

Вариант 1

1. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \sin\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)$ в точке $x = \frac{\pi}{3}$.

2. Составьте уравнения касательных к графику функции $y = x^4 + x^2 - 2$ в точках его пересечения с осью абсцисс. Найдите точку пересечения этих касательных.

3. Исследуйте функцию $y = x^4 - 2x^2 - 3$ на монотонность и экстремумы и постройте её график.

4. Найдите значение параметра a , при котором касательная к графику функции $y = a(1 + \sin 2x)$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{3}$ параллельна биссектрисе первой координатной четверти.

Вариант 2

1. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$.

2. Составьте уравнения касательных к графику функции $y = x^4 - 2x^2 - 8$ в точках его пересечения с осью абсцисс. Найдите точку пересечения этих касательных.

3. Исследуйте функцию $y = x - x^3$ на монотонность и экстремумы и постройте её график.

4. Найдите значение параметра a , при котором касательная к графику функции $y = a(7 + \cos 2x)$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{6}$ параллельна прямой $y = -\sqrt{3}x + 7$.

Решение вариантов контрольной работы

Вариант 1

$$1. \quad y = \sin \left(3x - \frac{2\pi}{3} \right), \quad x = \frac{\pi}{3}.$$

$$f(x) = \sin \left(3x - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \left(\pi - \frac{2\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = 3 \cos \left(3x - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \cos \left(\pi - \frac{2\pi}{3} \right) = 3 \cos \frac{\pi}{3} = 3 \cdot \frac{1}{2} = 1,5$$

Уравнение касательной:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1,5 \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$y = 1,5x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$y = 1,5x + \frac{\sqrt{3} - \pi}{2}$$

$$\text{ОТВЕТ: } y = 1,5x + \frac{\sqrt{3} - \pi}{2}$$

$$2. \quad y = x^4 + x^2 - 2$$

Найдем точки пересечения с осью Ox :

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = t$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = -2$$

$$x = \pm 1$$

Составим уравнение касательной в точке $x = 1$:

$$f(1) = 0$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2x$$

$$f'(1) = 4 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1 = 6$$

$$\text{Получим, } y = 0 + 6(x - 1)$$

$$y = 6x - 6$$

Составим уравнение касательной в точке $x = -1$:

$$f(-1) = 0$$

$$f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 + 2 \cdot (-1) = -4 - 2 = -6$$

Получим $y = 0 - 6(x + 1)$

$$y = -6x - 6$$

Найдем точку пересечения касательных:

$$6x - 6 = -6x - 6$$

$$12x = 0$$

$$x = 0$$

$$y = 6 \cdot 0 - 6 = -6$$

О т в е т: $y = 6x - 6$, $y = -6x - 6$, $(0; -6)$.

3. $y = x^4 - 2x^2 - 3$

1) Область определения: $D(y) = \mathbb{R}$

2) Чётность / нечётность:

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 3 = x^4 - 2x^2 - 3 \text{ — чётная.}$$

3) Асимптоты.

Асимптот нет.

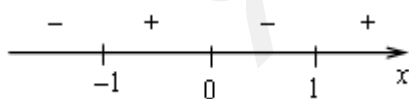
4) Монотонность и экстремумы.

$$y' = 4x^3 - 4x$$

$$4x^3 - 4x = 0$$

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0, \quad x = \pm 1$$



↘ : $(-\infty; -1], [0; 1]$

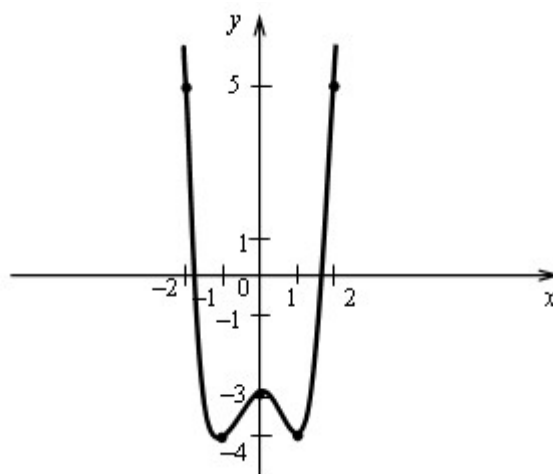
↗ : $[-1; 0], [1; +\infty)$

$$x_{\min} = \pm 1, y_{\min} = -4$$

$$x_{\max} = 0, y_{\max} = -3$$

5) Контрольные точки:

x	± 2	$\pm \sqrt{3}$
y	5	0



4. $y = a(1 + \sin 2x)$, $x = \frac{\pi}{3}$.

Биссектриса первой координатной четверти имеет уравнение $y = x$. Если касательная ей параллельна, то она имеет такой же угловой коэффициент, то есть $k = 1$.

Таким образом, нужно найти такое значение параметра a , при котором производная данной функции в точке $x = \frac{\pi}{3}$ равна 1.

$$y' = 2a \cos 2x$$

$$y' \left(\frac{\pi}{3} \right) = 2a \cos \frac{2\pi}{3} = -2a \cdot \frac{1}{2} = -a$$

$$-a = 1$$

$$a = -1$$

ОТВЕТ: $a = -1$.