Домашнее задание по задачам С5 к лекции №2 по подготовке к ЕГЭ

Задача №1.
При каких p данная система имеет решения?

$$\begin{cases} x^2+px+2=0, \\ \sin^2\pi p+\sin^2\pi x+2^{|y|}=\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right| \end{cases}$$

Задача №2.
При каждом a решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^{1+x}=32a\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2+a^2+2-2x-2a}+\sqrt{x^2+a^2-6x+9}=\sqrt{5}. \end{cases}$$

Задача №3.
При каких значениях параметра а прямая $y=7-7a-3a^2$ не имеет общих точек графиком функции $y=cos^2x+(5-2a)sinx$?

Задача №4.
Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+|x^2-8x+7|$ больше 1.

Задача №5.
При каждом a решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(x-y)+2=0, \\ a^2+ax+ay-4=0. \end{cases}$$

Задача №6.
Найдите все значения параметра b, при каждом из которых для любого a неравенство $(x-a-2b)^2+(y-3a-b)^2<\frac{1}{2}$ имеет хотя бы одно целочисленное решение (x, y).

Задача №7.
Найти все значения a, для которых при каждом x из промежутка [-5;-1) значение выражения $(a+4)|x|$ не равно значению выражения x^2-3.

Задача №8.
При каких a уравнение $\left|\frac{x^2-4ax+4a^2+1}{x-2a}\right|+x^2-2x=1$ имеет хотя бы одно решение?

Задача №9.
При каких значениях a неравенство $\frac{x^2-6x+14-a}{a-2\sin x-1}\leq 0$ не имеет решений?

Задача №10.
Найти все значения a, при которых уравнение $4x-\big|3x-|x-a|\big|=9|x-1|$ имеет хотя бы один корень.

Решения

Задача №1.

Поскольку $\sin^2\pi p \geq 0$ и $\sin^2\pi x \geq 0$, $|y| \geq 0$ и, значит, $2^{|x|} \geq 1$, левая часть второго уравнения системы не меньше, чем 1. Так как его правая часть не больше 1, оно равносильно системе

$$\begin{cases} \sin^2\pi p = 0, \\ \sin^2\pi x = 0, \\ 2^{|y|} = 1, \\ \left|\sin\dfrac{\pi x}{2}\right| = 1, \end{cases}$$

из которой находим, что $p \in \mathbb{Z}$, $x = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, $y = 0$.

Первое уравнение имеет целые коэффициенты и целый корень $x_1 = 2k+1$. Так как $x_1 + x_2 = -p$, x^2 — тоже целое число, то из равенства $x_1 x_2 = 2$ получаем, что это нечетное число, делящее число 2. Такими числами являются 1 и -1.

При $x = 1$ находим $p = -3$, при $x = -1$ находим $p = 3$.

Ответ: система имеет решения при $p = \pm 3$.

Задача №2.

Запишем второе уравнение в виде

$$\sqrt{(x-1)^2 + (a-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2 + a^2} = \sqrt{5}.$$

