А. Н. Роганин

Алгебра в таблицах

Наглядный справочник школьника

ВЕСЬ КУРС быстро и удобно

Повтори перед ОГЭ и ЕГЭ

Содержание

Действительные числа

Натуральные числа и ноль	Целые числа
Числа 1, 2, 3, ..., используемые при счете, называются **натуральными числами**. Множество натуральных чисел обозначают символом N. Натуральные числа записывают с помощью символов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, которые называют **цифрами**. Такая запись чисел называется **десятичной**. Число 0 не является натуральным числом	Натуральные числа, противоположные им числа и число ноль называют **целыми числами**. Множество целых чисел $\{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ обозначают символом Z. Например, -10, -3, 0, 2, 7 — целые числа, а числа $-2{,}5$; 3,6 не являются целыми

Рациональные числа	Иррациональные числа
Числа, которые можно записать в виде отношения $\frac{m}{n}$, где m — целое число ($m \in Z$), а n — натуральное число ($n \in N$), называют **рациональными числами**. Например, $3=\frac{3}{1}$; $-\frac{3}{5}=\frac{-3}{5}$; $2\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$; $-3\frac{1}{2}=\frac{-7}{2}$ — рациональные. Множество рациональных чисел обозначают символом Q. Любое рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби. Например, $\frac{1}{4}=0{,}25$; $\frac{1}{3}=0{,}(3)$; $\frac{5}{11}=0{,}(45)$. Любая бесконечная периодическая десятичная дробь является записью некоторого рационального числа	Числа, которые нельзя представить в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое число ($m \in Z$), а n — натуральное число ($n \in N$), называют **иррациональными числами**. Например, числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π, e — иррациональные числа. Любое иррациональне число можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби. Например, $\sqrt{2}=1{,}4142135...$; $\pi = 3{,}1415926...$; $e = 2{,}71828182...$ Любая бесконечная непериодическая десятичная дробь является записью некоторого иррационального числа

Действительные числа, их запись в виде десятичной дроби

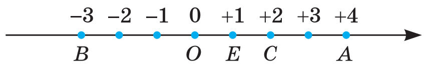
Рациональные и иррациональные числа образуют множество **действительных чисел**. Множество действительных чисел обозначают символом R.
Каждое натуральное число является одновременно и целым, и рациональным, и действительным. Каждое целое число является также рациональным и действительным.
Например, все числа $\frac{15}{17}$, -3, 0, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$ — действительные.
Любое действительное число можно записать в виде бесконечной десятичной дроби.
Например, $\frac{1}{2}=0{,}5=0{,}500...$; $\frac{1}{3}=0{,}3333...$; $\sqrt{10}=3{,}1622776....$
Любая бесконечная десятичная дробь является записью некоторого действительного числа

Сумма, разность и произведение действительных чисел — также действительные числа. Если делитель отличен от нуля, то частное двух действительных чисел — тоже действительное число.
Например, $-\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{-14+15}{35}=\frac{1}{35}$; $-\frac{3}{8}\cdot 2\frac{1}{5}=-\frac{3}{8}\cdot\frac{11}{5}=\frac{-33}{40}$; $-0{,}3:\frac{3}{7}=-\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{3}=-\frac{7}{10}=\frac{-7}{10}$

Координатная прямая и действительные числа. Модуль числа. Сравнение действительных чисел

Координатная прямая и действительные числа

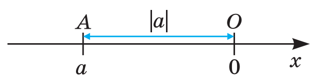
Координатной прямой называют прямую, на которой указано начало отсчета (точка O), положительное направление (отмечают стрелкой) и единичный отрезок.



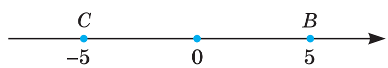
Каждому действительному числу a соответствует единственная точка A координатной прямой, и каждой точке A координатной прямой соответствует единственное действительное число a, которое называют координатой точки A (a). Само множество R всех действительных чисел называют **числовой прямой**, а ее элементы (то есть числа) — **точками числовой прямой**

Модуль числа

Модулем числа a называют расстояние (в единичных отрезках) от начала координат до точки A (a).



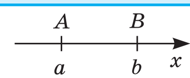
На рисунке модули чисел 5 и –5 равны 5. Вместо слова «модуль» в записях используют символ $|\ |$. Например, запись «$|-5|$» означает «модуль числа –5».



Модуль числа 0 равен 0. Записывают так: $|0| = 0$.
Модуль числа не может быть отрицательным числом.
Модуль положительного числа и числа 0 равен самому числу. Например, $|14| = 14$, $|0| = 0$.
Модуль отрицательного числа равен числу, противоположному данному. Например, $|-4| = 4$, $|-3{,}5| = 3{,}5$.
Противоположные числа имеют равные модули: $|-a| = |a|$

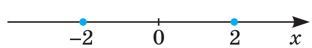
Формула расстояния между двумя точками с заданными координатами

Для любых точек $A(a)$ и $B(b)$ координатной прямой расстояние AB равно модулю разности координат этих точек, то есть $|AB| = |a - b|$



Сравнение действительных чисел

Из двух действительных чисел a и b, обозначенных на координатной прямой, большим является то, которое лежит правее, а меньшим — то, которое лежит левее. Например, $-2 < 2$, так как число 2 расположено справа от числа –2.



Любое отрицательное число меньше любого положительного числа.
Из двух отрицательных чисел меньшим является то, модуль которого больше. Например, $-5 < -3$, так как $|-5| > |-3|$. Ноль больше любого отрицательного числа, но меньше любого положительного числа, то есть если a — отрицательное, то $a < 0$; если a — положительное, то $a > 0$. И наоборот, если $a > 0$, то число a — положительное, если $a < 0$, то число a — отрицательное

Буквенные выражения. Числовые значения буквенных выражений

Буквенные выражения	Числовые значения буквенных выражений
Буквенным выражением называют запись, в которой числа и буквы соединены знаками действий. Например, $x + 2$, $x + y$, $3x - 2y$, $\frac{a}{b}$ — буквенные выражения. Буквенные выражения называют также **выражениями с переменными**, а буквы — **переменными**	Если в буквенное выражение вместо букв подставить числа, то получим числовое выражение, значение которого называется **числовым значением буквенного выражения при определенных значениях букв.** Например, если $a = 3{,}5$, $b = 1{,}5$, то значением выражения $\frac{ab}{a+b}$ является значение выражения $\frac{3{,}5\cdot1{,}5}{3{,}5+1{,}5}=\frac{3{,}5\cdot1{,}5}{5}=1{,}05$

Рациональные и целые выражения

Если выражение не содержит никаких других действий, кроме сложения, вычитания, умножения, возведения в натуральную степень и деления, его называют **рациональным выражением**. Например, $2xy + x$, $\frac{3xy}{x+y}$ — рациональные выражения	Рациональное выражение, которое не содержит деления на выражение с переменной, называют **целым**. Например, $x + y$, $2xy$, $\frac{x+y}{2}$ — целые выражения

Свойства арифметических действий над действительными числами

Сложение действительных чисел имеет переместительное и сочетательное свойства. Другими словами, если a, b, c — любые действительные числа, то $a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$. Прибавление нуля не изменяет число: $a + 0 = 0 + a = a$. Сумма противоположных чисел равна нулю: $a + (-a) = 0$	Умножение действительных чисел имеет переместительное и сочетательное свойства, то есть: $a \cdot b = b \cdot a$, $a(bc) = (ab)c = abc$. Умножение на единицу не изменяет действительное число: $a \cdot 1 = a$. Произведение числа на обратное ему число равно единице: $a\cdot\frac{1}{a}=1$, $a \neq 0$. Произведение числа на нуль равно нулю: $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
Умножение действительных чисел обладает распределительным свойством относительно сложения (вычитания): $(a + b) \cdot c = ac + bc$; $(a - b) \cdot c = ac - bc$	

Раскрытие скобок

Если перед скобками стоит знак «+», то можно опустить скобки и знак «+», сохранив знаки слагаемых, стоящих в скобках. Если первое слагаемое в скобках записано без знака, то его следует записать со знаком «+». Например, $a + (-b + c + 3) = a - b + c + 3$; $a + (b - m + n) = a + b - m + n$	Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак «–», следует опустить скобки и знак «–», заменив знаки всех слагаемых в скобках на противоположные. Если первое слагаемое в скобках записано без знака, то его следует записать со знаком «–». Например, $-(a - b) = -a + b$; $x - (-y + z) = x + y - z$

Степень с целым показателем и ее свойства

В записи $a^n = b$ число a называют **основанием степени**, n — **показателем степени**, a^n — **степенью**, b — **значением степени**

Степень с натуральным показателем

Степенью числа a с натуральным показателем n, больше единицы, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$, $a \in R$, $n \in N$, $n \geq 2$.

Например, $(-2)^3 = -2 \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$; $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$; $0^n = 0$, $n \in N$; $1^n = 1$, $n \in N$

Первой степенью числа называют само число: $a^1 = a$. Например, $5^1 = 5$, $(-2)^1 = -2$

Степень с целым показателем

Нулевая степень числа, отличного от нуля, равна единице. Нулевая степень нуля не определена. $a^0 = 1$, $a \neq 0$, 0^0 — не определена. Например, $7^0 = 1$, $(-3)^0 = 1$

Если $a \neq 0$ и $n \in N$, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Выражение 0^{-n} — не определено, где $n \in N$.

Например, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27}$

Свойства степени

1. При умножении степеней с равными основаниями основание остается таким же, а показатели степеней складываются: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
Например, $2^{-3} \cdot 2^5 = 2^{-3+5} = 2^2 = 4$.

2. При делении степеней с равными основаниями основание остается таким же, а из показателя степени делимого вычесть показатель степени делителя: $a^m : a^n = a^{m-n}$ или $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Например, $3^{-3} : 3^{-5} = 3^{-3+5} = 3^2 = 9$.

3. При возведении степени в степень основание остается таким же, а показатели перемножаются: $(a^m)^n = a^{mn}$. Например, $(2^{-3})^{-2} = 2^{-2 \cdot (-3)} = 2^6 = 64$.

4. При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель: $(ab)^n = a^n b^n$. Например, $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$.

5. При возведении в степень дроби в эту степень возводятся и числитель, и знаменатель: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Например, $\left(\frac{6}{2}\right)^5 = \frac{6^5}{2^5} = \frac{3^5}{1^5} = 3^5 = 243$.

