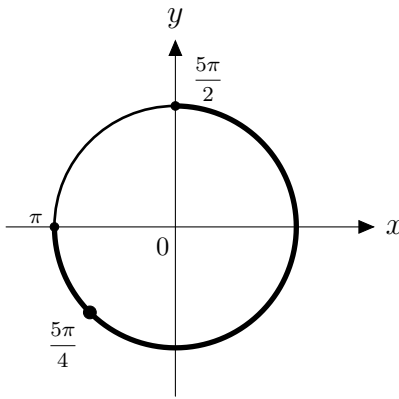
5. а) Решите уравнение

$$2 \sin^2 x = 3\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Так как $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то имеем:

$$\begin{aligned} 2(1 - \cos^2 x) = 3\sqrt{2} \cos x + 4 &\iff 2 \cos^2 x + 3\sqrt{2} \cos x + 2 = 0 \iff \begin{cases} \cos x = -\sqrt{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ &\iff x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$



б) С помощью числовой окружности находим корень, принадлежащий заданному отрезку:

$$x = \frac{5\pi}{4}.$$

Ответ: а) $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{4}$.

6. а) Решите уравнение

$$2 \cos 2x = 4 \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi \right]$.

Решение. а) Так как $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, $\sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \cos x$, то имеем:

$$\begin{aligned} 2(2 \cos^2 x - 1) = 4 \cos x + 1 &\iff 4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3 = 0 \iff \begin{cases} \cos x = \frac{3}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ &\iff x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

б) С помощью числовой окружности находим корень, принадлежащий заданному отрезку:

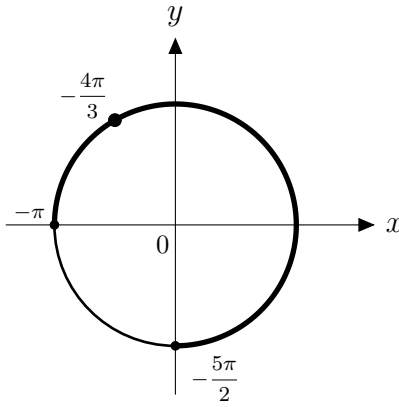
$$x = -\frac{4\pi}{3}.$$

Ответ: а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{4\pi}{3}$.

7. а) Решите уравнение

$$2^{4 \cos x} + 3 \cdot 2^{2 \cos x} - 10 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

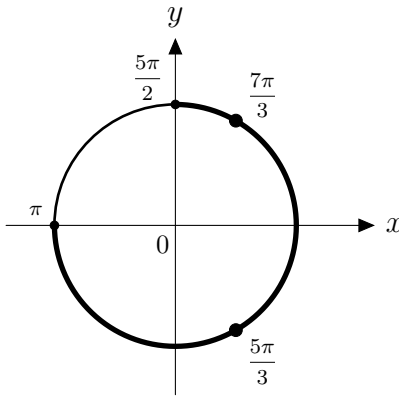


Решение. а) Раскладывая квадратное относительно $t = 2^{2\cos x}$ уравнение на множители, получим:

$$(2^{2\cos x} + 5)(2^{2\cos x} - 2) = 0 \iff \begin{cases} 2^{2\cos x} = -5 \\ 2^{2\cos x} = 2 \end{cases} \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{5\pi}{3}, x = \frac{7\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}$.

8. а) Решите уравнение

$$\sin 2x + 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right]$.

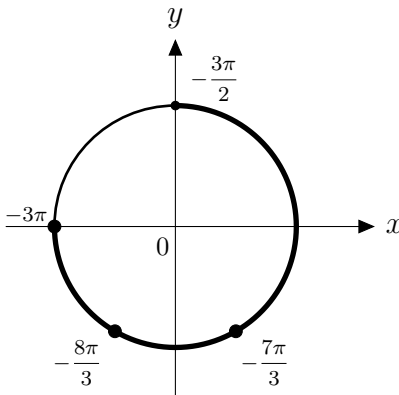
Решение. а) Так как $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то имеем:

$$2 \sin x \cos x + 2 \sin x = \sqrt{3}(\cos x + 1) \iff (\cos x + 1)(2 \sin x + \sqrt{3}) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -3\pi, x = -\frac{7\pi}{3}, x = -\frac{8\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\pi + 2\pi n$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) -3π ; $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{3}$.

9. а) Решите уравнение

$$2 \log_9^2 x - 3 \log_9 x + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{10}; \sqrt{99}]$.

Решение. а) Раскладывая квадратное относительно $t = \log_9 x$ уравнение на множители, получим:

$$(2 \log_9 x - 1)(\log_9 x - 1) = 0 \iff \begin{cases} \log_9 x = \frac{1}{2} \\ \log_9 x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 9^{\frac{1}{2}} = 3 \\ x = 9^1 = 9 \end{cases}.$$

б) Так как $3 = \sqrt{9} < \sqrt{10}$ и $\sqrt{10} < \sqrt{81} = 9 < \sqrt{99}$, то указанному отрезку принадлежит корень $x = 9$.

Ответ: а) 3; 9; б) 9.

Задачи для самостоятельного решения

10. а) Решите уравнение

$$8^x - 7 \cdot 4^x - 2^{x+4} + 112 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_2 5; \log_2 11]$.

Ответ: а) 2; $\log_2 7$; б) $\log_2 7$.

11. а) Решите уравнение

$$27^x - 5 \cdot 9^x - 3^{x+2} + 45 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_3 4; \log_3 10]$.

Ответ: а) 1; $\log_3 5$; б) $\log_3 5$.

12. а) Решите уравнение

$$27^x - 2 \cdot 9^x - 3^x + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0.5; 2]$.

Ответ: а) 0; $\log_3 2$; б) $\log_3 2$.

13. а) Решите уравнение $\cos 2x + \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = 0.25$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right]$.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}$.

14. а) Решите уравнение $\cos 2x + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 0.5$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right]$.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{4}; -\frac{11\pi}{4}; -\frac{9\pi}{4}$.

15. а) Решите уравнение $\cos 2x + 0.75 = \cos^2 x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right]$.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{3}; -\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}$.

16. а) Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi n; \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}; \frac{9\pi}{4}; \frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}$.

17. а) Решите уравнение

$$2 \log_4^2(4 \cos x) - 7 \log_4(4 \cos x) + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Ответ: а) $2\pi n; \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4}; 2\pi$.

18. а) Решите уравнение

$$2 \log_3^2(2 \cos x) - 5 \log_3(2 \cos x) + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$.

