

§ 9. Показательные уравнения

Некоторые эквивалентности

1. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$
2. $a^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = 0, (a > 0).$
3. $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \log_a b, (a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1).$
4. $F(a^{f(x)}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} F(y) = 0, \\ y = a^{f(x)}, y > 0. \end{cases}$
5. $ca^{2f(x)} + da^{f(x)}b^{f(x)} + gb^{2f(x)} = 0 \Leftrightarrow c\left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + d\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + g = 0.$
6. $f(x)^{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1, \\ g(x) \text{ имеет смысл;} \end{cases} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) = 0 \end{cases}.$

Решить уравнения:

1. $\left(\frac{9}{25}\right)^x \cdot \left(\frac{125}{27}\right)^{x-1} = \frac{3}{5}.$
2. $0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}.$
3. $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\lg 4}{\lg 8}.$
4. $(0,3)^x \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{x-1} = \left(\frac{5}{24}\right)^{-1}.$
5. $8^x \cdot 7^{x-4} = 2^{4+2x}.$
6. $7^{x-2} + 38 \cdot 3^x = 7^{x+1}.$
7. $\sqrt{3^{x-56}} - 7\sqrt{3^{x-60}} = 162.$
8. $\sqrt{2^{x-40}} + 3\sqrt{2^{x-48}} = 76.$
9. $\sqrt{5^{x+28}} + 2\sqrt{5^{x+30}} = 275.$
10. $\sqrt{36^{2-3x}} = 6/\sqrt{6}.$
11. $(3/4)^{x-1} \sqrt{4/3} = \frac{1}{2}(\sqrt[4]{3})^{3x-4}.$
12. $0,25 \cdot 128^{(x+17)/(x-3)} = 32^{(x+5)/(x-7)}.$
13. $\left(\frac{3}{7}\right)^{2x} \cdot \sqrt[6]{\frac{729}{7}} = \sqrt[3]{7^{-5x}}.$
14. $\left(\frac{5}{7}\right)^{2x} \cdot \left(\sqrt{\frac{7}{5^x}}\right)^3 = \sqrt[8]{125}.$
15. $81^{x-1} - 5^{2x-2} - 4 \cdot 9^{2x-3} = 4 \cdot 5^{2x-3}.$
16. $9^x - 2^{x+1/2} = 2^{x+7/2} - 3^{2x-1}.$
17. $4 \cdot 2^{x+1} - 3^{x+2} = 2^{x+4} - 3^{x+3}.$
18. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}.$
19. $9 \cdot 2^x - 2^x \cdot 3^{x+1} - 144 + 16 \cdot 3^{x+1} = 0.$
20. $2^x \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^x - 81 \cdot 2^x + 162 = 0.$
21. $\sqrt{3-x} (2^{(2x^2-9x+9)/2} - 4\sqrt{2}) = 0.$
22. $\sqrt{5-x} (3^{x^2-7,2x+3,9} - 9\sqrt{3}) = 0.$
23. $3^x = 5 \cdot 15^{1/x}.$
24. $8 \cdot 2^x = 3^{(x+3)/3}.$
25. $9 \cdot 3^x = 5^{x+2}.$
26. $2^x \cdot 3^{(x-2)/x} = 4.$
27. $5^x \cdot 4^{(x+1)/x} = 80.$
28. $9 \cdot 3^x = 5^{(x+2)/x}.$
29. $5^{x-1} \cdot 7^{(2x-3)/x} = 175.$
30. $3^x - (\sqrt{3})^{x+1} = \sqrt{3} - (\sqrt{3})^x.$
31. $3^{2-x} + 8 = 3^x.$
32. $9^{\sqrt{x}} + 9 = 4 \cdot 3^{\sqrt{x}+1/2}.$
33. $4^{-x} + 8 = 5 \cdot 2^{1/2-x}.$
34. $25^{1/x} + 1 = 6 \cdot 5^{1/x-1/2}.$
35. $4^x - 5 \cdot 2^{x-1/2} + 2 = 0.$
36. $24^x + 6^x = 10 \cdot 3^x.$
37. $27^x - 3^{x+3} = 6 \cdot 9^x.$
38. $9^{\sqrt{x}} + 3 = 10 \cdot 3^{\sqrt{x}-1/2}.$
39. $25^{\sqrt{x}} + 125 = 26 \cdot 5^{1/2+\sqrt{x}}.$
40. $4^{\sqrt{x}} + 1 = 3 \cdot 2^{\sqrt{x}-1/2}.$
41. $16 \cdot 4^{-|2x+3|} + 31 \cdot 2^{-|2x+3|} - 2 = 0.$
42. $3^{2|x+4|} - 6 \cdot 3^{|x+4|} - 27 = 0.$
43. $26x \cdot 5^{\sqrt{x}} + 5^{2\sqrt{x}+2} + 25 = x \cdot 5^{2\sqrt{x}+1} + 5x + 26 \cdot 5^{\sqrt{x}+1}.$
44. $3x \cdot 2^{2\sqrt{x}+1} + 6x + 26 \cdot 2^{\sqrt{x}} = 3 \cdot 2^{2\sqrt{x}+2} + 12 + 13x \cdot 2^{\sqrt{x}}.$