6. При возведении дроби в степень с отрицательным показателем можно возвести обратную дробь в степень с противоположным показателем: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.
Например, $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{1}\right)^3 = 5^3 = 125$

Возведение в степень считается арифметичким действием третьей степени. Если выражение содержит разные арифметические действия, то сначала выполняется возведение в степень как действие высшего (третьего) порядка, затем умножение и деление (действия второго порядка) и, наконец, сложение и вычитание (действия первого порядка). Например, $5 \cdot 2^3 - 6^2 : 12 = 5 \cdot 8 - 36 : 12 = 40 - 3 = 37$

Стандартным видом числа a называют его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$ и $n \in Z$. Число n называют **порядком числа**. Например, число $a = 125\,000$ записывают в стандартном виде так: $a = 1{,}25 \cdot 10^5$, а число $a = 0{,}000508$ — так: $a = 5{,}08 \cdot 10^{-4}$

Арифметический квадратный корень и его свойства

Квадратный корень
Квадратным корнем из числа a называют число, квадрат которого равен a. Например, квадратный корень из числа 4 равен 2 или –2, так как $2^2 = 4$, $(-2)^2 = 4$

Арифметический квадратный корень
Арифметическим квадратным корнем из числа a называют неотрицательное число, квадрат которого равен a. Арифметический квадратный корень из числа a обозначают так: $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{\ }$ называют **знаком арифметического квадратного корня**; выражение, которое стоит под знаком корня, называют **подкоренным выражением**. Запись $\sqrt{a}$ читают: «квадратный корень из a» (слово «арифметический» при чтении опускают). Таким образом, $\sqrt{a} = b$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$, означает $b^2 = a$. Если $a < 0$, то выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла. Например, $\sqrt{16} = 4$, так как $4^2 = 16$; $\sqrt{225} = 15$, так как $15^2 = 225$

Свойства арифметических квадратных корней	
$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, где $a \geq 0$	$\left(\sqrt{27}\right)^2 = 27$
Если $a \geq 0$, то $\sqrt{a^2} = a$. Если $a < 0$, то $\sqrt{a^2} = -a$. Таким образом, $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$	$\sqrt{5^2} = 5$; $\sqrt{(-6)^2} = 6$
Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$. Если $a \geq 0$, $b \geq 0$ то $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$	$\sqrt{64 \cdot 0{,}04} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{0{,}04} = 8 \cdot 0{,}2 = 1{,}6$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$
Корень из произведения, числитель которого неотрицательный, а знаменатель положительный, равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, где $a \geq 0$, $b > 0$. Если $a \geq 0$, $b > 0$, то $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$	$\sqrt{\frac{36}{169}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{169}} = \frac{6}{13}$; $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$
Внесение множителя под знак квадратного корня: а) $b\sqrt{a} = \sqrt{b^2 a}$, при $b \geq 0$; б) $b\sqrt{a} = -\sqrt{b^2 a}$, при $b < 0$	$5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50}$; $-3\sqrt{2} = -\sqrt{3^2 \cdot 2} = -\sqrt{18}$
Вынесение множителя из-под знака корня: а) $\sqrt{b^2 a} = b\sqrt{a}$, при $a \geq 0$, $b \geq 0$; б) $\sqrt{b^2 a} = -b\sqrt{a}$, при $b < 0$	$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$; $\sqrt{18} = \sqrt{(-3)^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$

Одночлены и действия над ними

Одночлен	
Одночленом называют произведение чисел, переменных и их натуральных степеней, а также сами числа, переменные и их натуральные степени	$5a$, $6a^2b$, 3, x, xyz — одночлены
Одночлен стандартного вида — одночлен, который содержит только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и степени с разными буквенными основаниями	$3ab$, $12x^2y^2z$, $-a$, $-x^2y$ — одночлены стандартного вида
Коэффициентом одночлена называют числовой множитель одночлена стандартного вида. Коэффициенты 1 и –1 в одночленах не записывают	Коэффициентами одночленов $5x^2$, $-3ab$, $-a^2b$, xyz являются соответственно числа 5, –3, –1, 1
Чтобы записать одночлен в **стандартном виде**, нужно перемножить все его числовые множители и полученное число поставить на первое место, а потом произведения одинаковых буквенных множителей записать в виде степеней	$2ab \cdot (-3a^2b) \cdot (-3a^3b) =$ $= (2 \cdot (-3) \cdot (-3)) \cdot (a \cdot a^2 \cdot a^3) \times$ $\times (b \cdot b \cdot b) = 18a^6b^3$
Степенью одночлена называют сумму показателей степеней всех буквенных множителей, входящих в состав одночлена. Если одночленом является число, отличное от нуля, то считают, что его степень равна нулю	Степень одночлена $5x^3yz^6$ равна 10, поскольку $3 + 1 + 6 = 10$

Действия над одночленами	
Чтобы **умножить одночлен на одночлен**, нужно перемножить их коэффициенты и перемножить степени с одинаковыми основаниями	$12a^2y \cdot (-2ab^3y^3) =$ $(12 \cdot (-2)) \cdot (a^2 \cdot a) \cdot (b^3) \cdot (y \cdot y^3) =$ $= -24a^3b^3y^4$
Чтобы **возвести одночлен в степень**, нужно возвести его коэффициент в эту степень и умножить показатель степени каждой буквы на показатель степени, в которую возводится одночлен	$(-3a^2bx^5)^2 =$ $= (-3)^2 \cdot a^{2\cdot 2} \cdot b^{1\cdot 2} \cdot x^{5\cdot 2} =$ $= 9a^4b^2x^{10}$
Чтобы **разделить одночлен на одночлен**, нужно разделить коэффициент делимого на коэффициент делителя, к найденному частному приписать множителями каждую переменную делимого с показателем, равным разности показателей этой переменной в делимом и делителе	$12x^7y^3z^{12} : (4x^3yz^7) =$ $= 3x^{7-3}y^{3-1}z^{12-7} =$ $= 3x^4y^2z^5$

Многочлены. Сложение и вычитание многочленов

Многочлен	
Многочленом называют алгебраическую сумму нескольких одночленов	$3xy + ab + 2$; $7x^2b - 2xy + a$ — многочлены
Одночлены, из которых состоит многочлен, называют его **членами**. Одночлен — отдельный вид многочлена. Многочлен, содержащий два или три слагаемых, называют соответственно **двучленом**, **трехчленом**	$a^2 - b^2$, $x + y$ — двучлены; $a + ab + b$, $x^2 - 2x - 4$ — трехчлены
Подобные члены многочлена — это одинаковые одночлены или одночлены стандартного вида, которые отличаются только коэффициентами	В многочлене $15a^2b + 3ab^2 - 7a^2b + 5ab^2$ первый и третий, второй и четвертый члены подобны
Приведение подобных членов — это упрощение многочлена, при котором алгебраическая сумма подобных членов заменяется одним членом	$15a^2b + 3ab^2 - 7a^2b + 5ab^2 = 8a^2b + 8ab^2$
Стандартный вид многочлена — это запись многочлена, все члены которого записаны в стандартном виде и среди них нет подобных	$a^2 - ab + b^2$, $ab + bc + ac$ — многочлены стандартного вида; $3a^2 + 2b^2 - 3ab + a^2$ — многочлен нестандартного вида
Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней одночленов, из которых состоит многочлен. **Степенью произвольного многочлена** называют степень тождественно равного ему многочлена стандартного вида	Степень многочлена $5a^7b + 5ab^5 - 2a^5b^5$ равна степени одночлена $-2a^5b^5$, то есть $5 + 5 = 10$

Сложение и вычитание многочленов	
При **сложении многочленов** пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «+», то скобки можно опустить, сохранив знаки каждого одночлена	$(3x^2 - 2x + 5) + (6x^2 + 5x - 3) =$ $= 3x^2 - 2x + 5 + 6x^2 + 5x - 3 =$ $= 9x^2 + 3x + 2$
При **вычитании многочленов** пользуются правилом раскрытия скобок: если перед скобками стоит знак «–», то скобки можно опустить, изменив знак каждого одночлена, содержавшегося в скобках, на противоположный	$(3x^2 - 2x + 5) - (6x^2 + 5x - 3) =$ $= 3x^2 - 2x + 5 - 6x^2 - 5x + 3 =$ $= -3x^2 - 7x + 8$

Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены.

$$(2x^2 - 3x + 2) - (3x^2 - 2x - 1) - (-x^2 + 2x + 1) + (-2x^2 + x - 1) =$$
$$= \underline{2x^2} - \underline{\underline{3x}} + 2 - \underline{3x^2} + \underline{\underline{2x}} + 1 + \underline{x^2} - \underline{\underline{2x}} - 1 - \underline{2x^2} + \underline{\underline{x}} - 1 =$$
$$= -2x^2 - 2x + 1$$

Умножение и деление одночленов и многочленов. Формулы сокращенного умножения

Умножение и деление одночленов и многочленов	
Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и сложить полученные одночлены	$3a(a^2-2a+ab)=3a^3-6a^2+3a^2b$
Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и сложить полученные одночлены	$(3x-2)(2x-3)=3x\cdot 2x-3x\cdot 3-2\cdot 2x+2\cdot 3=$ $=6x^2-9x-4x+6=6x^2-13x+6$
Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и сложить полученные результаты	$(5x^7-2x^5+3x^2+6x):(2x)=$ $=5x^7:(2x)-2x^5:(2x)+3x^2:(2x)+6x:(2x)=$ $=2{,}5x^6-x^4+1{,}5x+3$

Формулы сокращенного умножения	
Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$(3a+2b)^2=9a^2+12ab+4b^2$
Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$(3a-2)^2=9a^2-12ab+4$
Произведение разности двух выражений и их суммы равно разности квадратов этих выражений. $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$	$(5a-3b)(5a+3b)=25a^2-9b^2$
Произведение суммы двух выражений на неполный квадрат их разности равно сумме кубов этих выражений. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$	$(3+x)(9-3x+x^2)=27+x^3$
Произведение разности двух выражений на неполный квадрат их суммы равно разности кубов этих выражений. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$	$(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)=$ $=8x^3-27y^3$
Куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения плюс утроенное произведение квадрата первого выражения на второе выражение плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго выражения плюс куб второго выражения. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$(2+5x)^3=$ $=8+60x+150x^2+125x^3$
Куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения на второе выражение плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго выражения минус куб второго выражения. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$	$(2x-3y)^3=$ $=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$

Арифметический корень *n*-й степени и его свойства. Степень с рациональным показателем

Корень *n*-й степени из числа	
Корнем n-й степени из числа a называется такое число, n-я степень которой равна a	Например, корень третьей степени из 8 равен 2, поскольку $2^3 = 8$. Корень четвертой степени из числа 1 равен 1 или -1, поскольку $1^4 = 1$, $(-1)^4 = 1$

Арифметический корень *n*-го степени из числа	
Арифметическим корнем n-й степени из числа a называют неотрицательное число, n-я степень которого равна a, то есть $\sqrt[n]{a} = x$ означает $x^n = a$ или $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$. Например, $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[4]{1} = 1$; $\sqrt[5]{32} = 2$	
Арифметический корень четной степени существует только из неотрицательных чисел: $\sqrt[2k]{a} = x$, $a \geq 0$	Арифметический корень нечетной степени существует из любого числа, поскольку $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$