19. а) Решите уравнение

$$2 \cos^2 x + 1 = 2\sqrt{2} \cos \left(\frac{3\pi}{2} - x \right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}; \frac{15\pi}{4}$.

20. а) Решите уравнение

$$2 \sin^2 x + 4 = 3\sqrt{3} \sin \left(\frac{3\pi}{2} + x \right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

21. а) Решите уравнение

$$8 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \cos \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = 9.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$.

22. а) Решите уравнение

$$8 \cos^2 x + 2\sqrt{3} \sin \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = 9.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{6}; -\frac{11\pi}{6}$.

23. а) Решите уравнение

$$2 \cos 2x + 4 \sin x + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{19\pi}{6}; \frac{23\pi}{6}$.

24. а) Решите уравнение

$$3 \cos 2x - 5 \sin x + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.

25. а) Решите уравнение

$$\cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cos \left(\frac{3\pi}{2} - x \right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{8\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}$.

26. а) Решите уравнение

$$3 \cos 2x + 11 \sin x + 4 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}$.

27. а) Решите уравнение

$$2^{4 \sin x} + 3 \cdot 2^{2 \sin x} - 10 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.

28. а) Решите уравнение $3^{4 \cos x} - 4 \cdot 3^{2 \cos x} + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$.

29. а) Решите уравнение

$$\sin 2x = 2 \sin x + \sin \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right]$.

Ответ: а) $2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-4\pi; -\frac{17\pi}{6}$.

30. а) Решите уравнение

$$\sin 2x + \sqrt{2} \sin x = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \sqrt{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

Ответ: а) $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$.

31. а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \sin x - 2 \sin \left(x - \frac{3\pi}{2} \right) + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}$.

32. а) Решите уравнение

$$6 \log_8^2 x - 5 \log_8 x + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 2.5]$.

Ответ: а) 2; $\sqrt{8}$; б) 2.

33. а) Решите уравнение

$$3 \log_8^2 x - 4 \log_8 x + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\sqrt{5}; \sqrt{65}]$.

Ответ: а) 2; 8; б) 8.

Глава 4

Образцы заданий 2015 года

1. Решите уравнение

$$\sin 2x + \sqrt{2} \sin x = 2 \cos x + \sqrt{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Так как $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то имеем:

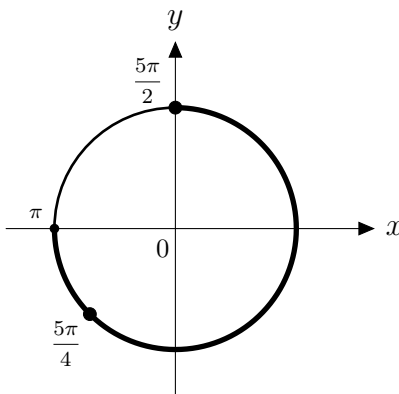
$$2 \sin x \cos x + \sqrt{2} \sin x = 2 \cos x + \sqrt{2} \iff \sqrt{2} \sin x (\sqrt{2} \cos x + 1) - \sqrt{2} (\sqrt{2} \cos x + 1) = 0$$

$$\iff (\sqrt{2} \cos x + 1) (\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2}) = 0 \iff \begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = 1 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{5\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{2}.$$



Ответ: а) $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$.

2. Решите уравнение

$$2 \cos^3 x - \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0.$$

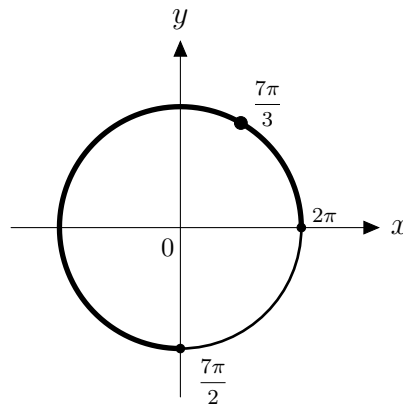
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Имеем:

$$\begin{aligned} 2 \cos^3 x - \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0 &\iff \cos^2 x (2 \cos x - 1) + 2 \cos x - 1 = 0 \iff \\ &\iff (2 \cos x - 1)(\cos^2 x + 1) = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

б) С помощью числовой окружности находим корень, принадлежащий заданному отрезку:

$$x = \frac{7\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}$.

3. Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \sqrt{3}.$$

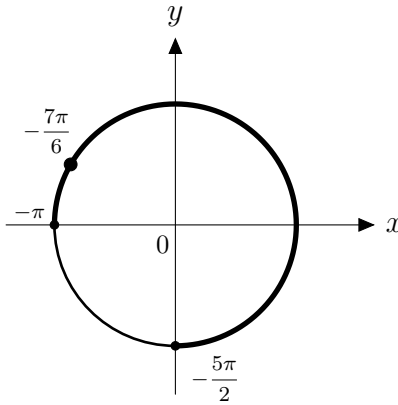
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение. а) Так как $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ и $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то имеем:

$$\frac{2 \sin x \cos x}{-\sin x} = \sqrt{3} \iff \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корень, принадлежащий заданному отрезку:

$$x = -\frac{7\pi}{6}.$$



Ответ: а) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

4. Решите уравнение

$$2 \cos 2x + 4 \cos \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) + 1 = 0.$$

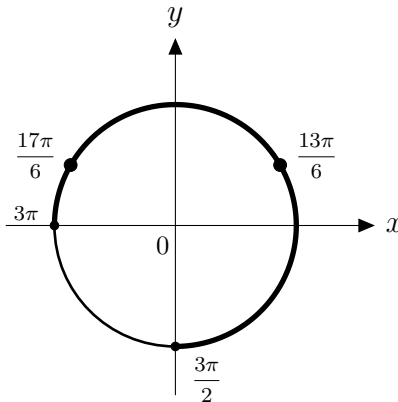
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$.

Решение. а) Так как $\cos \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = -\sin x$ и $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то имеем:

$$\begin{aligned} 2(1 - 2\sin^2 x) - 4\sin x + 1 &= 0 \iff 4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0 \iff \\ \iff (2\sin x + 3)(2\sin x - 1) &= 0 \iff \begin{cases} \sin x = -\frac{3}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{13\pi}{6}, x = \frac{17\pi}{6}.$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}$.

5. Решите уравнение

$$4 \sin^2 x = \operatorname{tg} x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; 0]$.