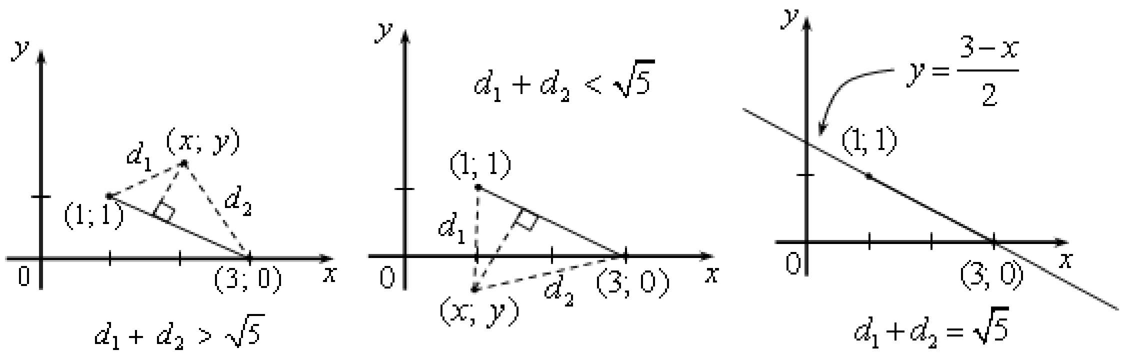
Геометрический смысл уравнения состоит в том, что сумма расстояний от точек $(x;\ a)$ до точек $(1;\ 1)$ и $(3;\ 0)$ равно $\sqrt{5}$. Поскольку расстояние между точками $(1;\ 1)$ и $(3;\ 0)$ тоже равно $\sqrt{5}$, это означает, что точка $(x;\ a)$ должна лежать на отрезке, соединяющем точки $(1;\ 1)$ и $(3;\ 0)$. Другими словами, она удовлетворяет уравнению $a = \dfrac{3-x}{2}$ и условию $x \in [1;\ 3]$. Таким образом, исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} 2^{1+x} = 32a\sqrt{2}, \\ 2a = 3 - x,\ \ x \in [1;\ 3]. \end{cases}$$

Подставив 2*a* в первое уравнение, получаем:

$$2^{1+x} = 16(3-x)\sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{x-\frac{7}{2}} = 3 - x \Leftrightarrow 2^{x-\frac{7}{2}} + x = 3.$$

Поскольку функция $y = 2^{x-\frac{7}{2}} = x$ возрастающая (как сумма двух возрастающих), каждое значение она принимает ровно один раз. Поэтому решение $x = \frac{5}{2}$ — единственное, ему соответствует $a = \frac{1}{4}$.



Ответ: при $a = \frac{1}{4}$, $x = \frac{5}{2}$, при остальных a нет решений.

<u>Задача №3.</u>
Необходимо найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$cos^2x + (5-2a)sinx = 7 - 7a - 3a^2$$

не имеет корней. Сформулируем задачу иначе: найдем те значения параметра a, при которых уравнение имеет корни, тогда при остальных a корней нет.
$1 - sin^2x + (5-2a)sinx - 7 - 7a - 3a^2 = 0 \to sin^2x - (5-2a)sinx + 6 - 7a - 3a^2 = 0.$
Замена: $sinx = t, |t| \le 1 \to t^2 - (5-2a)t + 6 - 7a - 3a^2 = 0.$

$$t_{1,2} = \frac{(5-2a) \pm \sqrt{25 - 20a + 4a^2 - 24 + 28a + 12a^2}}{2} \to t_{1.2} = \frac{(5-2a) \pm |4a+1|}{2}$$

Уравнение имеет корни, если $\left|\frac{(5-2a)+|4a+1|}{2}\right| \le 1$ или $\left|\frac{(5-2a)-|4a+1|}{2}\right| \le 1.$

1) $\quad -1 \le \frac{(5-2a)+|4a+1|}{2} \le 1 \to -2 \le 5 - 2a + |4a+1| \le 2$

А) $\begin{cases} 4a+1 \ge 0, \\ 5-2a+4a+1 \ge -2, \\ 5-2a+4a+1 \le 2; \end{cases} \to \begin{cases} a \ge -1/4 \\ a \ge -4 \\ a \le -2 \end{cases} \to$ решений нет.

Б) $\begin{cases} 4a+1 < 0, \\ 5-2a-4a-1 \ge -2, \\ 5-2a-4a-1 \le 2; \end{cases} \to \begin{cases} a < -1/4 \\ a \ge 1/3 \\ a \le 1 \end{cases} \to$ решений нет.