Основные свойства корней	
1. Для любого действительного x $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} \lvert x\rvert, \text{если } n - \text{четное} \\ x, \text{если } n - \text{нечетное} \end{cases}$	$\sqrt[4]{(-2)^4} = \lvert -2\rvert = 2$; $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$	$\sqrt[3]{27 \cdot 125} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{125} = 3 \cdot 5 = 125$; $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2 \cdot 4} = \sqrt[3]{8} = 2$
3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \geq 0$, $b > 0$	$\sqrt[4]{\frac{625}{16}} = \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{5}{2} = 2{,}5$; $\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$, $a \geq 0$	$\sqrt[4]{\sqrt[5]{3}} = \sqrt[20]{3}$
5. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$, $a \geq 0$	$\sqrt[4]{3^6} = \sqrt{3^3} = \sqrt{27}$
6. $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$, $a \geq 0$	$\left(\sqrt[3]{3}\right)^2 = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$

Степень с рациональным показателем	
Степенью $a^{\frac{m}{n}}$ числа $a > 0$ с рациональным показателем $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, $(n > 1)$, называют число $\sqrt[n]{a^m}$. Следовательно, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	Например, $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4$; $32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2$. Степень числа 0 определена только для положительных показателей по определению: $0^r = 0$ для любого $r > 0$
Для любых рациональных чисел p и q и любых положительных a и b справедливы равенства: $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$; $a^p : a^q = a^{p-q}$; $(a^p)^q = a^{pq}$; $(ab)^p = a^p \cdot b^p$; $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$; $\left(\frac{a}{b}\right)^{-p} = \left(\frac{b}{a}\right)^p$	

Логарифмы и их свойства. Основное логарифмическое тождество

Логарифм

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0$, $a \neq 1$, называют показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

Например, $\log_2 8 = 3$, поскольку $2^3 = 8$; $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, поскольку $2^{-2} = \frac{1}{4}$

Десятичными логарифмами называют логарифмы по основанию 10, их обозначают lg.
Например, $\lg 100 = 2$, $\lg 0{,}0001 = -4$

Натуральными логарифмами называют логарифмы по основанию e (число e — иррациональное, $e \approx 2{,}718281828459045\ldots$), их обозначают ln. Например, $\ln e = 1$, $\ln e^2 = 2$

Основное логарифмическое тождество

Равенство $a^{\log_a b} = b$, справедливо при $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, называется **основным логарифмическим тождеством**. Например, $2^{\log_2 5} = 5$, $2^{-\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^{-1} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

Основные свойства логарифмов

Для любых $a > 0$, $a \neq 1$ и любых положительных x и y выполняются равенства:

1. $\log_a 1 = 0$	$\log_7 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$	$\log_{11} 11 = 1$
3. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$	$\log_6 18 + \log_6 2 = \log_6 (18 \cdot 2) = \log_6 36 = 2$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	$\log_{12} 48 - \log_{12} 4 = \log_{12} \frac{48}{4} = \log_{12} 12 = 1$
5. $\log_a x^p = p \log_a x$, $(p \in R)$	$\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_3 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$
6. $\log_{a^p} x = \frac{1}{p} \log_a x$, $(p \in R)$	$\log_{125} 5 = \log_{5^3} 5 = \frac{1}{3} \log_5 5 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$
7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ $(b > 0,\ b \neq 1)$	$\frac{\log_3 16}{\log_3 4} = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2\log_4 4 = 2 \cdot 1 = 2$

Действие нахождения логарифма числа (выражения) называют **логарифмированием**.

$$\lg \frac{a^2 b^2}{c^3} = \lg(a^2 b^2) - \lg c^3 = \lg a^2 + \lg b^2 - \lg c^3 = 2\lg a + 2\lg b - 3\lg c$$

Потенциирование — нахождение числа (выражения) по его логарифму.

$$\lg x = \frac{1}{2} \lg 5a - 3\lg b + 4\lg c; \quad \lg x = \lg (5a)^{\frac{1}{2}} - \lg b^3 + \lg c^4; \quad \lg x = \lg \sqrt{5a} - \lg b^3 + \lg c^4;$$

$$\lg x = \lg\left(\sqrt{5a} \cdot c^4\right) - \lg b^3; \quad \lg x = \lg \frac{c^4 \sqrt{5a}}{b^3}; \quad x = \frac{c^4 \sqrt{5a}}{b^3}$$

Алгебраическая дробь. Действия над дробями

Алгебраическая дробь

Алгебраической называют дробь, числитель и знаменатель которой — алгебраические выражения. Например, $\frac{a^2+b}{c}$; $\frac{3x}{4y}$; $\frac{3x-2y}{a+1}$ — алгебраические дроби.

Предусматривается, что буквы, используемые в записи алгебраической дроби, могут приобретать только такие значения, при которых знаменатель этой дроби не равен нулю. Например, дробь $\frac{a+3}{a(a-9)}$ имеет смысл при всех значениях переменной a, кроме 0 и 9

Основное свойство дроби. Сокращение алгебраических дробей

При умножении (делении) числителя и знаменателя дроби на одно и то же алгебраическое выражение получаем дробь, равную данной дроби.

Например, $\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)(a+b)}=\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$; $-\frac{-a}{b}=\frac{a}{b}$; $-\frac{a}{-b}=\frac{a}{b}$

Действия над дробями

Сложение и вычитание

Если $b \neq 0$, то $\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$.

Например,

$$\frac{2x-3y}{5xy}+\frac{2x-7y}{5xy}=\frac{2x-3y+2x-7y}{5xy}=\frac{4x-10y}{5xy};\quad \frac{x^2}{3x-6}-\frac{4}{3x-6}=\frac{(x-2)(x+2)}{3(x-2)}=\frac{x+2}{3}.$$

Чтобы сложить (вычесть) дроби с разными знаменателями, нужно:

- разложить на множители числитель и знаменатель каждой дроби;
- сократить множители в числителе и знаменателе каждой дроби;
- найти и записать общий знаменатель дробей;
- найти и записать дополнительные множители для каждой дроби;
- записать сумму (разность) произведений числителей и дополнительных множителей, учитывая знаки;
- упростить (если возможно) полученную дробь.

Например,

$$\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{b^2}{ab-a^2}-\frac{b}{a}=\frac{a^2}{b(a-b)}+\frac{b^2}{a(b-a)}-\frac{b}{a}=\frac{^{a/}a^2}{b(a-b)}-\frac{^{b/}b^2}{a(a-b)}-\frac{^{(a-b)b/}b}{a}=$$

$$=\frac{a^3-b^3-ab^2+b^3}{ab(a-b)}=\frac{a^3-ab^2}{ab(a-b)}=\frac{a(a-b)(a+b)}{ab(a-b)}=\frac{a+b}{b}$$

Умножение алгебраических дробей

Если $b \neq 0$, $d \neq 0$, то $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$. Например, $\frac{x^2-4}{3x(x-2)}\cdot\frac{x^2}{2+x}=\frac{(x-2)(x+2)\cdot x^2}{3x(x-2)(2+x)}=\frac{x}{3}$

Деление алгебраических дробей

Если $b \neq 0$, $c \neq 0$ и $d \neq 0$, то $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$.

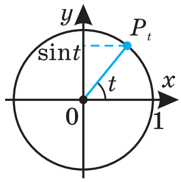
Например, $\frac{x^2-y^2}{2xy}:\frac{x+y}{4x}=\frac{x^2-y^2}{2xy}\cdot\frac{4x}{x+y}=\frac{(x-y)(x+y)\cdot 4x}{2xy(x+y)}=\frac{2(x-y)}{y}$

Синус, косинус, тангенс и котангенс произвольного числа

Синус числа

Синус числа t — ордината точки P_t единичной окружности.
Обозначают $\sin t$.
Наименьший положительный период 2π:

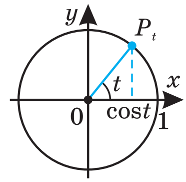
$$\sin(2\pi + t) = \sin t$$



Косинус числа

Косинус числа t — абсцисса точки P_t единичной окружности.
Обозначают $\cos t$.
Наименьший положительный период 2π:

$$\cos(2\pi + t) = \cos t$$

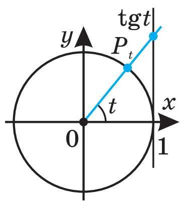


Тангенс числа

Тангенс числа t — отношение $\sin t$ к $\cos t$.
Обозначают $\operatorname{tg} t$.

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

Ось тангенсов — прямая $x = 1$.



Тангенс числа t — ордината соответствующей точки оси тангенсов.
Наименьший положительный период π:

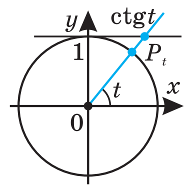
$$\operatorname{tg}(\pi + t) = \operatorname{tg} t$$

Котангенс числа

Котангенс числа t — отношение $\cos t$ к $\sin t$.
Обозначают $\operatorname{ctg} t$.

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

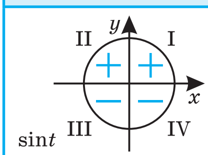
Ось котангенсов — прямая $y = 1$.

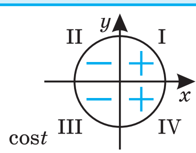


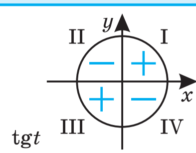
Котангенс числа t — абсцисса соответствующей точки оси котангенсов.
Наименьший положительный период π:

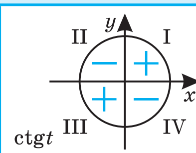
$$\operatorname{ctg}(\pi + t) = \operatorname{ctg} t$$

Знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса









Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов

t, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t, град	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\operatorname{tg} t$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0	—

Четность (нечетность)

$\sin(-t) = -\sin t$	$\cos(-t) = \cos t$	$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t$

Основные тригонометрические формулы

Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

2. $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$

3. $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$; $\alpha\neq\pi n$, $n\in Z$

4. $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1$; $\alpha\neq\dfrac{\pi n}{2}$, $n\in Z$

Формулы сложения

1. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$

2. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$

3. $\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta}{1\mp\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}$

4. $\mathrm{ctg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{-1\pm\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\beta}{\mathrm{ctg}\,\alpha\pm\mathrm{ctg}\,\beta}$

Формулы преобразования суммы в произведение

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

4. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=$

$=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

5. $\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; $\alpha,\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$

6. $\mathrm{ctg}\,\alpha\pm\mathrm{ctg}\,\beta=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$; $\alpha,\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$

Формулы понижения степени

1. $\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$

2. $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$

3. $\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}$

4. $\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{1+\cos2\alpha}{1-\cos2\alpha}$

Формула вспомогательного угла

1. $a\sin\alpha+b\cos\alpha=A\sin(\alpha+\varphi)$, где

$A=\sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi=\mathrm{arctg}\dfrac{b}{a}$

2. $\cos\alpha\pm\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\pm\alpha\right)=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\mp\alpha\right)$

Формулы двойного угла

1. $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, отсюда

$\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\sin2\alpha$

2. $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=$

$=2\cos^2\alpha-1$

3. $\mathrm{tg}\,2\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$

4. $\mathrm{ctg}\,2\alpha=\dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\,\alpha}$

Формулы половинного угла

1. $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

2. $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

3. $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$;

$\alpha\neq\pi+2\pi n$, $n\in Z$

Формулы преобразования произведения в сумму

1. $\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

2. $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$

3. $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$

Формулы приведения

	Угол t	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
Функции	$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
	$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
	$\mathrm{tg}\,t$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
	$\mathrm{ctg}\,t$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

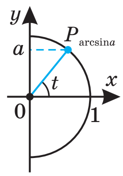
Универсальная тригонометрическая подстановка

1. $\sin\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; **2.** $\cos\alpha=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; $\alpha\neq\pi+2\pi n$, $n\in Z$

Арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа

Арксинус

Арксинусом числа a называют число (угол) t из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.