Решение. а) Область допустимых значений переменной x задается условием $\cos x \neq 0$, то есть $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Имеем:

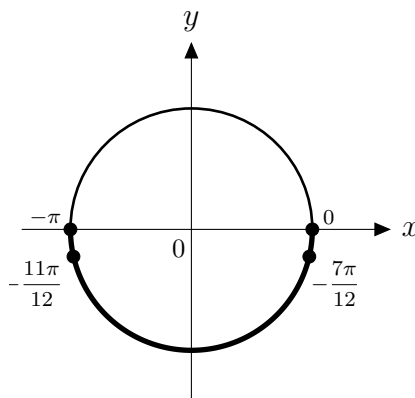
$$4 \sin^2 x = \operatorname{tg} x \iff 4 \sin^2 x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \implies 4 \sin^2 x \cdot \cos x - \sin x = 0 \iff$$

$$\iff \sin x(4 \sin x \cos x - 1) = 0 \iff \sin x(2 \sin 2x - 1) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\pi, x = -\frac{11\pi}{12}, x = -\frac{7\pi}{12}, x = 0.$$



Ответ: а) $\pi n; \frac{\pi}{12} + \pi k; \frac{5\pi}{12} + \pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi; -\frac{11\pi}{12}; -\frac{7\pi}{12}; 0$.

6. Решите уравнение

$$16^{\sin x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2 \sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

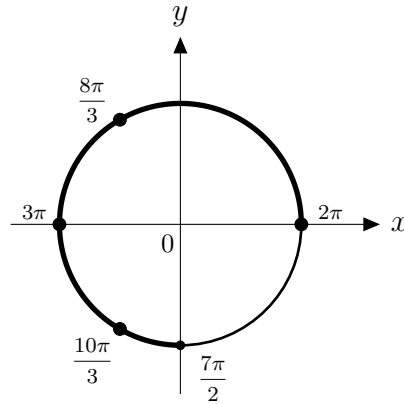
Решение. а) Имеем:

$$16^{\sin x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2 \sin 2x} \iff 4^{2 \sin x} = 4^{-2 \sin 2x} \iff 2 \sin x = -2 \sin 2x \iff$$

$$\iff \sin x(1 + 2 \cos x) = 0 \iff \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = 2\pi, x = 3\pi, x = \frac{8\pi}{3}, x = \frac{10\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; 3\pi; \frac{8\pi}{3}; \frac{10\pi}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения

7. а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \sin x - 2 \cos x + 1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.**Ответ:** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}$.

8. Решите уравнение

$$2 \cos^3 x + \sqrt{3} \cos^2 x + 2 \cos x + \sqrt{3} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.**Ответ:** а) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}$.

9. а) Решите уравнение

$$\sqrt{2} \sin^3 x - \sin^2 x + \sqrt{2} \sin x - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.**Ответ:** а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}$.

10. Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)} = -\sqrt{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.**Ответ:** а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}$.

11. а) Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x}{\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)} = \sqrt{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.**Ответ:** а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{4}$.

12. Решите уравнение

$$3 \cos 2x - 5 \sin x + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.

13. Решите уравнение

$$\cos 2x + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{4}$.

14. Решите уравнение

$$\cos 2x + 2\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4}$.

15. Решите уравнение

$$2 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin \left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 4 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{19\pi}{6}$.

16. Решите уравнение

$$4 \cos^2 x + 8 \sin \left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 5 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{10\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{3}$.

17. Решите уравнение

$$8 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \cos x + 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{6}$; $-\frac{17\pi}{6}$.

18. Решите уравнение

$$4 \sin^2 x = -\sqrt{3} \operatorname{tg} x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; 0]$.

Ответ: а) $\pi n; -\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi; -\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}; 0$.

19. Решите уравнение

$$2 \cos^2 x = \operatorname{ctg} x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}$.

20. Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{\cos x} = 9^{2 \sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}$.

21. а) Решите уравнение

$$25^{\sin x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{2} \sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; \frac{9\pi}{4}; 3\pi$.

22. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{49}\right)^{\sin x} = 7^{2 \sin 2x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; \frac{8\pi}{3}; 3\pi$.

23. а) Решите уравнение

$$36^{\sin 2x} = 6^{2 \sin x}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) -3π .

Глава 5

Образцы заданий 2014 года

1. а) Решите уравнение

$$9^{\sin x} + 9^{-\sin x} = \frac{10}{3}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Решение. а) Сделаем замену $9^{\sin x} = t$, $t > 0$. Так как $9^{-\sin x} = \frac{1}{9^{\sin x}} = \frac{1}{t}$, то уравнение примет вид:

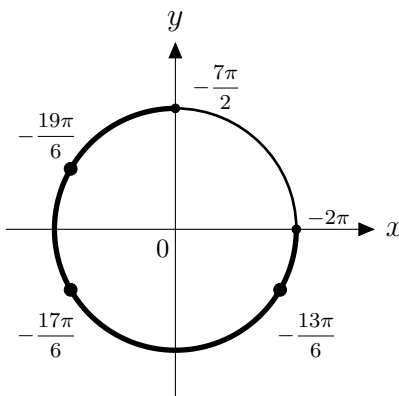
$$t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3} \iff 3t^2 - 10t + 3 = 0 \iff \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t = 3 \end{cases}.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\begin{cases} 9^{\sin x} = \frac{1}{3} \\ 9^{\sin x} = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 3^{2\sin x} = 3^{-1} \\ 3^{2\sin x} = 3^1 \end{cases} \iff \sin x = \pm \frac{1}{2} \iff x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{19\pi}{6}, x = -\frac{17\pi}{6}, x = -\frac{13\pi}{6}.$$



Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{6}, -\frac{17\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}$.

2. а) Решите уравнение $\cos x + \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right]$.

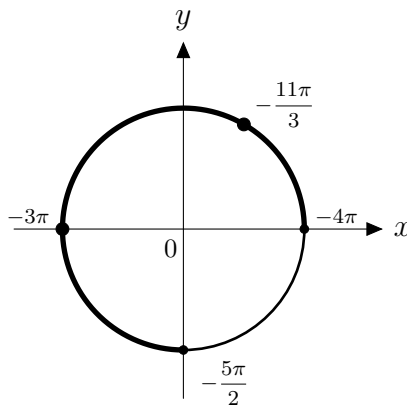
Решение. а) Так как $\sin \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) = -\cos \frac{x}{2}$, $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$, то уравнение примет вид:

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} + 1 = 0 \iff \cos \frac{x}{2} \left(2 \cos \frac{x}{2} - \sqrt{3} \right) = 0 \iff \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0 \\ \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -3\pi, x = -\frac{11\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\pi + \pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 4\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-3\pi; -\frac{11\pi}{3}$.