2) $\quad -1 \le \frac{(5-2a)-|4a+1|}{2} \le 1 \to -2 \le 5 - 2a - |4a+1| \le 2$

А) $\begin{cases} 4a+1 \ge 0, \\ 5-2a-4a-1 \ge -2, \\ 5-2a-4a-1 \le 2; \end{cases} \to \begin{cases} a \ge -1/4 \\ a \le 1 \\ a \ge 1/3 \end{cases} \to \frac{1}{3} \le a \le 1.$

Б) $\begin{cases} 4a+1<0, \\ 5-2a+4a+1 \geq -2, \\ 5-2a+4a+1 \leq 2; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a<-{}^1\!/_4 \\ a \geq -4 \\ a \leq -2 \end{cases} \rightarrow -2 \leq a \leq -4.$

Уравнение не имеет корней, если $a \in (-\infty;\ -4) \cup \left(-2;\ \frac{1}{3}\right) \cup (1;+\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty;\ -4) \cup \left(-2;\ \frac{1}{3}\right) \cup (1;+\infty)$.

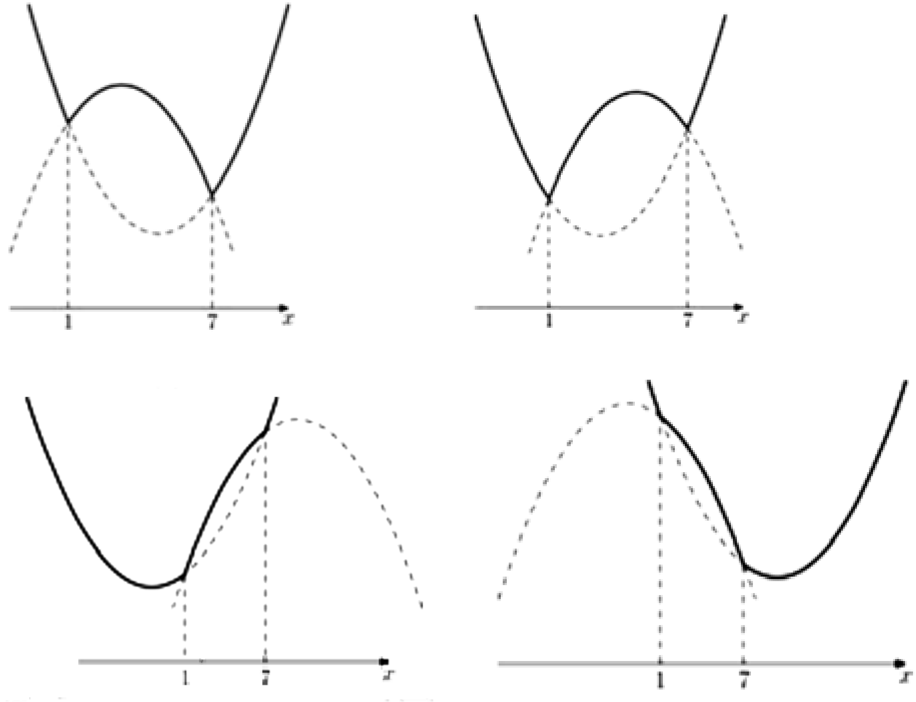
Задача №4.

Функция имеет вид:

а) при $x^2-8x+7 \geq 0$: $f(x)=x^2-2(a-4)x+7$, а ее график есть две части параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4-a$;

б) при $x^2-8x+7<0$: $f(x)=-x^2+(2a-8)x-7$, а ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вниз.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:



Наименьшее значение функции $f(x)$ может приниматься только в точках $x=1$ или $x=7$, а если $4-a \notin [1;7]$ — то в точке $x=4-a$. Наименьшее значение функции $f(x)$ больше 1 тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(1)>1, \\ f(7)>1, \\ f(4-a)>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a>1, \\ 14a>1, \\ 2a(4-a)+|a^2-9|>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>\dfrac{1}{2}, \\ a>\dfrac{1}{14}, \\ 2a^2-8a+1-|a^2-9|<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 3, \\ a^2 - 8a + 10 < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2} < a < 3, \\ 3a^2 - 8a - 8 < 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 3, \\ 4 - \sqrt{6} < a < 4 + \sqrt{6}; \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2} < a < 3, \\ \dfrac{4 - \sqrt{40}}{3} < a < \dfrac{4 + \sqrt{40}}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 \leq a < 4 + \sqrt{6}; \\ \dfrac{1}{2} < a < 3. \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{2} < a < 4 + \sqrt{6};$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2}\,; 4 + \sqrt{6}\right)$

<u>Задача №5.</u>
Первое уравнение преобразуем к виду:

$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 2y + 1 = 0$,

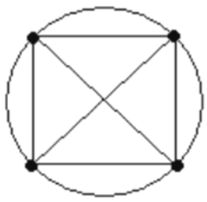
или

$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 0$.