45. $3^{(x+2)/(4-x)} - 7 \cdot 3^{(x-1)/(4-x)} - 6 = 0$. 46. $5^{(x+1)/(x-3)} - 23 \cdot 5^{(x-1)/(x-3)} - 250 = 0$.
 47. $3^{(2x+1)/(2x-1)} - 2 \cdot 3^{2x/(2x-1)} - 9 = 0$. 48. $2^{(1-2x)/(2x+1)} - 20 \cdot 2^{-2x/(2x+1)} + 32 = 0$.
 49. $244 \cdot 3^{x^2+3} - 3^{2x^2-4x+8} = 27 \cdot 3^{4x}$. 50. $9 \cdot 2^{x^2+6} - 2^{2x^2-5x+13} = 4 \cdot 2^{5x}$.
 51. $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 4$. 52. $(\sqrt[4]{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt[4]{2+\sqrt{3}})^x = 4$.
 53. $3^x + (3\sqrt{\sqrt{10}-1})^x = 2 \cdot (\sqrt{\sqrt{10}+1})^x$. 54. $6 \cdot 9^{1/x} - 13 \cdot 6^{1/x} + 6 \cdot 4^{1/x} = 0$.
 55. $2^{x+2} + \sqrt{2^{x+6}} \cdot 5^x = 9 \cdot 5^{x+1}$. 56. $8^x + 2 \cdot 50^x = 3 \cdot 125^x$.
 57. $4 \cdot 3^x + 3\sqrt{6^x} - 27 \cdot 2^{x-1} = 0$. 58. $64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$.
 59. $3 \cdot 25^{x+1} + 98 \cdot 15^x = 5 \cdot 9^{x+1}$. 60. $3^x + \sqrt{3^{x+2}} \cdot 7^x = 3 \cdot 7^x + \sqrt{21^x}$.
 61. $125^{x-1} + 3 \cdot 45^{x-1} = 4 \cdot 27^{x-1}$. 62. $27^{x+2} + 3 \cdot 8^{x+2} = 4 \cdot 12^{x+2}$.

Найти решение уравнений, удовлетворяющих приведенным условиям:

63. $3^{x^2-3x} = \frac{1}{9} \cdot 81^{x-2}$, $\log_{0,5} \log_{1,3} \frac{2x+1}{x+2} < 0$.

64. $2^{x^2-x-1} = 0,5 \cdot 8^{2x-4}$, $\log_{0,3} \log_{1,3} \frac{2x-1}{x+1} < 0$.

Решить уравнения:

65. $|2^x - 4| = 4^x + 2^{x+1} - 6$. 66. $|3^x - 12| = 9^x - 2 \cdot 3^{x+1} - 24$. 67. $|5^x - 14| - |5^x - 26| = 10$.

68. $|2^x - 3| + |2^x - 7| = 6$. 69. $|x+2|^{x^2+3x-10} = 1$. 70. $|x-3|^{x^2+10x+21} = 1$.

71. $|x^2 - 4|^{x^2-8} = |x^2 - 4|^{x-2}$. 72. $|3 - x^2|^{x^2-3\sqrt{3}} = |3 - x^2|^{x(\sqrt{3}-3)}$.

73. $2^{x^2} \cdot 9^x - 64 \cdot (2^{\log_3 8})^x = 0$. 74. $64 \cdot 2^{x^2+6} - 27^x \cdot (2^{\log_3 16})^x = 0$.

75. $4 \cdot 2^{x^2} - 25^x \cdot (2^{\log_5 2})^x = 0$. 76. $343 \cdot 7^{x^2+3} - 27^x \cdot (7^{\log_3 49})^x = 0$.

77. $3 \cdot 4^x - 7 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{-x} (9 \cdot 2^{-x} + 7) = 16$.

78. $2 \cdot 25^x - 13 \cdot 5^x + 4 \cdot 5^{-x} (8 \cdot 5^{-x} - 13) + 31 = 0$.

Найти произведение корней уравнения:

79. $25^x - 5^{x+2\sqrt{2}} (1 + 5^{\sqrt{2}}) + 5^{5\sqrt{2}} = 0$. 80. $16^x - 4^{x+\sqrt{3}} (1 + 4^{\sqrt{3}}) + 4^{3\sqrt{3}} = 0$.