3. а) Решите уравнение $2\sqrt{3} \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) - \sin 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$.

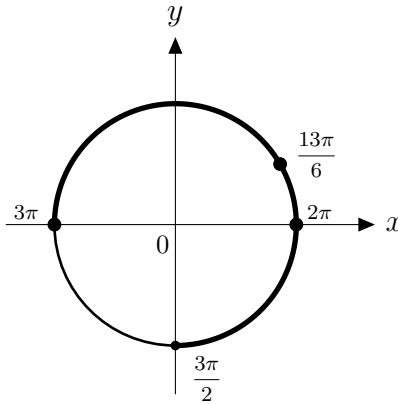
Решение. а) Так как $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$ и $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то имеем:

$$2\sqrt{3}\sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 0 \iff 2 \sin x (\sqrt{3} \sin x - \cos x) = 0 \iff \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sin x = 0 \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = 2\pi, x = 3\pi, x = \frac{13\pi}{6}.$$



Ответ: а) $\pi n, \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; 3\pi; \frac{13\pi}{6}$.

4. а) Решите уравнение $\frac{2}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \sin 2x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Область допустимых значений переменной x задается условием $\cos x \neq 0$. Так как $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то уравнение примет вид:

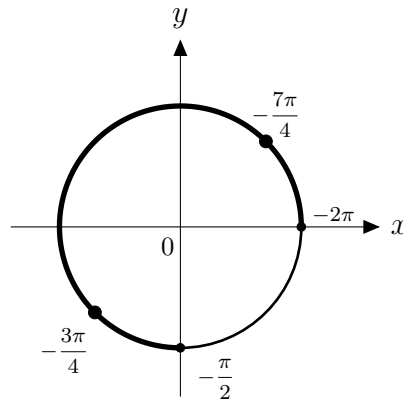
$$2 \cos^2 x = 2 \sin x \cos x \iff \cos x = \sin x \iff \operatorname{tg} x = 1 \iff x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{7\pi}{4}, x = -\frac{3\pi}{4}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}$.

5. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + (1 + \sqrt{3}) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$.



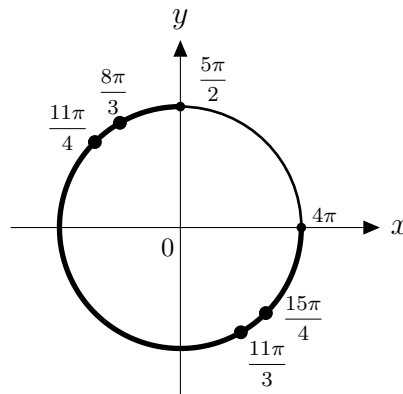
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение. а) Уравнение является квадратным относительно $t = \operatorname{tg} x$. По теореме обратной теореме Виета имеем:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

б) С помощью числовой окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{8\pi}{3}, x = \frac{11\pi}{4}, x = \frac{11\pi}{3}, x = \frac{15\pi}{4}.$$



Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n; -\frac{\pi}{3} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{8\pi}{3}; \frac{11\pi}{4}; \frac{11\pi}{3}; \frac{15\pi}{4}$.

6. а) Решите уравнение

$$3 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^{x+1} = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 3]$.

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде

$$3^{2x} - 7 \cdot 6^x + 12 \cdot 2^{2x} = 0$$

и поделим обе части на $2^{2x} \neq 0$. Получим:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 7 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 12 = 0 \iff \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 3 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \log_{\frac{3}{2}} 3 \\ x = \log_{\frac{3}{2}} 4 \end{cases}.$$

б) Так как $2 = \log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \log_{\frac{3}{2}} 2.25 < \log_{\frac{3}{2}} 3 < \log_{\frac{3}{2}} 3.375 = 3 < \log_{\frac{3}{2}} 4$, то указанному отрезку принадлежит $x = \log_{\frac{3}{2}} 3$.

Ответ: а) $\log_{\frac{3}{2}} 3$; $\log_{\frac{3}{2}} 4$; б) $\log_{\frac{3}{2}} 3$.

7. а) Решите уравнение $\log_5(2-x) = \log_{25} x^4$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_8 \frac{1}{82}; \log_9 8\right]$.

Решение. а) Имеем:

$$\log_5(2-x) = \log_{25} x^4 \iff \log_5(2-x) = \log_5 x^2 \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ 2-x = x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

б) Так как $\log_9 \frac{1}{82} = -\log_9 82 < -\log_9 81 = -2 < \log_9 8 < \log_9 9 = 1$, то указанному отрезку принадлежит корень $x = -2$.

Ответ: а) -2 ; 1 ; б) -2 .

8. а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sin x} + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

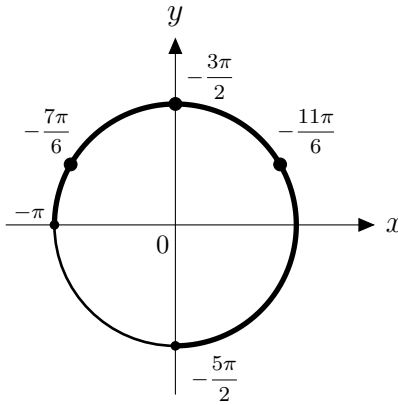
Решение. а) Умножим обе части уравнения на $\sin^2 x \neq 0$, получим:

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \iff \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{11\pi}{6}, x = -\frac{3\pi}{2}, x = -\frac{7\pi}{6}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{7\pi}{6}$.



Задачи для самостоятельного решения

9. а) Решите уравнение

$$4^{\sin x} + 4^{-\sin x} = \frac{5}{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6}; \frac{19\pi}{6}; \frac{23\pi}{6}$.

10. а) Решите уравнение

$$4^{\cos x} + 4^{-\cos x} = \frac{5}{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{8\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}; -\frac{5\pi}{3}$.

11. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\cos x} + \left(\frac{5}{2}\right)^{\cos x} = 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}$.

12. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{\sin x} + \left(\frac{5}{4}\right)^{\sin x} = 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; 3\pi$.

13. а) Решите уравнение

$$2 \cos x - 8 \sin \frac{x}{2} + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 4\pi n$; $\frac{5\pi}{3} + 4\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}$.