Оно означает, что $x = -1$, $y = 1$, поскольку при остальных значениях его левая часть больше 0. Подставим эти значения во второе уравнение и получим $a^2 - 4 = 0$, откуда $a = \pm 2$.

Таким образом, система имеет решение $x = -1$, $y = 1$ при $a = \pm 2$, при остальных a решений нет.
Ответ: при $a = \pm 2$, $x = -1$, $y = 1$, при остальных a решении нет.

<u>Задача №6.</u>
Область решений нашего неравенства будет открытым кругом радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Именно эта величина и будет ключевой в решении.



Потому что именно эта величина равна половине диагонали квадрата с вершинами в соседних точках с целочисленными координатами. На рисунке показано единственное положение нашего круга, при котором ни одна точка с целочисленными координатами не попадает внутрь круга. Стоит кругу чуть-чуть сдвинуться из этого положения, и тогда хотя бы одна такая точка неминуемо попадает внутрь.

Если центр круга (точка с координатами $(a + 2b; 3a + b)$ находится, как показано на рисунке, ровно посередине между двумя соседними точками с целочисленными координатами, то можно записать:
$a + 2b = \frac{n+m+1}{2}$; $3a + b = \frac{m+m+1}{2}$, где (n, m) – целочисленные координаты произвольно взятой точки.

Получаем: $\begin{cases}2a+4b=2n+1\\6a+2b=2m+1\end{cases} \rightarrow \begin{cases}6a+12b=6n+3\\6a+2b=2m+1\end{cases} \rightarrow 10b=6n-2m+2$

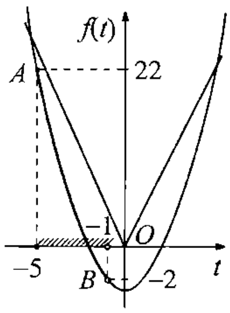
$$5b=3n-m+1$$
$$b=\frac{3n-m+1}{5}=\frac{k}{5}; k\in Z$$

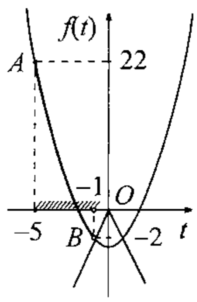
Понятно, что условию задачи удовлетворяют все значения b, для которых не выполняется записанное выше условие.

Ответ: $b\neq\frac{k}{5}; k\in Z$.

Задача №7.

Наша задача равносильна следующей: найти все значения a, при которых уравнение $x^2-3=(a+4)|x|$ не имеет решений на промежутке [-5; -1). Обозначим $y_1=x^2-3$ и возьмем ту ее часть, которая расположена на промежутке [-5; -1). На рисунке эта часть пораболы изображена жирной линией. Имеем $y_1(-1)=-2, y_1(-5)=22$.





Нарисуем теперь график $y_2=(a+4)|x|$. Рассмотри три случая:

1) $a+4>0$, т. е. $a>-4$. Тогда $y_2=(a+4)|x|$ представляет собой уголок, ветви которого направлены вверх, а вершина находится в точке O(0, 0). При этих a уравнение не будет иметь решений, если уголок пройдет выше точки A (в этом случае он не пересечется с участком параболы AB). Последнее будет иметь место, если
$$y_2(-5)>22\rightarrow(a+4)|x|>22\rightarrow 5a+20>22\rightarrow a>0{,}4$$
2) $a+4<0$, т. е. $a<-4$. Тогда ветви уголка $y_2=(a+4)|x|$ направлены вниз. И чтобы уравнение не имело решений на промежутке [-5; -1),график y_2 должен пройти ниже точки B или через саму точку B, а это будет, если
$$y_2(-1)\leq-2\rightarrow(a+4)|x|\leq-2\rightarrow a\leq-6$$
3) $a+4=0$, т. е. $a=-4$. В этом случае уравнение имеет вид $x^2-3=0$. Один из корней этого уравнения $x_1=\sqrt{3}$ находится в промежутке [-5; -1), а другой $x_2=-\sqrt{3}$ – нет. Следовательно $a=-4$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a\in(-\infty;\ -6]\cup(0{,}4;\ +\infty)$.

