

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 8

Вариант 1

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции.

а) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10$ на отрезке $[0; 1]$;

б) $y = \cos x - \sqrt{3} \sin x$ на отрезке $[-\pi; 0]$.

2. Найдите диагональ прямоугольника наибольшей площади, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами 18 см и 24 см и имеющего с ним общий прямой угол.

3. Исследуйте функцию $y = \begin{cases} x^3 - 3x, & \text{если } x < 0, \\ \sin x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ на монотонность и экстремумы.

4. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{1}{3}x^3 - x - 1 = a$ имеет три корня?

Вариант 2

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции.

а) $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-2; 1]$;

б) $y = 2 \sin x + \sin 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

2. В прямоугольном треугольнике с катетами 36 и 48 на гипотенузе взята точка. Из неё проведены прямые, параллельные катетам. Получился прямоугольник, вписанный в данный треугольник. Где на гипотенузе надо взять точку, чтобы площадь такого прямоугольника была наибольшей?

3. Исследуйте функцию $y = \begin{cases} 2 \cos x + x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi, \\ x^3 + x + 2, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ на монотонность и экстремумы.

4. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{5}{3}x^3 - 5x - 2 = a$ имеет два корня?

Решение вариантов контрольной работы

Вариант 1

$$1. a) y = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 10, \quad [0; 1]$$

$$y' = x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3$$

$$2, 3 \notin [0; 1]$$

$$y(0) = 10$$

$$y(1) = \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 6 + 10 = 16 - \frac{13}{6} = 13\frac{5}{6}$$

$$\text{ОТВЕТ: } y_{\text{наим}} = 10; \quad y_{\text{наиб}} = 13\frac{5}{6}.$$

$$б) y = \cos x - \sqrt{3} \sin x, \quad [-\pi; 0].$$

$$y' = -\sin x - \sqrt{3} \cos x$$

$$-\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$\sin x = -\sqrt{3} \cos x \quad | : \cos x$$

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

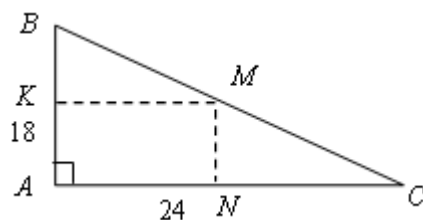
$$-\frac{\pi}{3} \in [-\pi; 0]$$

$$y(-\pi) = \cos(-\pi) - \sqrt{3} \sin(-\pi) = -1 - \sqrt{3} \cdot 0 = -1$$

$$y\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

$$y(0) = \cos 0 - \sqrt{3} \sin 0 = 1 - \sqrt{3} \cdot 0 = 1$$

$$\text{ОТВЕТ: } y_{\text{наим}} = -1; \quad y_{\text{наиб}} = 2.$$



2.

Пусть дан прямоугольный $\triangle ABC$, в котором $\angle A = 90^\circ$, $AB = 18$, $AC = 24$. Пусть $AKMN$ – прямоугольник, вписанный в $\triangle ABC$.

1) Оптимизируемая величина – площадь прямоугольника $AKMN$. Обозначим её буквой S .

Пусть $KM = x$, тогда $NC = 24 - x$. Треугольники ABC и NMC подобны. Составим пропорцию:

$$\frac{NC}{AC} = \frac{MN}{AB}$$

$$\frac{24 - x}{24} = \frac{MN}{18}$$

$$MN = \frac{18(24 - x)}{24} = \frac{3(24 - x)}{4}.$$

Откуда

Выразим площадь прямоугольника $AKMN$:

$$S = KM \cdot MN$$

$$S = x \cdot \frac{3(24 - x)}{4}, \quad x \in (0; 24)$$

$$S = 18x - \frac{3x^2}{4}$$

2)

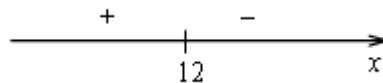
Найдем производную полученной функции:

$$S' = 18 - \frac{3x}{2}$$

$$18 - \frac{3x}{2} = 0$$

$$1,5x = 18$$

$$x = 12$$



$$x_{\max} = 12$$

3) При $x = 12$ функция достигает наибольшего значения. Найдем стороны прямоугольника $AKMN$:

$$KM = 12, \quad MN = \frac{3(24 - 12)}{4} = 9$$

По теореме Пифагора найдем диагональ прямоугольника:

$$KN = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$$

Ответ: 15 см.

$$3. \quad y = \begin{cases} x^3 - 3x, & \text{если } x < 0, \\ \sin x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$1) \text{ Если } x < 0, \text{ то } y' = 3x^2 - 3.$$

$$\text{Если } 0 \leq x \leq \pi, \text{ то } y' = \cos x.$$

$$y' = \begin{cases} 3x^2 - 3, & \text{если } x < 0 \\ \cos x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Получим:

2) $x = 0$ – критическая точка.

Найдем стационарные точки:

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$\cos x = 0$$

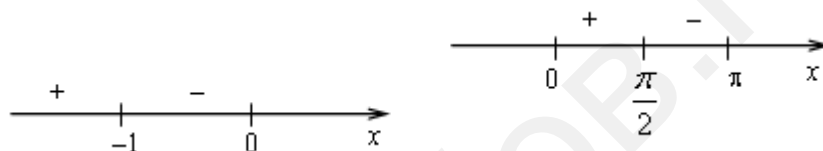
$$x^2 = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$x = \pm 1$$

$$\frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$$

$$-1 \in (-\infty; 0)$$



$$\nearrow : (-\infty; -1], \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\searrow : [-1; 0], \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$$

3)

$$x_{\min} = 0, y_{\min} = 0$$

$$x_{\max} = -1, y_{\max} = 2$$

$$x_{\max} = \frac{\pi}{2}, y_{\max} = 1.$$

$$4. \quad \frac{1}{3}x^3 - x - 1 = a \quad - 3 \text{ корня.}$$

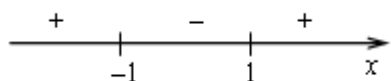
Решим это уравнение графически. Построим график функции

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x - 1.$$

$$f'(x) = x^2 - 1$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

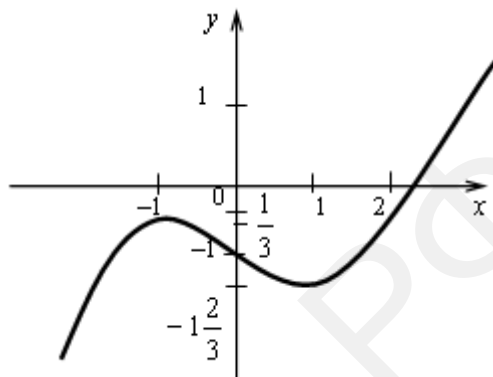


↖ : $(-\infty; -1], [1; +\infty)$

↘ : $[-1; 1]$

$$x_{\max} = -1, y_{\max} = -\frac{1}{3} + 1 - 1 = -\frac{1}{3}$$

$$x_{\min} = 1, y_{\min} = \frac{1}{3} - 1 - 1 = -1\frac{2}{3}$$



Прямая $y = a$ будет пересекать график этой функции в трёх точках, если $a \in \left(-1\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

ОТВЕТ: $\left(-1\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.