14. а) Решите уравнение

$$3 \cos x + 7 \cos \left(\frac{5\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + 2 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 4\pi n$; $-\frac{5\pi}{3} + 4\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3}$.

15. а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{3} \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{23\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$.

16. а) Решите уравнение $2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{15\pi}{4}$.

17. а) Решите уравнение $2 \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi\right]$.

Ответ: а) πn ; $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$; б) -4π ; $-\frac{15\pi}{4}$; -3π .

18. а) Решите уравнение $\frac{2\sqrt{3}}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sin 2x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$.

19. а) Решите уравнение $\frac{2\sqrt{3}}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = -\sin 2x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

20. а) Решите уравнение $2 \sin^2 x + (\sqrt{2} - 10) \sin x - 5\sqrt{2} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{4}; \frac{15\pi}{4}$.

21. а) Решите уравнение

$$5 \cdot 25^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 15^x + 15 \cdot 9^x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2; 3]$.

Ответ: а) $\log_{\frac{5}{3}} 3; \log_{\frac{5}{3}} 5$; б) $\log_{\frac{5}{3}} 3$.

22. а) Решите уравнение $2 \log_3(2 - x) = \log_9 x^8$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_{12} \frac{1}{145}; \log_{12} 11\right]$.

Ответ: а) $-2; 1$; б) -2 .

23. а) Решите уравнение $\log_4 x^4 = \log_2(7x + 8)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}; \log_2 257\right]$.

Ответ: а) $-1; 8$; б) 8 .

24. а) Решите уравнение $\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{3}{\cos x} + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Ответ: а) $2\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}; -2\pi; -\frac{5\pi}{3}$.

25. а) Решите уравнение $\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{5}{\sin x} + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$.

Глава 6

Образцы заданий 2013 года

1. а) Решите уравнение $-\sqrt{2} \sin\left(-\frac{5\pi}{2} + x\right) \cdot \sin x = \cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.

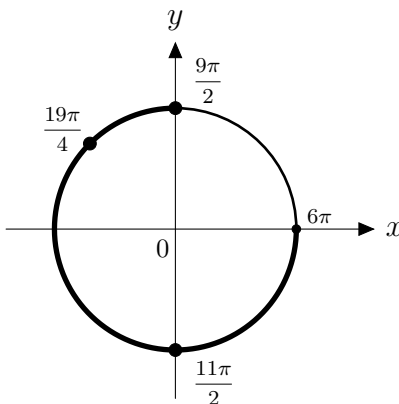
Решение. а) Так как $\sin\left(-\frac{5\pi}{2} + x\right) = -\cos x$, то имеем уравнение:

$$\sqrt{2} \cos x \cdot \sin x = \cos x \iff \sqrt{2} \cos x \cdot \sin x - \cos x = 0 \iff \cos x (\sqrt{2} \sin x - 1) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{9\pi}{2}, x = \frac{11\pi}{2}, x = \frac{19\pi}{4}.$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}; \frac{19\pi}{4}$.

2. а) Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение. а) Запишем уравнение в виде

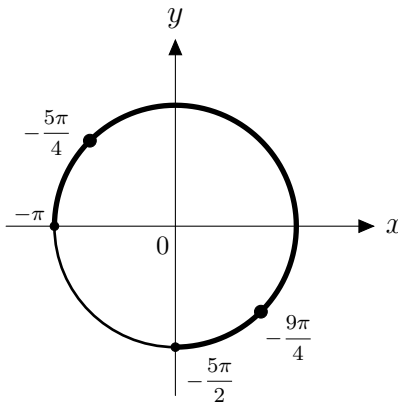
$$2^{\sin x} \cdot 5^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$$

и поделим обе части уравнения на $2^{\sin x} > 0$. Получим:

$$5^{\sin x} = 5^{-\cos x} \iff \sin x = -\cos x \iff \operatorname{tg} x = -1 \iff x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{9\pi}{4}, x = -\frac{5\pi}{4}.$$



Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{9\pi}{4}; -\frac{5\pi}{4}$.

3. а) Решите уравнение $2 \sin^2 x = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

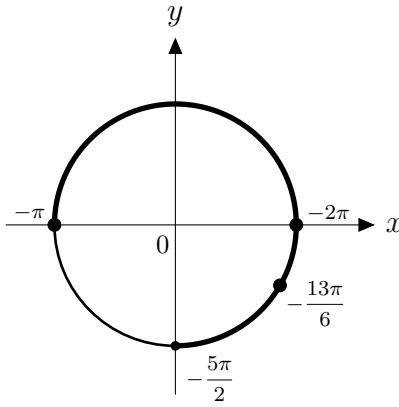
Решение. а) Так как $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sin x$, то имеем уравнение:

$$2 \sin^2 x = -\sin x \iff 2 \sin^2 x + \sin x = 0 \iff \sin x (2 \sin x + 1) = 0 \iff$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -2\pi, x = -\pi, x = -\frac{13\pi}{6}.$$



Ответ: а) $\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi; -\pi; -\frac{13\pi}{6}$.

4. а) Решите уравнение $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

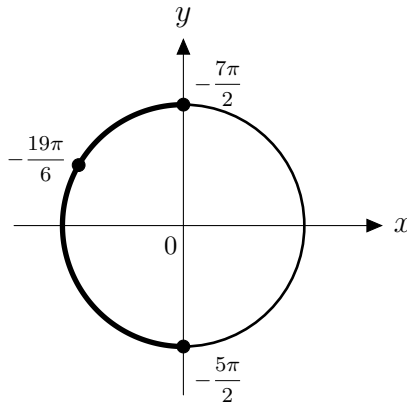
Решение. а) Так как $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, то имеем уравнение:

$$\sin 2x = \cos x \iff 2 \sin x \cos x - \cos x = 0 \iff \cos x (2 \sin x - 1) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{7\pi}{2}, x = -\frac{5\pi}{2}, x = -\frac{19\pi}{6}.$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}; -\frac{19\pi}{6}$.

5. а) Решите уравнение $(27^{\cos x})^{\sin x} = 3^{\frac{3 \cos x}{2}}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{\pi}{2}]$.