Обозначение: $\arcsin a$.

$\arcsin a = t \Leftrightarrow t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin t = a$.

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$

Арккосинус

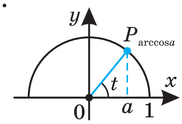
Арккосинусом числа a называют число (угол) t из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.

Обозначение: $\arccos a$.

$\arccos a = t \Leftrightarrow$

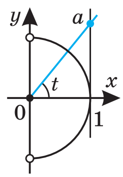
$\Leftrightarrow t \in [0; \pi]$ и $\cos t = a$.

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$



Арктангенс

Арктангенсом числа a называют число (угол) t из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.



Обозначение: $\mathrm{arctg}\, a$

$\mathrm{arctg}\, a = t \Leftrightarrow t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\mathrm{tg}\, t = a$.

$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a$

Арккотангенс

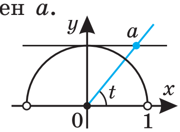
Арккотангенсом числа a называют число (угол) t из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a.

Обозначение: $\mathrm{arcctg}\, a$.

$\mathrm{arcctg}\, a = t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t \in (0; \pi)$ и $\mathrm{ctg}\, t = a$.

$\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a$



Значения арксинусов и арккосинусов некоторых чисел

	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arcsin a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Значения арктангенсов и арккотангенсов некоторых чисел

	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\mathrm{arctg}\, a$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$
$\mathrm{arcctg}\, a$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

Основные соотношения между арксинусом, арккосинусом, арктангенсом и арккотангенсом числа

$\sin(\arcsin a) = a,\ a \in [-1; 1]$	$\arcsin(\sin t) = t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos(\arccos a) = a,\ a \in [-1; 1]$	$\arccos(\cos t) = t,\ t \in [0; \pi]$
$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, a) = a,\ a \in R$	$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, t) = t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, a) = a,\ a \in R$	$\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, t) = t,\ t \in (0; \pi)$
$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2},\ a \in [-1; 1]$	$\mathrm{arctg}\, a + \mathrm{arcctg}\, a = \frac{\pi}{2},\ a \in R$

Прогрессии

Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Определение	
Арифметическая прогрессия — последовательность a_1; a_2; a_3; ...; a_n; ..., каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, к которому прибавлено одно и то же число d, называемое **разностью арифметической прогрессии**	**Геометрическая прогрессия** — последовательность b_1; b_2; b_3; b_4; ...; b_n; ..., каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q ($q \neq 0$, $\lvert q\rvert \neq 1$, $b_1 \neq 0$), называемое **знаменателем геометрической прогрессии**
Рекурентная формула	
$a_{n+1} = a_n + d,\ n \in N$	$b_{n+1} = b_n \cdot q$, где $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$, $\lvert q\rvert \neq 1$, $n \in N$
Формула n-го члена	
$a_n = a_1 + d\,(n - 1),\ n \in N$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Характеристическое свойство	
$a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2},\ n \in N$	$\lvert b_n\rvert = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$ (или $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$)
Формула суммы n первых членов	
$S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$; $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$	$S_n = b_1 \dfrac{1-q^n}{1-q},\ q \neq 1$; $S_n = \dfrac{b_n q - b_1}{q-1},\ q \neq 1$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $\lvert q\rvert < 1$

Сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = b_1 + b_2 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots b_1 q^{n-1} + \ldots$$

является числом, которое определяется по формуле: $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Например, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \ldots = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$

Некоторые числовые последовательности и их суммы

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 3) + (2n - 1) = n^2;$$

$$2 + 4 + 6 + \ldots + (2n - 2) + 2n = n(n + 1);$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3};$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2\,(2n^2 - 1)$$

Функции

Числовая функция с областью определения D — зависимость, при которой каждому числу x из множества D соответствует определенное единственное число y из множества E: $y = f(x)$.
Областью определения $D(f)$ называют множество значений, которые может приобретать x.
Областью значений $E(f)$ называют множество значений, которые может приобретать $f(x)$ для $x \in D(f)$

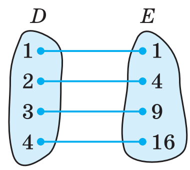
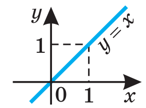
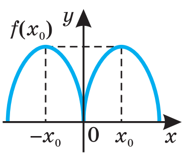


График функции $y = f(x)$ — множество точек плоскости с координатами (x, y), где x пробегает всю область определения функции $f(x)$, а y — соответствующее значение функции

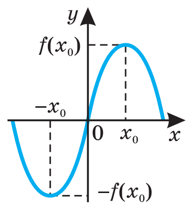


Четные и нечетные функции

Функция $y = f(x)$ **четная**, если для любых x и $(-x)$ из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. График четных функций симметричен относительно оси ординат

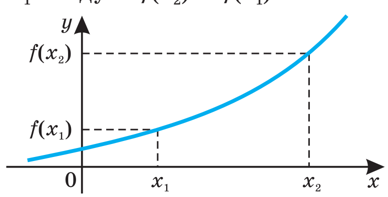


Функция $y = f(x)$ **нечетная**, если для любых x и $(-x)$ из области определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечетных функций симметричен относительно начала координат

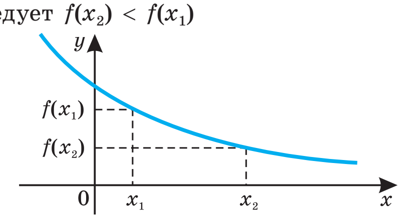


Возрастающие и убывающие функции

Функция $y = f(x)$ **возрастающая** на данном числовом промежутке X, если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует большее значение функции $f(x)$, то есть для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) > f(x_1)$

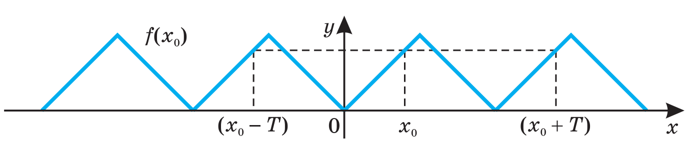


Функция $y = f(x)$ **убывающая** на данном числовом промежутке X, если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует меньшее значение функции $f(x)$, то есть для любых $x_1, x_2 \in X$ из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) < f(x_1)$



Периодические функции

Периодическая функция: $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$, $x \in D(f)$, $T > 0$.
Число T — **период функции**, а наименьшее положительное значение T — **основной период функции.**
График функции состоит из бесконечно повторяемых фрагментов графика функции на промежутке $[0; T]$. Если функция $y = f(x)$ имеет наименьший положительный период T, то функция $y = f(kx + b)$ имеет наименьший положительный период $\dfrac{T}{|k|}$



Линейная функция, ее свойства и график. Модуль *x*. Квадратичная функция, ее свойства и график

Линейная функция, ее свойства и график. Модуль *x*

Функция $y = kx$

Свойства

1. Область определения: R.
2. Функция нечетная.
3. Для $x \in R$ функция:

убывает	возрастает

4. Область значений: R.
5. Функция непрерывная и дифференцированная.
6. График — прямая, проходящая через начало координат

Функция $y = kx + b$

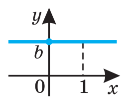
Свойства

1. Область определения: R.
2. Функция ни четная, ни нечетная.
3. Для $x \in R$ функция:

возрастает	убывает

4. Область значений: R.
5. Функция непрерывная и дифференцированная.
6. График — прямая

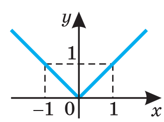
Функция $y = b$



Свойства

1. Область определения: R.
2. Функция четная. Если $b = 0$, то функция и четная, и нечетная.
3. Для $x \in R$ функция постоянная.
4. Область значений: $\{b\}$.
5. Функция непрерывная и дифференцированная.
6. График — прямая, параллельная Ox, если $b \neq 0$, и прямая, совпадающая с Ox, если $b = 0$.
7. Функция периодическая, любое число является периодом, наименьшего положительного периода нет

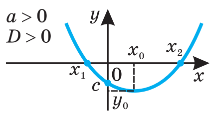
Функция $y = |x|$

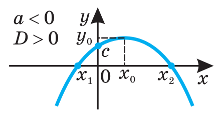


Свойства

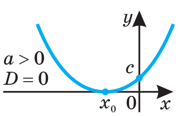
1. Область определения: R.
2. Функция четная.
3. На промежутке $(-\infty;\ 0]$ функция убывает; на промежутке $[0;\ +\infty)$ функция возрастает.
4. Область значений: $[0;\ +\infty)$.
5. Функция непрерывная и дифференцированная для $x \neq 0$

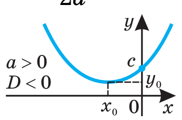
Квадратичная функция, ее свойства и график

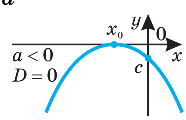


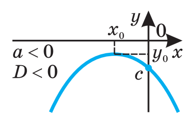


$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};\quad x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a};\quad y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$$









$$x_0 = -\frac{b}{2a};\quad y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$$

Свойства

1. Область определения: R.
2. Если $b = 0$, то функция четная. Если $b \neq 0$, то функция ни четная, ни нечетная.
3. На промежутке $(-\infty;\ x_0]$ функция:

убывает	возрастает

На промежутке $[x_0;\ +\infty)$ функция:

возрастает	убывает

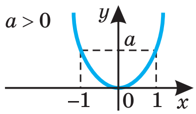
4. Область значений:

