

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1

Для записи решений и ответов на задания 13-19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение. б) Найдите корни, принадлежащие отрезку

$$13.1 \quad \cos x + 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + 1 = \sqrt{3} \sin 2x \quad \left[4\pi; \frac{11\pi}{2} \right]$$

$$13.2 \quad \sqrt{6} \sin x + 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin 2x - \sqrt{3} \quad \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right]$$

$$13.3 \quad \sqrt{6} \cos x + 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + \sqrt{3} = \sin 2x \quad \left[3\pi; \frac{9\pi}{2} \right]$$

$$13.4 \quad \cos x + \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + 1 = \sin 2x \quad \left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi \right]$$

$$13.5 \quad \sin x + 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \sin 2x + 1 \quad \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right]$$

$$13.6 \quad 2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos x \quad \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$$

$$13.7 \quad \cos^2 x + \sin x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \quad \left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right]$$

$$13.8 \quad 4 \sin^3 x = 3 \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \quad \left[3\pi; \frac{9\pi}{2} \right]$$

$$13.9 \quad 2 \cos^3 x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \quad \left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right]$$

$$13.10 \quad 4 \cos^3 \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \sin x = 0 \quad \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right]$$

$$13.11 \quad 2 \sin^3 \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) + \cos x = 0 \quad \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right]$$

14.

14.1 В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки А и В, на окружности верхнего основания отмечены точки В₁ и С₁ так, что ВВ₁ является образующей, перпендикулярной основаниям, а АС₁ пересекает ось цилиндра.

А) Докажите, что прямые АВ и В₁С₁ перпендикулярны

Б) Найдите угол между прямой АС₁ и ВВ₁, если АВ=6, В₁С₁=8, ВВ₁=15

Разновидности:

Найдите площадь боковой поверхности цилиндра,

Найдите площадь полной поверхности цилиндра,

Найдите объем цилиндра,

Найдите расстояние между прямыми ВВ₁ и АС₁

14.2 В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А, В и С, а на окружности другого основания – точка С₁, причем СС₁ – образующая цилиндра, а АС – диаметр основания.

Известно что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$

А) Докажите, что угол между прямыми АС₁ и ВС равен 45°

Б) Найдите объем цилиндра.

14.3 В кубе ABCDA₁B₁C₁D₁ все ребра равны 6

А) Докажите, что угол между прямыми АС и ВD₁ равен 60°

Б) Найдите расстояние между прямыми АС и ВD₁

14.4 В правильной пирамиде SABC точки М и N – середины ребер АВ и ВС соответственно. На боковом ребре SA отмечена точка К. Сечение пирамиды плоскостью MNK является четырехугольником, диагонали которого пересекаются в точке Q.

А) Докажите, что точка Q лежит на высоте пирамиды

Б) Найдите QP, если АВ=SK=6 и SA=8

Разновидности:

Найдите объем пирамиды QMNB, если АВ=12, SA=10, SK=2

Найдите угол между плоскостями MNK и ABC, если АВ=6, SA=12, SK=3

Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью MNK, если АВ=12, SA=15, SK=6

15. Решите неравенство

$$15.1 \quad \log_2(x-1) + \log_2\left(x^2 + \frac{1}{x-1}\right) \leq 2\log_2 \frac{x^2 + x - 1}{2}$$

$$15.2 \quad 2\log_2(x\sqrt{3}) - \log_2 \frac{x}{x+1} \geq \log_2\left(3x^2 + \frac{1}{x}\right)$$

$$15.3 \quad 2\log_2 x + \log_2\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \leq 2\log_2\left(\frac{x^2 + x}{2}\right)$$

$$15.4 \quad \log_2(x-1) + \log_2\left(2x + \frac{4}{x-1}\right) \geq 2\log_2 \frac{3x-1}{2}$$

$$15.5 \quad \log_7(2x^2 + 12) - \log_7(x^2 - x + 12) \geq \log_7\left(2 - \frac{1}{x}\right)$$

$$15.6 \quad \log_5(3x+1) + \log_5\left(\frac{1}{72x^2} + 1\right) \geq \log\left(\frac{1}{24x} + 1\right)$$

$$15.7 \quad 2\log_2(1-2x) - \log_2\left(\frac{1}{x} - 2\right) \leq \log_2(4x^2 + 6x - 1)$$

$$15.8 \quad \log_5(3x^2 - 2) - \log_5 x < \log_5\left(3x^2 + \frac{1}{x} - 3\right)$$

$$15.9 \quad \log_5(4-x) + \log_5 \frac{1}{x} \leq \log_5\left(\frac{1}{x} - x + 3\right)$$

$$15.10 \quad \log_2(3-2x) + 2\log_2 \frac{1}{x} \leq \log_2\left(\frac{1}{x^2} - 2x + 2\right)$$

$$15.11 \quad \log_7(3-x) + \log_7 \frac{1}{x} \geq \log_7\left(\frac{1}{x} - x + 2\right)$$

$$15.12 \quad 2\log_3(1-2x) - \log_3\left(\frac{1}{x} - 2\right) \leq \log_3(4x^2 + 6x - 1)$$

16.