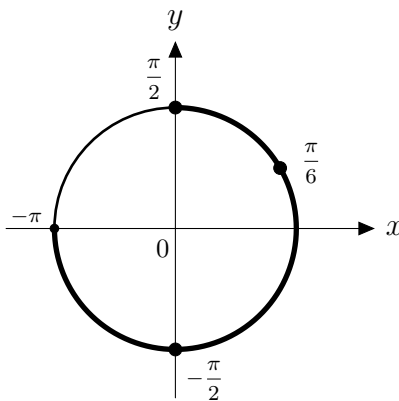
Решение. а) Имеем уравнение:

$$3^{3 \sin x \cos x} = 3^{\frac{3 \cos x}{2}} \iff 3 \sin x \cos x = \frac{3 \cos x}{2} \iff 3 \cos x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{2}.$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}$.

6. а) Решите уравнение $9^{x+1} - 2 \cdot 3^{x+2} + 5 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $(\log_3 \frac{3}{2}; \sqrt{5})$.

Решение. а) Имеем уравнение:

$$9 \cdot 9^x - 18 \cdot 3^x + 5 = 0 \iff (3 \cdot 3^x - 5)(3 \cdot 3^x - 1) = 0 \iff \begin{cases} 3^x = \frac{5}{3} \\ 3^x = \frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \log_3 \frac{5}{3} \\ x = -1 \end{cases}.$$

б) Очевидно, $x = -1 \notin (\log_3 \frac{3}{2}; \sqrt{5})$. Так как

$$\log_3 \frac{3}{2} < \log_3 \frac{5}{3} < \log_3 3 = 1 < \sqrt{5},$$

то $x = \log_3 \frac{5}{3} \in \left(\log_3 \frac{3}{2}; \sqrt{5} \right)$.

Ответ: а) $-1; \log_3 \frac{5}{3}$; б) $\log_3 \frac{5}{3}$.

7. а) Решите уравнение $1 + \log_2(9x^2 + 5) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8x^4 + 14}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1; \frac{8}{9}\right]$.

Решение. а) Область допустимых значений переменной x задается условием $x \in \mathbb{R}$.
Имеем уравнение:

$$\log_2 2 + \log_2(9x^2 + 5) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \log_2(8x^4 + 14) \iff \log_2(18x^2 + 10) = \log_2(8x^4 + 14) \iff$$

$$\iff 18x^2 + 10 = 8x^4 + 14 \iff 4x^4 - 9x^2 + 2 = 0 \iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{4} \\ x^2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ x = \pm \sqrt{2} \end{cases}.$$

б) Указанному отрезку принадлежат два корня $x = \pm \frac{1}{2}$.

Ответ: а) $\pm \frac{1}{2}; \pm \sqrt{2}$; б) $\pm \frac{1}{2}$.

8. а) Решите уравнение $3 \operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{\cos x} + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Решение. а) Область допустимых значений переменной x задается условием $\cos x \neq 0$.
Так как $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, то имеем уравнение:

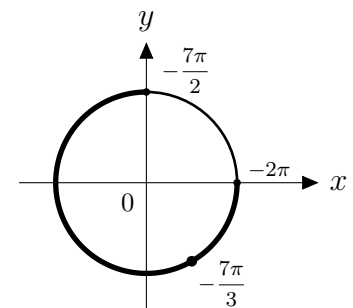
$$3 \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) - \frac{5}{\cos x} + 1 = 0 \iff \frac{3}{\cos^2 x} - \frac{5}{\cos x} - 2 = 0 \iff$$

$$2 \cos^2 x + 5 \cos x - 3 = 0 \iff \begin{cases} \cos x = -3 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \iff x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{7\pi}{3}.$$

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$.



Задачи для самостоятельного решения

9. а) Решите уравнение $2 \sin \left(x + \frac{7\pi}{2} \right) \cdot \sin x = \sqrt{3} \cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-7\pi; -6\pi]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{4\pi}{3} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{20\pi}{3}; -\frac{13\pi}{2}; -\frac{19\pi}{3}$.

10. а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2} \right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{21\pi}{4}; \frac{25\pi}{4}$.

11. а) Решите уравнение $21^{-\sin x} = 3^{-\sin x} \cdot 7^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0 \right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}$.

12. а) Решите уравнение $20^{\cos x} = 4^{\cos x} \cdot 5^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -3\pi \right]$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{4}; -\frac{13\pi}{4}$.

13. а) Решите уравнение $2 \cos^2 x = \sqrt{3} \sin \left(\frac{3\pi}{2} + x \right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}$.

14. а) Решите уравнение $\sqrt{2} \cos^2 x = \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}; -\frac{9\pi}{4}$.

15. а) Решите уравнение $2 \sin^2 x = \sqrt{3} \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$.

Ответ: а) $\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{4\pi}{3} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}; 2\pi; 3\pi$.

16. а) Решите уравнение $\sin 2x = \cos \left(\frac{3\pi}{2} + x \right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}; 2\pi; \frac{7\pi}{3}$.

17. а) Решите уравнение $\sin 2x = \sqrt{3} \cos \left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -2\pi]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-3\pi; -\frac{17\pi}{6}; -2\pi$.

18. а) Решите уравнение $\sin 2x = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{4}; \frac{7\pi}{2}$.

19. а) Решите уравнение $(36^{\sin x})^{\cos x} = 6^{\sqrt{2} \sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; \frac{9\pi}{4}; 3\pi$.

20. а) Решите уравнение $(36^{\sin x})^{-\cos x} = 6^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{10\pi}{3}; -3\pi; -\frac{8\pi}{3}; -2\pi$.

21. а) Решите уравнение $(25^{\sin x})^{-\cos x} = 5^{\sqrt{2} \sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; \frac{11\pi}{4}; 3\pi$.

22. а) Решите уравнение $25^{x-\frac{3}{2}} - 12 \cdot 5^{x-2} + 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left(2; \frac{8}{3}\right)$.

Ответ: а) 2; $\log_5 32$; б) $\log_5 32$.

23. а) Решите уравнение

$$16^{x-1} - 3 \cdot 4^x + 11 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $(\log_4 25; \sqrt{10})$.

Ответ: а) 2; $\log_4 44$; б) $\log_4 44$.

24. а) Решите уравнение

$$4^{x-\frac{1}{2}} - 5 \cdot 2^{x-1} + 3 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left(1; \frac{5}{3}\right)$.

Ответ: а) 1; $\log_2 3$; б) $\log_2 3$.

25. а) Решите уравнение

$$16^{x+\frac{1}{4}} - 41 \cdot 4^{x-1} + 9 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $(0; 1)$.

Ответ: а) 1; $\log_4 \frac{9}{8}$; б) $\log_4 \frac{9}{8}$.