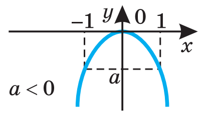
$[y_0;\ +\infty)$	$(-\infty;\ y_0]$

5. Функция непрерывная и дифференцированная.
6. График функции — парабола

Степенная функция, ее свойства и график

Функция $y = ax^2$ ($y = ax^{2n}$, $a \neq 0$, $n \in N$)





Свойства

1. Область определения: R.
2. Функция четная.
3. На промежутке $(-\infty;\ 0]$ функция:

убывает	возрастает

На промежутке $[0;\ +\infty)$ функция:

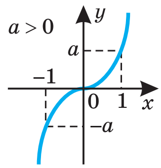
возрастает	убывает

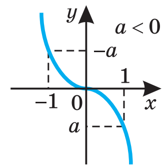
4. Область значений:

$[0;\ +\infty)$	$(-\infty;\ 0]$

5. Функция непрерывная и дифференцированная.
6. График функции $y = ax^2$ — парабола

Функция $y = ax^3$ ($y = ax^{2n+1}$, $a \neq 0$, $n \in N$)





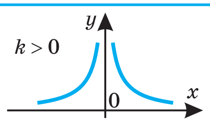
Свойства

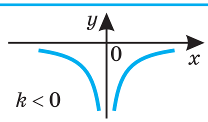
1. Область определения: R.
2. Функция четная.
3. Для $x \in R$ функция:

возрастает	убывает

4. Область значений: R.
5. Функция непрерывная и дифференцированная.
6. График функции $y = ax^3$ — кубическая парабола

Функция $y = \dfrac{k}{x^2}$ $\left(y = \dfrac{k}{x^{2n}},\ k \neq 0,\ n \in N\right)$





Свойства

1. Область определения: $x \neq 0$.
2. Функция четная.
3. Для $x \in (-\infty;\ 0)$ функция:

возрастает	убывает

Для $x \in (0;\ +\infty)$ функция:

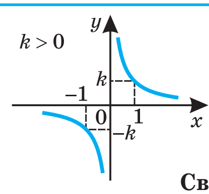
убывает	возрастает

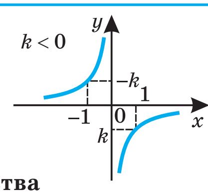
4. Область значений:

$(0;\ +\infty)$	$(-\infty;\ 0)$

5. Функция непрерывная и дифференцированная в области определения

Функция $y = \dfrac{k}{x}$ $\left(y = \dfrac{k}{x^{2n+1}},\ k \neq 0,\ n \in N\right)$





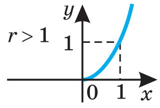
Свойства

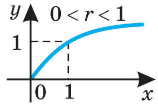
1. Область определения: $x \neq 0$.
2. Функция нечетная.
3. На промежутке $(-\infty;\ 0)$ и на промежутке $(0;\ +\infty)$ функция:

убывает	возрастает

4. Область значений: $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.
5. Функция непрерывная и дифференцированная для $x \neq 0$.
6. График функции $y = \dfrac{k}{x}$ — гипербола

Функция $y = x^r$ (r — положительная несократимая дробь)

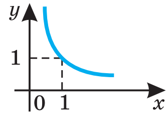




Свойства

1. Область определения: $[0;\ +\infty)$.
2. Функция ни четная, ни нечетная.
3. Для $x \in [0;\ +\infty)$ функция возрастает.
4. Область значений: $(0;\ +\infty)$.
5. Функция непрерывная и дифференцированная при $x \in (0;\ +\infty)$

Функция $y = x^{-r}$ (r — положительная несократимая дробь)



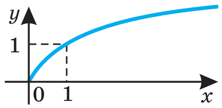
Свойства

1. Область определения: $(0;\ +\infty)$.
2. Функция ни четная, ни нечетная.
3. Для $x \in (0;\ +\infty)$ функция убывает.
4. Область значений: $(0;\ +\infty)$.
5. Функция непрерывная и диференцированная

Корень n-й степени, показательная и логарифмическая функции, их свойства и графики

Корень n-й степени

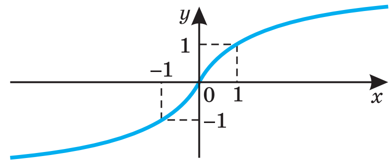
Функция $y=\sqrt{x}$ $(y=\sqrt[2n]{x},\ n \in N)$



Свойства

1. Область определения: $[0;\ +\infty)$.
2. Функция ни четная, ни нечетная.
3. На промежутке $[0;\ +\infty)$ функция возрастает.
4. Область значений: $[0;\ +\infty)$.
5. Функция непрерывная и дифференцированная при $x \in (0;\ +\infty)$

Функция $y=\sqrt[3]{x}$ $(y=\sqrt[2n+1]{x},\ n \in N)$

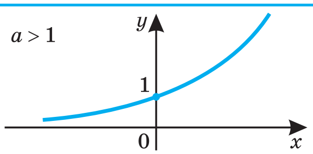


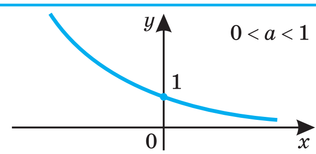
Свойства

1. Область определения: R.
2. Функция нечетная.
3. Для $x \in R$ функция возрастает.
4. Область значений: R.
5. Функция непрерывная и дифференцированная

Показательная функция

Функция $y = a^x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$





Свойства

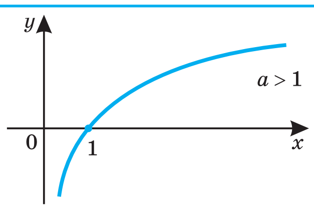
1. Область определения: R.
2. Функция ни четная, ни нечетная.
3. Для $x \in R$ функция:

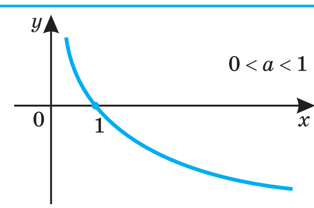
$a > 1$	$0 < a < 1$
возрастает	убывает

4. Область значений: $(0;\ +\infty)$.
5. Функция непрерывная и дифференцированная

Логарифмическая функция

Функция $y=\log_a x$ $(a \neq 1,\ a > 0)$





Свойства

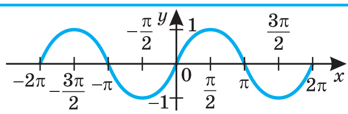
1. Область определения: $(0;\ +\infty)$.
2. Функция ни четная, ни нечетная.
3. Для $x \in (0;\ +\infty)$ функция:

$a > 1$	$0 < a < 1$
возрастает	убывает

4. Область значений: R.
5. Функция непрерывная и дифференцированная

Графики тригонометрических и обратно тригонометрических функций

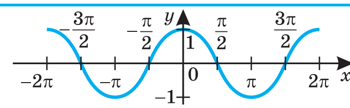
Функция $y = \sin x$



Свойства

1. Область определения: R.
2. Область значений: $[-1;\ 1]$.
3. Функция нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$.
4. Функция периодическая с периодом 2π: $\sin(x + 2\pi) = \sin(x - 2\pi) = \sin x$.
5. Нули функции $x = \pi n,\ n \in Z$.
6. Функция возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right],\ n \in Z$; убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right],\ n \in Z$.
7. Наименьшее значение $y = -1$, если $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in Z$. Наибольшее значение $y = 1$, если $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in Z$

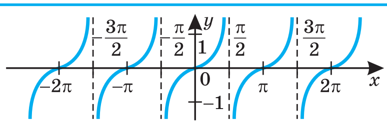
Функция $y = \cos x$



Свойства

1. Область определения: R.
2. Область значений: $[-1;\ 1]$.
3. Функция четная: $\cos(-x) = \cos x$.
4. Функция периодическая с периодом 2π: $\cos(x + 2\pi) = \cos(x - 2\pi) = \cos x$.
5. Нули функции $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in Z$.
6. Функция возрастает на промежутках $[-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n],\ n \in Z$; убывает на промежутках $[2\pi n;\ \pi + 2\pi n],\ n \in Z$.
7. Наименьшее значение $y = -1$, если $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$.
Наибольшее значение $y = 1$, если $x = 2\pi n,\ n \in Z$

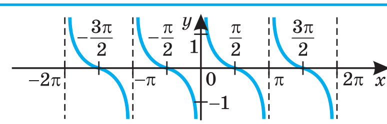
Функция $y = \operatorname{tg} x$



Свойства

1. Область определения: $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in Z$.
2. Область значений: R.
3. Функция нечетная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.
4. Функция периодическая с периодом π: $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x$.
5. Нули функции $x = \pi n,\ n \in Z$.
6. Функция возрастает на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right),\ n \in Z$

Функция $y = \operatorname{ctg} x$

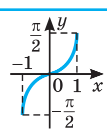


Свойства

1. Область определения: $x \neq \pi n,\ n \in Z$.
2. Область значений: R.
3. Функция нечетная: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.
4. Функция периодическая с периодом π: $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg}(x - \pi) = \operatorname{ctg} x$.
5. Нули функции $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in Z$.
6. Функция убывает на промежутках $[\pi n;\ \pi + \pi n],\ n \in Z$

Функция $y = \arcsin x$

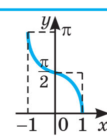
Свойства



1. Область определения: $[-1;\ 1]$.
2. Область значений: $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Функция возрастающая.
4. Функция нечетная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

Функция $y = \arccos x$

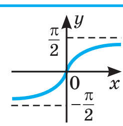
Свойства



1. Область определения: $[-1;\ 1]$.
2. Область значений: $[0;\ \pi]$.
3. Функция убывающая.
4. Функция ни четная, ни нечетная: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

Функция $y = \operatorname{arctg} x$

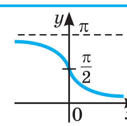
Свойства



1. Область определения: R.
2. Область значений: $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.
3. Функция возрастающая.
4. Функция нечетная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$

Свойства



1. Область определения: R.
2. Область значений: $(0;\ \pi)$.
3. Функция убывающая.
4. Функция ни четная, ни нечетная: $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$

Уравнение. Решение уравнения. Равносильные уравнения

Уравнение	Решение уравнения
Уравнением называют равенство, содержащее переменную (неизвестное). Например, $2x + 3 = 0$, $x^2 - 5x + 6 = 0$ — уравнения	**Решением (корнем) уравнения** называют значение переменной, при подстановке которого в уравнение получают правильное числовое равенство. Например, число 2 — корень уравнения $x^2 - 2x = 0$, поскольку $2^2 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0$
Решить уравнение означает найти его корни или доказать, что их нет	