Задача №8.

Преобразуем исходное уравнение. Имеем:
$$\left|\frac{x^2-4ax+4a^2+1}{x-2a}\right|+(x-1)^2=2\rightarrow\left|\frac{(x^2-2a)+1}{x-2a}\right|+(x-1)^2=2$$
$$\rightarrow\left|x-2a+\frac{1}{x-2a}\right|+(x-1)^2=2$$

Обозначим $x-2a=t$, тогда $\left|x-2a+\frac{1}{x-2a}\right|=\left|t+\frac{1}{t}\right|$.

При любых $t > 0 \to t + \frac{1}{t} \geq 2$. При этом равенство имеет место только при $t = 1$. А при $t < 0 \to t + \frac{1}{t} \leq -2$. При этом равенство имеет место только при $t = -1$. Следовательно, и при $t > 0$, и при $t < 0$ будет выполняться неравенство $\left|t + \frac{1}{t}\right| \geq 2$. При этом равенство будет достигаться только при $t = 1$ и $t = -1$.
Возвращаясь теперь к прежним обозначениям $x - 2a = t$, мы видим, что при всех допустимых значения x и a выполняется неравенство $\left|x - 2a + \frac{1}{x-2a}\right| \geq 2$.
Следовательно, чтобы выполнялось первоначальное равенство, должно быть:
$\left|x - 2a + \frac{1}{x-2a}\right| = 2$ и $(x-1)^2 = 0$. А это будет в следующих случаях:

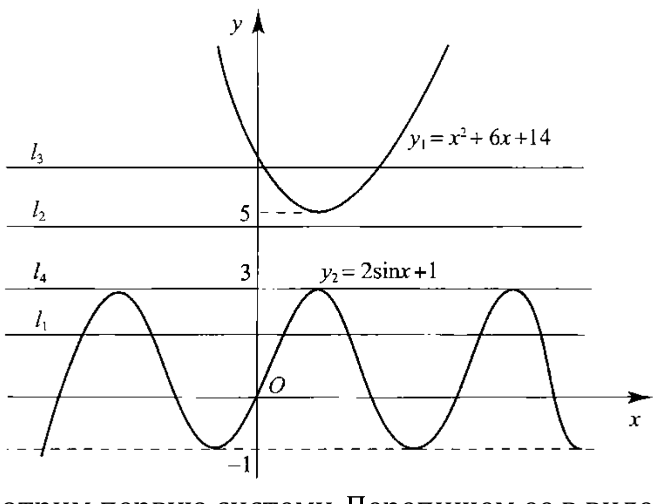
$$\begin{cases} x - 2a = 1 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \text{и} \begin{cases} x - 2a = -1 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases}$$

Решая системы, находим:
Ответ: $a = 0; a = 1$.

Задача №9.
Наше неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 6x + 14 - a \geq 0 \\ a - 2\sin x - 1 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - 6x + 14 - a \leq 0 \\ a - 2\sin x - 1 > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Нам надо найти такие значения параметра, при которых ни одна из систем не имеет решений.
Найдем множество значений функций $y_1 = x^2 - 6x + 14 - a$ и $y_1 = a - 2\sin x - 1$. Для первой функции $E(y_1) = [5; +\infty)$. Для второй функции $E(y_2) = [-1; 3]$. Видно, что множества значений $E(y_1)$ и $E(y_2)$ не пересекаются. Более того, $E(y_1)$ на числовой оси Оу находится выше, чем $E(y_2)$.