26. а) Решите уравнение

$$9^{x-\frac{1}{2}} - 8 \cdot 3^{x-1} + 5 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left(1; \frac{7}{3}\right)$.

Ответ: а) 1; $\log_3 5$; б) $\log_3 5$.

27. а) Решите уравнение $1 + \log_3(10x^2 + 1) = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3x^4 + 30}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11}{4}; \frac{2}{3}\right]$.

Ответ: а) ± 1 ; ± 3 ; б) -1 .

28. а) Решите уравнение

$$\log_2(4x^4 + 28) = 2 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{5x^2 + 1}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9}{5}; \frac{7}{5}\right]$.

Ответ: а) $\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{3}$; б) $-\sqrt{3}$.

29. а) Решите уравнение

$$1 + \log_3(x^4 + 25) = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{30x^2 + 12}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2.2; 3.2]$.

Ответ: а) $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{7}$; б) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$.

30. а) Решите уравнение

$$2 + \log_2(x^2 + 8) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4x^4 + 8}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1.3; 2.2]$.

Ответ: а) $\pm\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}$.

31. а) Решите уравнение

$$\log_3(3x^4 + 42) = 1 + \log_{\sqrt{3}} \sqrt{13x^2 + 2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5}{4}; 2\right]$.

Ответ: а) ± 1 ; $\pm\sqrt{12}$; б) ± 1 .

32. а) Решите уравнение

$$1 + \log_5(5x^2 + 20) = \log_{\sqrt{5}} \sqrt{5x^4 + 30}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3.2; 2.6]$.

Ответ: а) $\pm\sqrt{7}$; б) $-\sqrt{7}$.

33. а) Решите уравнение

$$1 + \log_3(x^4 + 16) = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{21x^2 + 18}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{5}$; б) $\pm\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$.

34. а) Решите уравнение

$$1 + \log_3(23x^2 + 1) = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{9x^4 + 45}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2; 1]$.

Ответ: а) $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\pm\sqrt{7}$; б) $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

35. а) Решите уравнение $5 \operatorname{tg}^2 x + \frac{3}{\cos x} + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) 3π .

36. а) Решите уравнение

$$3 \operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{\cos x} + 5 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) -2π .

37. а) Решите уравнение

$$2 \operatorname{tg}^2 x + \frac{5}{\cos x} + 4 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{10\pi}{3}$.

Глава 7

Образцы заданий 2012 года

1. а) Решите уравнение

$$\log_5(\cos x - \sin 2x + 25) = 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

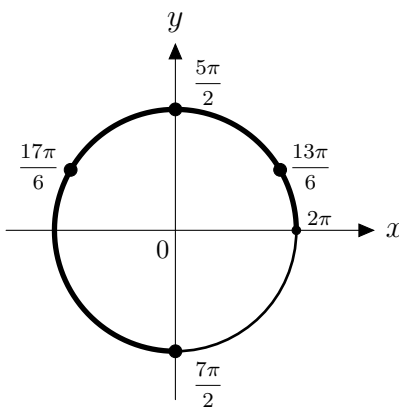
Решение. а) Имеем уравнение:

$$\cos x - \sin 2x + 25 = 5^2 \iff \cos x - 2 \sin x \cos x = 0 \iff \cos x (1 - 2 \sin x) = 0 \iff$$

$$\iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{13\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{2}, x = \frac{17\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{2}.$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}; \frac{17\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$.

2. а) Решите уравнение $4 \cos^3 x + \sin \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 2\pi]$.

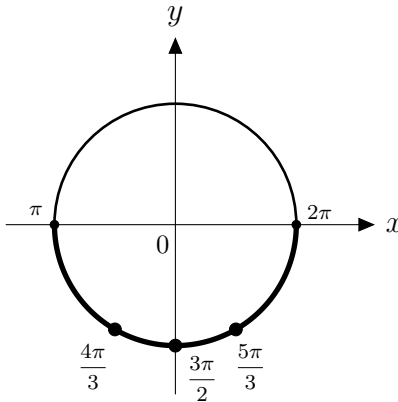
Решение. а) Так как $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$, то имеем уравнение:

$$4\cos^3 x - \cos x = 0 \iff \cos x (4\cos^2 x - 1) = 0 \iff \cos x (2\cos x + 1)(2\cos x - 1) = 0$$

$$\iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = \frac{4\pi}{3}, x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}$.

3. а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

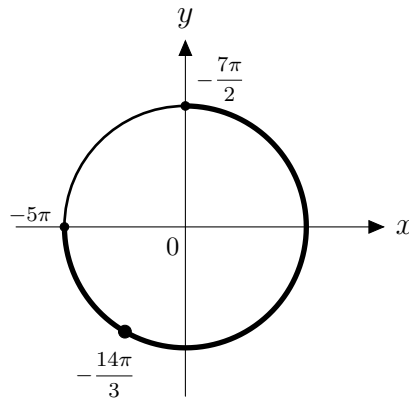
Решение. а) Так как $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, то имеем уравнение:

$$6\sin^2 x + 5\cos x - 2 = 0 \iff 6 \cdot (1 - \cos^2 x) + 5\cos x - 2 = 0 \iff 6\cos^2 x - 5\cos x - 4 = 0$$

$$\iff \begin{cases} \cos x = \frac{4}{3} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -\frac{14\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{14\pi}{3}$.

4. а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \cos \left(\frac{5\pi}{2} - x \right).$$

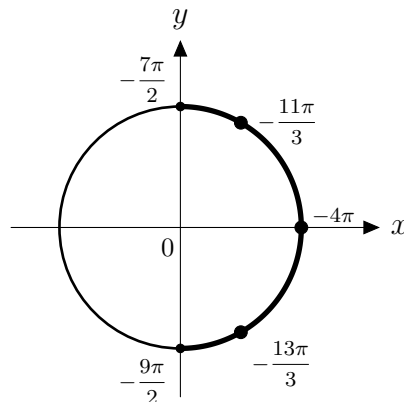
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2} \right]$.

Решение. а) Так как $\cos \left(\frac{5\pi}{2} - x \right) = \sin x$, то имеем уравнение:

$$\begin{aligned} \sin 2x = \sin x &\iff 2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \iff \sin x (2 \cos x - 1) = 0 \iff \\ &\iff \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = -4\pi, x = -\frac{11\pi}{3}, x = -\frac{13\pi}{3}.$$



Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-4\pi; -\frac{11\pi}{3}; -\frac{13\pi}{3}$.