Равносильные уравнения

Два уравнения называют **равносильными**, если множества их решений совпадают. Например, уравнения $x + 2 = 3$ и $x - 1 = 0$ равносильные, поскольку они имеют общий корень 1 и других корней не имеют.
Решение любого уравнения, как правило, сводится к замене его равносильным уравнением

Основные теоремы о равносильности уравнений

1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число или выражение с переменной, которое не теряет смысла ни при каком значении переменной, то получим уравнение, равносильное данному.
   Например, уравнение $x + 1 = 3$ равносильно уравнению $x = 2$, поскольку второе уравнение можно получить из первого уравнения прибавлением к обеим частям первого уравнения числа -1 (либо первое уравнение можно получить из второго прибавлением к обеим частям второго уравнения числа 1).
2. Если из одной части уравнения перенести во вторую часть слагаемое с противоположным знаком, то получим уравнение, равносильное данному уравнению.
   Например, уравнение $x - 3 = 7$ равносильно уравнению $x = 7 + 3$, то есть уравнению $x = 10$.
3. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю, или на выражение с переменной, которое не превращается в ноль ни при каком значении переменной и не теряет смысла на множестве допустимых значений переменной для данного уравнения, то получим уравнение, равносильное данному.
   Например, уравнение $5x = 20$ равносильно уравнению $5x : 5 = 20 : 5$, то есть уравнению $x = 4$; уравнение $-\frac{1}{2}x = 5$ равносильно уравнению $-\frac{1}{2}x(-2) = 5 \cdot (-2)$, то есть уравнению $x = -10$

Системы и совокупности уравнений с одной переменной

Система уравнений — уравнения, относительно которых ставится задача: найти общие корни. Знак системы — $\{$. Например, $(x^2-1)^2+(x+1)^2=0$; $\begin{cases}(x^2-1)^2=0,\\(x+1)^2=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-1=0,\\x+1=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=\pm1,\\x=-1;\end{cases}$ $x = -1$	**Совокупность уравнений** — уравнения, относительно которых ставится задача: найти все корни данных уравнений. Знак совокупности — $[$. Например, $(x^2-1)^2(x+1)^2=0$; $\left[\begin{array}{l}(x^2-1)^2=0,\\(x+1)^2=0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x^2-1=0,\\x+1=0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\pm1,\\x=-1;\end{array}\right.$ $x = \pm1$

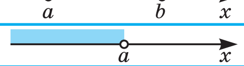
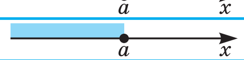
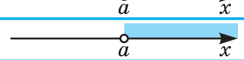
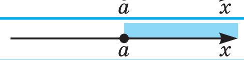
Неравенства. Решение неравенств. Равносильные неравенства

Неравенства	Решения неравенств
Неравенством с переменной (неизвестным) называют два выражения с переменной (неизвестным), между которыми стоит один из знаков неравенства: $>$ (больше), $<$ (меньше), $\geq$ (больше или равно; не меньше), $\leq$ (меньше или равно; не больше). Например, $3x + 2 > 6$, $x^2 + x + 1 > 0$ — неравенства с одной переменной	**Решением неравенства** с одной переменной называют значение переменной, которое превращает его в правильное числовое неравенство. Например, число 2 — решение неравенства $x + 3 > 4$

Решение неравенств

Решить неравенство с одной переменной означает найти все его решения или доказать, что решений нет. Решениями неравенства является некоторое подмножество чисел. Ниже в таблице приведены некоторые числовые подмножества, их обозначения, изображения на координатной прямой и запись в виде неравенства

Решения неравенства и их обозначения

Название	Обозначение	Изображение	Запись в виде неравенства
Числовая прямая	$(-\infty; +\infty)$, R		$-\infty < x < +\infty$
Замкнутый промежуток (отрезок)	$[a, b]$		$a \leq x \leq b$
Открытый промежуток (интервал)	$(a; b)$		$a < x < b$
Полуоткрытый промежуток	$[a; b)$		$a \leq x < b$
	$(a; b]$		$a < x \leq b$
Бесконечный промежуток (луч)	$(-\infty; a)$		$x < a$
	$(-\infty; a]$		$x \leq a$
	$(a; +\infty)$		$x > a$
	$[a; +\infty)$		$x \geq a$

Равносильные неравенства

Неравенства, имеющие одни и те же решения, называют **равносильными**. Неравенства, не имеющие решений, также считают равносильными.
Решение неравенств, как правило, сводится к замене данного неравенства неравенством, равносильным ему

Свойства неравенства с одной переменной

1. Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получим равносильное ему неравенство. Например, неравенство $x + 2 > 3$ равносильно неравенству $x + 2 - 2 > 3 - 2$, то есть $x > 1$.
2. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получим равносильное ему неравенство.
   Например, $\frac{1}{2}x > 3$ равносильно неравенству $\frac{1}{2}x \cdot 2 > 3 \cdot 2$, то есть $x > 6$.
3. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, сменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим равносильное ему неравенство. Например, неравенство $-2x < 10$ равносильно неравенству $-2x : (-2) > 10 : (-2)$, то есть $x > -5$

Уравнения и системы уравнений с двумя переменными

Уравнения с двумя переменными

Уравнение, содержащее две переменные (неизвестные), называют **уравнением с двумя переменными (неизвестными)**.
Например, $x - y = 4$, $xy = 12$ — уравнения с двумя переменными

Решением уравнения с двумя переменными называют пару значений переменных, которые превращают это уравнение в правильное числовое равенство. Например, пара чисел $x = 7$ и $y = 3$ является решением уравнения $2x - 4y = 2$

Система уравнений с двумя переменными

Система уравнений с двумя переменными — несколько уравнений, относительно которых ставится задача: найти общие решения. Знак системы — $\{$.
$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x-y=1 \end{cases}$ — системы уравнений с двумя переменными

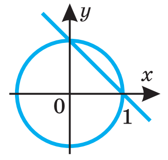
Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, которая превращает каждое уравение системы в правильное равенство. Пара (2; 3) является решением системы $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6 \end{cases}$

Графический способ решения системы двух уравнений с двумя переменными

Чтобы решить систему уравнений графическим способом, следует:
1) выполнить равносильные преобразования системы так, чтобы удобно было строить графики уравнений системы;
2) построить графики;
3) найти координаты точек пересечения построенных линий. Эти координаты являются решениями системы.

Построив графики уравнений $x + y = 1$ (прямая), $x^2 + y^2 = 1$ (окружность), находим решения (1; 0), (0; 1)

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$



Решение системы двух уравнений с двумя переменными способом сложения

Чтобы решить систему уравнений способом сложения, следует:
1) уравнять коэффициенты при одной переменной путем почленного умножения обоих уравнений на соответствующим образом подобранные множители;
2) сложить (вычесть) почленно уравнения системы, исключая одну из переменных;
3) решить полученное уравнение с одной переменной;
4) значение второй переменной можно найти таким же образом;
5) записать ответ.

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)+(x-y)=3+1, \\ (x+y)-(x-y)=3-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=4, \\ 2y=2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$$

Решение системы двух уравнений с двумя переменными способом подстановки

Чтобы решить систему уравнений способом подстановки, следует:
1) из одного уравнения системы выразить одну переменную через вторую и известные величины;
2) найденное значение подставить во второе уравнение системы, получить уравнение относительно второй переменной;
3) решить полученное уравнение и найти значение этой переменной;
4) подставить найденные значения в выражение для первой переменной, получить соответствующие значения и записать ответ.

$$\begin{cases} x+y=1, \\ 3x-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y, \\ 3(1-y)-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y, \\ 3-3y-y=3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y, \\ y=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-0, \\ y=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=0 \end{cases}$$

Линейные уравнения и неравенства. Системы неравенств с одной переменной. Неполные квадратные уравнения

Линейное уравнение $ax = b$	
Если $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$	$3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$, $3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Если $a = 0$, $b \neq 0$, то решений нет	$0x = 5 \Leftrightarrow x = \varnothing$
Если $a = 0$, $b = 0$, то x — любое число	$0x = 0 \Leftrightarrow x \in R$

Линейные неравенства

Неравенство	$a > 0$	$a = 0$			$a < 0$
		$b > 0$	$b = 0$	$b < 0$	
$ax > b$	$x > \frac{b}{a}$, $x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$	$\varnothing$	$\varnothing$	$x \in R$	$x < \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$
$ax \geq b$	$x \geq \frac{b}{a}$, $x \in \left[\frac{b}{a}; +\infty\right)$	$\varnothing$	$x \in R$	$x \in R$	$x \leq \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right]$
$ax < b$	$x < \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$	$x \in R$	$\varnothing$	$\varnothing$	$x > \frac{b}{a}$, $x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$
$ax \leq b$	$x \leq \frac{b}{a}$, $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right]$	$x \in R$	$x \in R$	$\varnothing$	$x \geq \frac{b}{a}$, $x \in \left[\frac{b}{a}; +\infty\right)$

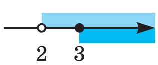
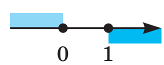
Системы неравенств с одной переменной

Система неравенств с одной переменной — неравенства, относительно которых ставится задача найти общие решения.

Чтобы решить систему неравенств с одной переменной, следует:

1) отдельно решить каждое неравенство;

2) найти пересечение (сечение) найденных решений

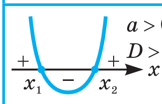
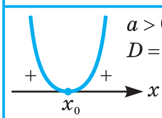
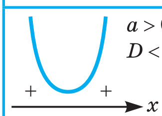
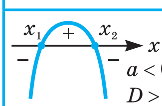
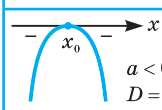
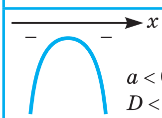
$\begin{cases} x \geq 3, \\ x > 2. \end{cases}$  $x \in [3; +\infty)$	$\begin{cases} 5x+3 \leq 3, \\ 2x+1 \geq 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x \leq 0, \\ 2x \geq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 1. \end{cases}$  $x = \varnothing$

Неполные квадратные уравнения

Уравнение вида $ax^2 + c = 0$, $(b = 0)$	
Если $ac > 0$, то решений нет	$5x^2 + 2 = 0$, $x^2 = -\frac{2}{5}$, $x = \varnothing$
Если $ac < 0$, то $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$5x^2 - 2 = 0$, $5x^2 = 2$, $x^2 = \frac{2}{5}$, $x = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$
Уравнение вида $ax^2 + bx = 0$, $(c = 0)$	
$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -\frac{b}{a} \end{array}\right.$	$2x^2 + 3x = 0$, $x(2x + 3) = 0$, $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 2x+3 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -1,5; \end{array}\right.$ $x \in \{0; -1,5\}$
Уравнение вида $ax^2 = 0$	
Имеет один корень $x = 0$	$5x^2 = 0$, $x^2 = 0$, $x = 0$