Решить системы уравнений:

81. $\begin{cases} x^2 \cdot 2^{3-x} + 16 \cdot 2^y = 2^{7-x} + x^2 \cdot 2^y, \\ y = \sqrt{x-1}. \end{cases}$ 82. $\begin{cases} x^2 \cdot 2^y + 2^{2-x} = 2^{y+2} + x^2 \cdot 2^{-x}, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$

83. $\begin{cases} 3^{x^2+3x} \cdot 2^{y+2} = 12, \\ 3^{x-4} \cdot 2^y = 27^{x+1}. \end{cases}$ 84. $\begin{cases} 5^{2x} \cdot 3^{y^2-3} = 27, \\ 25^{x-1} \cdot 3^{1-y} = 0,12. \end{cases}$ 85. $\begin{cases} x + 3^x = 2y + 9^y, \\ x^2 + 3xy - 3y = 1. \end{cases}$

86. $\begin{cases} x - y = 5^y - 5^x, \\ 2y^2 + 3xy - 12x = 9. \end{cases}$ 87. $\begin{cases} 2^x \cdot 3^{y+2} = 12, \\ 3^{x-1} \cdot 2^{2y+2} = 3. \end{cases}$ 88. $\begin{cases} 3^{x-1} \cdot 5^y = 15, \\ 5^x \cdot 4^y = 100. \end{cases}$

§ 9. Показательные уравнения

1. 2. 2. 6. 3. 2. 4. -3. 5. 4. 6. 2. 7. 68. 8. 52. 9. -24. 10. 0,5. 11. 2.

12. 10. 13. $-1/2$. 14. 0,75. 15. 2. 16. 1,5. 17. -2 . 18. -1 . 19. $\{1, 4\}$. 20. $\{1, 3\}$.
 21. $\{1/2, 3\}$. 22. $\{1/5, 5\}$. 23. $\{-1, \log_3 15\}$. 24. -3 . 25. -2 . 26. $\{-\log_2 3, 2\}$.
 27. $\{\log_5 4, 1\}$. 28. $\{-2, \log_3 5\}$. 29. $\{\log_5 (1/7), 3\}$. 30. 1. 31. 2. 32. $\{9/4, 1/4\}$.
 33. $\{-5/2, -1/2\}$. 34. ± 2 . 35. $\{-1/2, 3/2\}$. 36. 1. 37. 2. 38. $9/4$. 39. $\{0,25, 6,25\}$.
 40. 0,25. 41. $\{1/2, -7/2\}$. 42. $\{-6, -2\}$. 43. $\{1, 5\}$. 44. $\{\log_2^2 \frac{3}{2}, 2\}$. 45. $5/2$. 46. 4.
 47. 1. 48. $\{-1/4, -3/8\}$. 49. $\{0, 4\}$. 50. $\{1, 4\}$. 51. $\{-2, 2\}$. 52. ± 4 . 53. 0. 54. ± 1 .
 55. -2 . 56. 0. 57. 2. 58. $\{1, 2\}$. 59. -2 . 60. 0. 61. 1. 62. $\{-2; -2 + \log_{3/2} \frac{\sqrt{13}-1}{2}\}$.
 63. 5. 64. 4. 65. 1. 66. 2. 67. 2. 68. $\{1, 3\}$. 69. $\{-5, -3, -1, 2\}$. 70. $\{-7, -3, 2, 4\}$.
 71. $\{\pm \sqrt{5}, \pm \sqrt{3}, 3\}$. 72. $\{\pm \sqrt{2}, \pm 2, -3\}$. 73. $\{3 \log_3 2; -2 \log_2 3\}$.
 74. $\{3 \log_2 3; 4 \log_3 2\}$. 75. $\{2 \log_2 5; \log_5 2\}$. 76. $\{3 \log_7 3; 2 \log_3 7\}$.
 77. $\{\log_2 ((1 + \sqrt{109})/6), \log_2 3\}$. 78. $\{0, \log_5 4\}$. 79. $2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 12$.
 80. $\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6$. 81. $\{(2; 1), (4; \sqrt{3})\}$. 82. $(0; 0), (2; \sqrt{2})$. 83. $M_1(-2; 3 \log_2 3),$
 $M_2(-3; \log_2 3)$. 84. $M_1(-\frac{3}{2} \log_5 3; -3), M_2(\log_5 3; 2)$. 85. $(1; \frac{1}{2}), (-2/5; -1/5)$.
 86. $(3; 3), (-3/5; -3/5)$. 87. $(2; -1)$. 88. $(2; 1)$.