5. а) Решите уравнение

$$\sqrt{2} \cos^3 x - \sqrt{2} \cos x + \sin^2 x = 0.$$

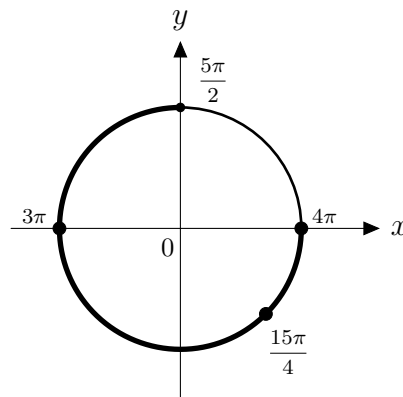
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение. а) Так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то имеем уравнение:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cos x (\cos^2 x - 1) + \sin^2 x &= 0 \iff -\sqrt{2} \cos x \cdot \sin^2 x + \sin^2 x = 0 \iff \\ \iff \sin^2 x (1 - \sqrt{2} \cos x) &= 0 \iff \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

б) С помощью тригонометрической окружности находим корни, принадлежащие заданному отрезку:

$$x = 3\pi, x = 4\pi, x = \frac{15\pi}{4}.$$



Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $3\pi; 4\pi; \frac{15\pi}{4}$.

Задачи для самостоятельного решения

6. а) Решите уравнение

$$\log_4(\sin x + \sin 2x + 16) = 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-4\pi; -\frac{10\pi}{3}; -3\pi; -\frac{8\pi}{3}$.

7. а) Решите уравнение

$$\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}$.

8. а) Решите уравнение

$$\log_3(\sin x - \sin 2x + 27) = 3.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-3\pi; -\frac{7\pi}{3}; -2\pi$.

9. а) Решите уравнение $4\sin^3 x = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{3}; 4\pi; \frac{13\pi}{3}$.

10. а) Решите уравнение $2\cos^3 x = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{4}$.

11. а) Решите уравнение $4\cos^3 x + 3\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{7\pi}{6}$.

12. а) Решите уравнение $4\cos^2 x - 8\sin x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$.

13. а) Решите уравнение $4 \cos^2 x + 4 \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.

14. а) Решите уравнение $2 \cos 2x - 8 \sin x + 3 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}$.

15. а) Решите уравнение $\cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) + \sin x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{4\pi}{3}; -\pi; -\frac{2\pi}{3}$.

16. а) Решите уравнение

$$\sin 2x + \sqrt{3} \sin x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6}; 3\pi; \frac{19\pi}{6}$.

17. а) Решите уравнение $\sin 2x = \sin \left(x + \frac{3\pi}{2} \right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2} \right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{2}; -\frac{17\pi}{6}; -\frac{5\pi}{2}$.

18. а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \sin \left(\frac{5\pi}{2} + x \right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2} \right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{2}; \frac{25\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}$.

19. а) Решите уравнение

$$\sin 2x = \cos \left(x - \frac{3\pi}{2} \right).$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{8\pi}{3}; 3\pi; \frac{10\pi}{3}$.

20. а) Решите уравнение

$$2 \cos^3 x - 2 \cos x + \sin^2 x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Ответ: а) $\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{3}; 2\pi; \frac{7\pi}{3}; 3\pi$.

21. а) Решите уравнение $\sqrt{2} \sin^3 x - \sqrt{2} \sin x + \cos^2 x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}; -\frac{7\pi}{4}; -\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{4}$.

22. а) Решите уравнение

$$2 \sin^3 x - 2 \sin x + \cos^2 x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{2}; -\frac{19\pi}{6}; -\frac{5\pi}{2}$.

Глава 8

Образцы заданий 2011 года

1. Решите уравнение $\frac{6 \sin^2 x + 7 \sin x - 5}{\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1} = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \operatorname{tg} x \neq \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 6 \sin^2 x + 7 \sin x - 5 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \begin{cases} \sin x = -\frac{5}{3} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases} \iff x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

2. Решите уравнение $(4 \sin^2 x + 8 \sin x - 5) \cdot \log_{16}(-\cos x) = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \log_{16}(-\cos x) = 0 \\ \begin{cases} -\cos x > 0 \\ 4 \sin^2 x + 8 \sin x - 5 = 0 \end{cases} \end{cases} &\iff \begin{cases} \cos x = -1 \\ \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

Ответ: $\pi + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

3. Решите уравнение $(\sqrt{3} \cos x - 2 \cos^2 x) \cdot \log_5(-\operatorname{tg} x) = 0$.

Решение. Область допустимых значений переменной x задается системой:

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{3} \cos x - 2 \cos^2 x = 0 \\ \log_5(-\operatorname{tg} x) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \cos x (\sqrt{3} - 2 \cos x) = 0 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

4. Решите уравнение $\sqrt{2 \sin x - 1} \cdot \log_7(-2 \cos x) = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2 \cos x > 0 \\ \sqrt{2 \sin x - 1} = 0 \\ 2 \sin x - 1 \geq 0 \\ \log_7(-2 \cos x) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x \geq \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

Задачи для самостоятельного решения

5. Решите уравнение $\frac{8 \sin^2 x - 10 \sin x - 7}{1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} x} = 0$.

Ответ: $\frac{7\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

6. Решите уравнение $(4 \cos^2 x - 4 \cos x - 3) \cdot \log_{14}(-\sin x) = 0$.

Ответ: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

7. Решите уравнение $(2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2) \cdot \log_{12}(\cos x) = 0$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n; 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

8. Решите уравнение $(4 \sin^2 x - 8 \sin x + 3) \cdot \log_{16}(-\cos x) = 0$.

Ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

9. Решите уравнение $(6 \sin^2 x + 5 \sin x - 4) \cdot \sqrt{-7 \cos x} = 0$.

Ответ: $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

10. Решите уравнение $(2 \sin x + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{\cos x} = 0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

11. Решите уравнение $(2 \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x) \cdot \log_3(\operatorname{tg} x) = 0$.

Ответ: $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

12. Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x) \cdot \sqrt{-5 \cos x} = 0$.

Ответ: $\pi + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

13. Решите уравнение $(\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3} \operatorname{tg} x) \cdot \sqrt{7 \cos x} = 0$.

Ответ: $2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

14. Решите уравнение $\sqrt{2 \cos x + 1} \cdot \log_2(2 \sin x) = 0$.

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

15. Решите уравнение $\sqrt{1 - 2 \cos x} \cdot \log_5(-2 \sin x) = 0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.