Квадратные уравнения и неравенства

Квадратные уравнения	
$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$	$D=b^2-4ac$ — дискриминант
Если $D>0$, то $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$	$x^2-2x-4=0;\ x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{2^2+4\cdot1\cdot4}}{2};$ $x_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{20}}{2};\ x_{1,2}=\dfrac{2\pm2\sqrt{5}}{2};\ x_{1,2}=1\pm\sqrt{5};\ x\in\{1\pm\sqrt{5}\}$
Если $D=0$, то $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	$9x^2+6x+1=0;$ $D=6^2-4\cdot9\cdot1=0;\ x=-\dfrac{6}{18};\ x=-\dfrac{1}{3}$
Если $D<0$, то действительных корней нет	$x^2+x+1=0;$ $D=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3;\ x=\varnothing$
Отдельные случаи	
Приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$, $x_{1,2}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q}$	$x^2-6x+5=0;\ x_{1,2}=3\pm\sqrt{3^2-5};$ $x=3\pm2;\ x_1=5,\ x_2=1;\ x\in\{1;\ 5\}$
Уравнение вида $ax^2+2kx+c=0$, $a\neq0,\ x_{1,2}=\dfrac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{2}$	$3x^2-2x-5=0;\ x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1^2+15}}{3};$ $x_{1,2}=\dfrac{1\pm4}{3};\ x_1=1\dfrac{2}{3};\ x_2=-1;\ x\in\left\{1\dfrac{2}{3};-1\right\}$

Квадратные неравенства				
Неравенство	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\geq0$	$ax^2+bx+c\leq0$
 $a>0$ $D>0$	$(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;\ +\infty)$	$(x_1;\ x_2)$	$(-\infty;\ x_1]\cup[x_2;\ +\infty)$	$[x_1;\ x_2]$
 $a>0$ $D=0$	$(-\infty;\ x_0)\cup(x_0;\ +\infty)$	$\varnothing$	$x\in R$	x_0
 $a>0$ $D<0$	$x\in R$	$\varnothing$	$x\in R$	$\varnothing$
 $a<0$ $D>0$	$(x_1;\ x_2)$	$(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;\ +\infty)$	$[x_1;\ x_2]$	$(-\infty;\ x_1]\cup[x_2;\ +\infty)$
 $a<0$ $D=0$	$\varnothing$	$(-\infty;\ x_0)\cup(x_0;\ +\infty)$	x_0	$x\in R$
 $a<0$ $D<0$	$\varnothing$	$x\in R$	$\varnothing$	$x\in R$

Биквадратные уравнения. Иррациональные уравнения и неравенства

Биквадратные уравнения

$ax^4+bx^2+c=0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} t=x^2, \\ at^2+bt+c=0 \end{cases}$	$x^4-5x^2+4=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=x^2, \\ t^2-5t+4=0; \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=x^2, \\ \left[\begin{array}{l} t=4, \\ y=1; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=4, \\ x^2=1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 2, \\ x=\pm 1; \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\{\pm 1; \pm 2\}$

Иррациональные уравнения

- $\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x), \quad n \in N$

$\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow f(x)=g^{2n+1}(x)$	$\sqrt[3]{x-1}=2;\ x-1=2^3;\ x-1=8;\ x=9$

- $\sqrt[2n]{f(x)}=g(x), \quad n \in N$

$\sqrt[2n]{f(x)}=g(x), \quad n \in N \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g^{2n}(x), \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$	$\sqrt{6-x-x^2}=x+1; \quad \begin{cases} 6-x-x^2=(x+1)^2, \\ x+1\geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 6-x-x^2=x^2+2x+1, \\ x\geq -1; \end{cases} \begin{cases} 2x^2+3x-5=0, \\ x\geq -1; \end{cases} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-2{,}5, \end{array}\right. \\ x\geq -1; \end{array}\right. x=1$

- $\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)}, \quad n \in N$

$\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\geq 0; \end{cases}$ $\sqrt[2n]{f(x)}=\sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$	$\sqrt{x^2-5}=\sqrt{x+1};$ $\begin{cases} x^2-5=x+1, \\ x+1\geq 0; \end{cases} \begin{cases} x^2-x-6=0, \\ x\geq -1; \end{cases} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-2, \end{array}\right. \\ x\geq -1; \end{array}\right. x=3$

Иррациональные неравенства

Неравенство	$a<0$	$a=0$	$a>0$
$\sqrt[2n]{x}<a$	$\varnothing$	$\varnothing$	$0\leq x<a^{2n}$
$\sqrt[2n]{x}>a$	$x\geq 0$	$x>0$	$x>a^{2n}$
$\sqrt[2n]{x}\leq a$	$\varnothing$	$x=0$	$0\leq x\leq a^{2n}$
$\sqrt[2n]{x}\geq a$	$x\geq 0$	$x\geq 0$	$x\geq a^{2n}$
$\sqrt[2n+1]{x}>a$	$x>a^{2n+1}$		
$\sqrt[2n+1]{x}\geq a$	$x\geq a^{2n+1}$		
$\sqrt[2n+1]{x}<a$	$x<a^{2n+1}$		
$\sqrt[2n+1]{x}\leq a$	$x\leq a^{2n+1}$		

$\sqrt[2n+1]{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow f(x)>g^{2n+1}(x)$	$\sqrt[2n+1]{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow f(x)<g^{2n+1}(x)$
$\sqrt[2n]{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)<g^{2n}(x), \\ f(x)\geq 0 \end{cases}$	$\sqrt[2n]{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)\geq 0, \\ f(x)>g^{2n}(x), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)<0, \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\sqrt[2n]{f(x)}>\sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x), \\ g(x)\geq 0 \end{cases}$$

Показательные уравнения и неравенства

Показательные уравнения	
$a^{f(x)}=a^{g(x)}$	
Если $a>0$, $a\neq 1$, то $f(x)=g(x)$	$3^{x+2}=9^{x+1}$; $3^{x+2}=3^{2x+2}$; $x+2=2x+2$; $x=0$
$a^{f(x)}=b$, $a>0$, $a\neq 1$	
Если $b>0$, то $f(x)=\log_a b$	$3^x=2$; $x=\log_3 2$
Если $b\leq 0$, то корней нет	$3^x=-2$. Корней нет
$b_1a^{mx+k_1}+b_2a^{mx+k_2}+\ldots+b_na^{mx+k_n}=c$	
$b_1a^{mx+b_1}+b_2a^{mx+k_2}+\ldots+b_na^{mx+k_n}=c \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a^{mx}(b_1a^{k_1}+b_2a^{k_2}+\ldots+b_na^{k_n})=c$	$3^{2x-2}+3^{2x}=30$; $3^{2x}(3^{-2}+1)=30$; $3^{2x}\cdot\left(\frac{1}{9}+1\right)=30$; $3^{2x}=27$; $3^{2x}=3^3$; $2x=3$; $x=1{,}5$
$Aa^{2x}+Ba^x+C=0$	
$Aa^{2x}+Ba^x+C=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a^x=t>0, \\ At^2+Bt+C=0 \end{cases}$	$2^{x+1}+4^x=8$; $(2^x)^2+2\cdot 2^x-8=0$; $\begin{cases} 2^x=t>0, \\ t^2+2t-8=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x=t>0, \\ \left[\begin{array}{l} t=-4, \\ t=2; \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} 2^x=-4, \\ 2^x=2; \end{array}\right.$ $x=1$
$Aa^{2x}+Ba^xb^x+Cb^{2x}=0$	
$Aa^{2x}+Ba^xb^x+Cb^{2x}=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A\left(\frac{a}{b}\right)^{2x}+B\left(\frac{a}{b}\right)^{x}+C=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^x=t>0, \\ At^2+Bt+C=0 \end{cases}$	$6^x+9^x=2\cdot 4^x$; $(2\cdot 3)^x+3^{2x}=2\cdot 2^{2x}$; $\left(\frac{2\cdot 3}{3^2}\right)^x+\frac{3^{2x}}{3^{2x}}=2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}$; $2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-1=0$; $\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x=t, \\ 2t^2-t-1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x=t, \\ \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=-\frac{1}{2}; \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x=1, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x=-\frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $x=0$

Показательные неравенства			
Неравенство	$b\leq 0$	$b>0$	
		$a>1$	$0<a<1$
$a^x<b$, $a>0$, $a\neq 1$	$\varnothing$	$x<\log_a b$	$x>\log_a b$
$a^x>b$, $a>0$, $a\neq 1$	$x\in R$	$x>\log_a b$	$x<\log_a b$
$a^{f(x)}<b$, $a>0$, $a\neq 1$	$\varnothing$	$f(x)<\log_a b$	$f(x)>\log_a b$
$a^{f(x)}>b$, $a>0$, $a\neq 1$	$x\in D(f)$	$f(x)>\log_a b$	$f(x)<\log_a b$

$a^{f(x)}>a^{g(x)}$, $a^{f(x)}<a^{g(x)}$
Если $a>1$, то $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$, а $a^{f(x)}<a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$
Если $0<a<1$, то $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$, а $a^{f(x)}<a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$

Логарифмические уравнения и неравенства

Логарифмические уравнения

$\log_a x = b,\ a>0,\ a\ne 1$	
$\log_a x = b,\ a>0,\ a\ne 1 \Leftrightarrow x=a^b$	$\log_2 x=-3,\quad x=2^{-3};\quad x=\frac{1}{8}$
$\log_a f(x) = b,\ a>0,\ a\ne 1$	
$\log_a f(x)=b,\ a>0,\ a\ne 1 \Leftrightarrow f(x)=a^b$	$\log_3(x-12)=2;\ x-12=3^2;\ x-12=9;\ x=21$
$\log_a f(x)=g(x),\ a>0,\ a\ne 1$	
$\log_a f(x)=g(x),\ a>0;\ a\ne 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)=a^{g(x)} \end{cases}$	$\log_2(2^{x+1}-1)=x;\ \begin{cases}2^{x+1}-1=2^x, \\ 2^{x+1}-1>0;\end{cases}\ \begin{cases}2^x=1, \\ 2^{x+1}>1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=0, \\ 2^{x+1}>1;\end{cases}\ x=0$
$\log_a f(x)=\log_a g(x),\ a>0,\ a\ne 1$	
$\log_a f(x)=\log_a g(x),\ a>0;\ a\ne 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0, \\ g(x)>0 \end{cases}$	$\lg(2x^2+3x)=\lg(6x+2);\ \begin{cases}2x^2+3x=6x+2, \\ 6x+2>0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-3x-2=0, \\ x>-\frac{1}{3};\end{cases}\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2, \\ x=-0{,}5,\end{array}\right. \\ x>-\frac{1}{3};\end{cases}\ x=2$