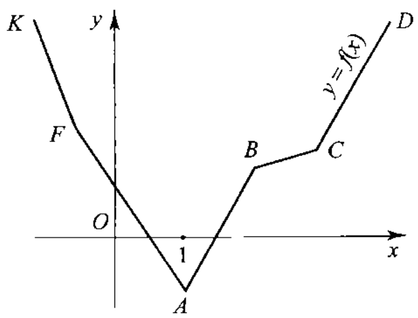
Рассмотрим первую систему. Перепишем ее в виде:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 14 \geq a \\ 2\sin x + 1 > a \end{cases} \text{или} \begin{cases} y_1 \geq a \\ y_2 > a \end{cases}.$$

Теперь рассмотрим два случая $a < 3$ и $a \geq 3$.
Если $a < 3$, то система имеет решения, поскольку неравенство $y_1 \geq a$ выполняется при всех $x \in R$ и существуют значения x, при которых выполняется второе неравенство.
Если $a \geq 3$, то второе неравенство системы не имеет решений. Следовательно, и система не имеет решений.

Итак, первая система не имеет решений при $a \in [3;\ +\infty)$.
Рассмотрим вторую систему. Перепишем ее в виде:
$\begin{cases} x^2 - 6x + 14 \le a \\ 2\sin x + 1 < a \end{cases}$ или $\begin{cases} y_1 \le a \\ y_2 < a \end{cases}$.
При $a \ge 5$ оба неравенство второй системы имеют решения.
При $a < 5$ первое неравенство системы не имеет решений, следовательно, не имеет решений и система. Итак, вторая система не имеет решений при $a \in (-\infty;\ 5]$.
Решение задачи будет пересечение множеств $[3;\ +\infty)$ и $(-\infty;\ 5]$, т.е. промежуток $[3; 5)$.
Ответ: $a \in [3; 5)$.

Задача №10.
Перенесем все члены уравнения в правую часть и получим:
$9|x-1| + \big|3x - |x-a|\big| - 4x = 0$.
Обозначим $f(x) = 9|x-1| + \big|3x - |x-a|\big| - 4x$.
График $f(x)$ представляет собой ломаную, звеньями которой будут отрезки прямой и два луча на левом и правом концах графика. Далее, если на некотором промежутке звено графика $f(x)$ представляет собой часть прямой с угловым коэффициентом $k > 0$, то на этом промежутке $f(x)$ возрастает; если $k < 0$, убывает.
Заметим, что при $x \ge 1$ выполняется равенство $|x-1| = x-1$ и, следовательно, в первом слагаемом при x будет коэффициент 9.Остальные коэффициенты при x 1, 3 и 4.Они в сумме «не дотягивают» до 9. Поэтому как бы ни раскрывались остальные модули, мы на всех промежутках справа от $x = 1$ будем иметь положительные угловые коэффициенты у всех звеньев функции $f(x)$. Следовательно, при $x \ge 1$ функция $f(x)$ будет возрастать.



При $x \le 1$ выполняется $|x-1| = 1-x$. Следовательно, в первом слагаемом $f(x)$ коэффициент при x будет (-9). И также независимо от того, с каким знакомбудут раскрыты остальные модули, мы будем иметь отрицательные угловые коэффициенты у всех звеньев слева от $x = 1$. Поэтому, слева от $x = 1$ функция $f(x)$ убывает.
Таким образом, в точке $x = 1$ функция $f(x)$ достигает своего наименьшего значения.
Ясно, что исходное уравнение будет иметь решения в том и только в том случае, когда:
$$f(1) \le 0 \to f(1) = \big|3 - |1+a|\big| - 4 \le 0$$
Осталось решить неравенство $\big|3 - |1+a|\big| - 4 \le 0$. Имеем:
$\begin{cases} 3 - |a+1| \le 4 \\ 3 - |a+1| \ge -4 \end{cases} \to \begin{cases} |a+1| \ge -1 \\ |a+1| \le 7 \end{cases} \to |a+1| \le 7 \to -7 \le a+1 \le 7 \to -8 \le a \le 6.$
Ответ: $a \in [-8; 6]$.