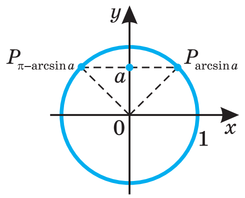
Логарифмические неравенства

Неравенство	$a>1$	$0<a<1$
$\log_a x<b$	$\begin{cases}x<a^b, \\ x>0\end{cases}$	$x>a^b$
$\log_a x>b$	$x>a^b$	$\begin{cases}x<a^b, \\ x>0\end{cases}$
$\log_a x\le b$	$\begin{cases}x\le a^b, \\ x>0\end{cases}$	$x\ge a^b$
$\log_a x\ge b$	$x\ge a^b$	$\begin{cases}x\le a^b, \\ x>0\end{cases}$
$\log_a f(x)<b$	$\begin{cases}f(x)<a^b, \\ f(x)>0\end{cases}$	$f(x)>a^b$
$\log_a f(x)\le b$	$\begin{cases}f(x)\le a^b, \\ f(x)>0\end{cases}$	$f(x)\ge a^b$
$\log_a f(x)>b$	$f(x)>a^b$	$\begin{cases}f(x)<a^b, \\ f(x)>0\end{cases}$
$\log_a f(x)\ge b$	$f(x)\ge a^b$	$\begin{cases}f(x)\le a^b, \\ f(x)>0\end{cases}$

$\log_a f(x)<\log_a g(x)$	
$a>1 \Rightarrow \log_a f(x)<\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)<g(x), \\ f(x)>0\end{cases}$	$0<a<1 \Rightarrow \log_a f(x)<\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)>g(x), \\ g(x)>0\end{cases}$

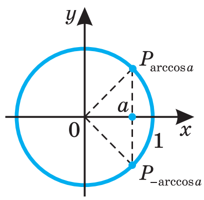
Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств

1. $\sin t = a$. Если $|a| \le 1$, то
$t = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$.
Если $|a| > 1$, то корней нет



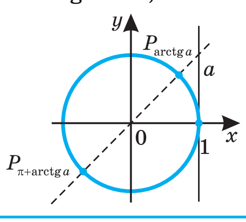
1) $\sin t \le a,\ |a| < 1$.
$\pi - \arcsin a + 2\pi k \le t \le 2\pi + \arcsin a + 2\pi k$;
2) $\sin t \ge a,\ |a| < 1$.
$\arcsin a + 2\pi k \le t \le \pi - \arcsin a + 2\pi k$

2. $\cos t = a$. Если $|a| \le 1$, то
$t = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$.
Если $|a| > 1$, то корней нет



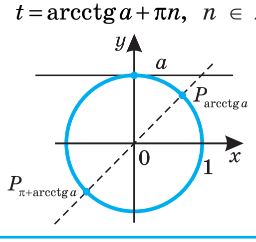
1) $\cos t \le a,\ |a| < 1$.
$\arccos a + 2\pi k \le t \le 2\pi - \arccos a + 2\pi k$;
2) $\cos t \ge a,\ |a| < 1$.
$-\arccos a + 2\pi k \le t \le \arccos a + 2\pi k$

3. $\operatorname{tg} t = a$. $t = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z$



1) $\operatorname{tg} t \le a$.
$$-\frac{\pi}{2} + \pi k < t \le \operatorname{arctg} a + \pi k;$$
2) $\operatorname{tg} t \ge a$.
$$\operatorname{arctg} a + \pi k \le t < \frac{\pi}{2} + \pi k$$

4. $\operatorname{ctg} t = a$. $t = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z$



1) $\operatorname{ctg} t \le a$.
$\operatorname{arcctg} a + \pi k \le t < \pi + \pi k$;
2) $\operatorname{ctg} t \ge a$.
$\pi k < t \le \operatorname{arctg} a + \pi k$

$\sin t = 0,\ t = \pi n,\ n \in Z$.

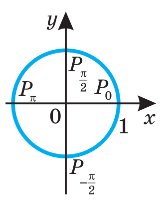
$\sin t = 1,\ t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

$\sin t = -1,\ t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$.

$\cos t = 0,\ t = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

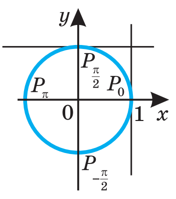
$\cos t = 1,\ t = 2\pi n,\ n \in Z$.

$\cos t = -1,\ t = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$



$\operatorname{tg} t = 0,\ t = \pi n,\ n \in Z$.

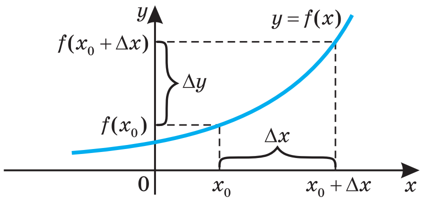
$\operatorname{ctg} t = 0,\ t = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$



Производная функции, ее физический и геометрический смысл

Определение производной

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$



Основные правила дифференцирования

$(u\pm v)'=u'\pm v'$;

$(c\cdot u)'=c\cdot u'$, где c — некоторое число;

$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$;

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$;

$\left(\dfrac{u}{c}\right)'=\dfrac{u'}{c}$, где c — некоторое число

Операция нахождения производной функции называется **дифференцированием**

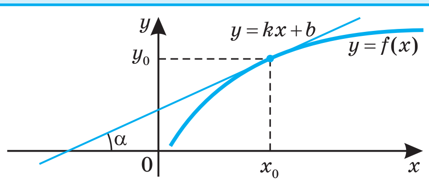
Таблица производных

$(C)'=0,\ C\in R$
$(x)'=1$
$(x^n)'=nx^{n-1}$
$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\cos x)'=-\sin x$
$(\sin x)'=\cos x$
$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$(e^x)'=e^x$
$(a^x)'=a^x\ln a$
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$

Производная сложной функции

$\left(f(u(x))\right)'=f'(u)\cdot u'(x)$
$(u^n)'=nu^{n-1}u'$; $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
$(\operatorname{tg} u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$(\operatorname{ctg} u)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^u)'=e^u\cdot u'$
$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$
$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$
$(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$

Геометрический смысл производной



Физический смысл производной

Если $S=S(t)$ — зависимость пути от времени, тогда: $v=v(t)=S'(t)$.
Скорость — производная пути от времени

Значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке:

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha=k$$

Уравнение касательной

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

Первообразная и интеграл

Определение	Свойства первообразной
Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$. Если $f(x) = 1$, то $F(x) = x + C$, так как $(x + C)' = 1$ для всех $x \in R$	**1.** Если $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$, то любая первообразная для функции $f(x)$ имеет вид $F(x) + C$, где $C \in R$. **2.** Если первообразная для функции $f(x)$ равна $F(x)$, то первообразная для функции $kf(x)$ равна $kF(x)$. Первообразная для функции $3e^x$ равна $3e^x$. **3.** Если первообразная для функции $f(x)$ равна $F(x)$, а первообразная для функции $g(x)$ равна $G(x)$, то первообразная для функции $f(x) \pm g(x)$ равна $F(x) \pm G(x)$. Первообразная для функции $1 + e^x$ равна $x + e^x$. **4.** Если первообразная для функции $f(x)$ равна $F(x)$, то первообразная для функции $f(kx + b)$ равна $\frac{1}{k}F(kx+b)$. Первообразная для функции $f(x) = e^{3x+1}$ равна $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x+1}$
Множество всех первообразных для функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx$. $\int 1dx = x + C$; $\int 2xdx = x^2 + C$, так как $(x^2 + C)' = 2x$ для $x \in R$	

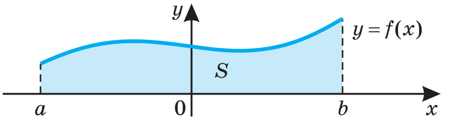
Таблица неопределенных интегралов

Функция $f(x)$	Общий вид первообразных $F(x) + C$	Неопределенный интеграл
0	C	$\int 0dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
x^n, $(n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Геометрический смысл интеграла

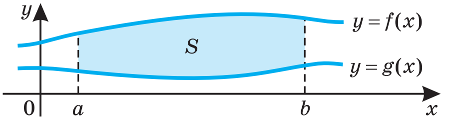
Площадь криволинейной трапеции:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$



Вычисление площадей фигур

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = \big(F(x) - G(x)\big)\Big|_a^b = \big(F(b) - G(b)\big) - \big(F(a) - G(a)\big)$$



Весь школьный курс алгебры в ёмких по содержанию и наглядных по оформлению таблицах!

Справочник поможет:

- **быстро повторить и систематизировать знания;**
- **подготовиться к урокам и экзаменам.**

Наглядные справочники школьника выходят по основным школьным предметам:

русскому языку, английскому языку, алгебре, геометрии, физике, химии, биологии.

Роганин, Александр Николаевич.

Р59 Алгебра в таблицах / А. Н. Роганин. — Москва : Эксмо, 2017. — 32 с. — (Наглядный справочник школьника).

Справочник содержит информативные таблицы за весь школьный курс алгебры (7—11 классы). Приводятся краткие сведения по всем темам, проверяемым на ОГЭ и ЕГЭ. Благодаря наглядности и доступности материала пособие обеспечивает эффективное повторение предмета при подготовке к урокам и экзаменам.

УДК 373:512
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-699-96240-2

Справочное издание
анықтамалық баспа

Для среднего школьного возраста
орта мектеп жасындағы балаларға арналған

НАГЛЯДНЫЙ СПРАВОЧНИК ШКОЛЬНИКА

Роганин Александр Николаевич

АЛГЕБРА В ТАБЛИЦАХ
(орыс тілінде)

Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *И. Успенский*

ООО «Издательство «Эксмо»
123308, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел. 8 (495) 411-68-86.
Home page: **www.eksmo.ru** E-mail: **info@eksmo.ru**

Өндіруші: «ЭКСМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесі, 1 үй.
Тел. 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru.
Тауар белгісі: «Эксмо»
Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша
арыз-талаптарды қабылдаушының
өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС, Алматы қ., Домбровский көш., 3«а», литер Б, офис 1.
Тел.: 8(727) 2 51 59 89,90,91,92, факс: 8 (727) 251 58 12 вн. 107; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz
Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.
Сертификация туралы ақпарат сайтта: www.eksmo.ru/certification

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно законодательству РФ о техническом регулировании можно получить по адресу: http://eksmo.ru/certification/
Өндірген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылған

Дата изготовления / Подписано в печать 06.04.2017.
Формат $70\times100^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,59.
Тираж 4000 экз. Заказ

BOOK24.RU
ИНТЕРНЕТ-МАГАЗИН

ISBN 978-5-699-96240-2
9 785699 962402 >

www.facebook.com/eksmodetstvo

Знак информационной продукции согласно Федеральному закону от 29.12.2010 г. № 436-ФЗ **6+**