16.1 Окружность проходит через вершины А, В и D параллелограмма ABCD, пересекает сторону BC в точках В и Ми пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке N.

А) Докажите, что AM=AN

Б) Найдите отношение CD:DN, если AB:DC=1:3, а $\cos \angle BAD = \frac{2}{5}$.

16.2 Окружность с центром O_1 касается оснований BC и AD и боковой стороны AB трапеции ABCD. Окружность с центром O_2 касается сторон BC, CD и AD. Известно, что AB=10, BC=9, CD=30, AD=39.

А) Докажите, что прямая O_1O_2 параллельна основаниям

Б) Найдите O_1O_2

16.3 Четырехугольник ABCD вписан в окружность радиуса $R = 8$. Известно, что $AB = BC = CD = 12$.

А) Докажите, что прямые BC и AD параллельны

Б) Найдите AD.

16.4 В трапеции ABCD с основаниями BC и AD углы ABD и ACD прямые.

А) Докажите, что AB=CD

Б) Найдите AD, если AB=2, BC=7

16.5 Окружность высекает на сторонах трапеции ABCD с основаниями AD и BC равные отрезки. Эта окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L.

А) Докажите, что биссектрисы углов трапеции пересекаются в центре этой окружности

Б) Найдите высоту трапеции, если длины отрезков AK=6, AL=10, BL=2

16.6 На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отложены отрезки AP и CQ соответственно.

А) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная его основанию, проходит через середину отрезка PQ.

Б) Найдите длину отрезка прямой PQ, заключенного внутри вписанной окружности треугольника ABC, если $AB = AC = BC = 3\sqrt{2}$, $CQ = AP = \sqrt{2}$

17.**17.1**

15 января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 21 месяц.

Условия его возврата таковы:

- 1 числа каждого месяца долг увеличивается на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- с 2 по 14 число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- на 15 число каждого с 1 по 20 месяц долг должен уменьшаться на 50 тыс.руб.;
- за двадцать первый месяц долг должен быть погашен полностью.

Сколько тысяч рублей составляет долг на 15 число 20-го месяца, если банку всего было выплачено 2073 тыс. рублей?

17.2

15 января планируется взять кредит в банке на некоторую сумму на 21 месяц.

Условия его возврата таковы:

- 1 числа каждого месяца долг увеличивается на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- с 2 по 14 число каждого месяца необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- на 15 число каждого с 1 по 20 месяц долг должен быть на 30 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 21-го месяца долг должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1604 тысячи рублей?

17.3

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 1 000 000 рублей на $n + 1$ месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n - й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца
- 15-го числа n - го месяца долг составит 200 тысяч рублей
- к 15-му числу $n + 1$ - го месяца кредит должен быть полностью погашен

Найдите r , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

17.4

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 300 тысяч рублей на 21 месяц. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 20-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца
- 15-го числа 20-го месяца долг составит 100 тысяч рублей
- к 15-му числу 21 - го месяца кредит должен быть полностью погашен

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

18.

18.1 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений имеет ровно четыре различных решения

$$\begin{cases} x^4 - y^4 = 12a - 28 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

18.2 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений имеет ровно четыре различных решения

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4(a + 1)x - 2ay + 5a^2 + 8a + 3 = 0 \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

18.3 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений имеет ровно четыре различных решения

$$\begin{cases} y = (a - 2)x^2 - 2ax - 2 + a \\ x^2 = y^2 \end{cases}$$

18.4 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений имеет ровно четыре различных решения

$$\begin{cases} ax^2 + ay^2 - (2a - 5)x + 2ay + 1 = 0 \\ x^2 + y = xy + x \end{cases}$$

18.5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение имеет хотя бы один корень

$$\sqrt{x + 2a - 1} + \sqrt{x - a} = 1$$

19.**19.1**

В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писал 81 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов.

Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешел из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в каждой школе.

а) Мог ли средний балл в школе №1 вырасти в 2 раза?

б) Средний балл в школе №1 вырос на 20%, средний балл в школе №2 также вырос на 20%. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться 1?

в) Средний балл в школе №1 вырос на 20%, средний балл в школе №2 также вырос на 20%. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе №2?

19.2 На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших из них равно 15.

А) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 3?

Б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 9?

В) Пусть B - шестое по величине число, а S - среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения $S-B$.

19.3 а) Представьте число $\frac{33}{100}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых — единица, а знаменатели — попарно различные натуральные числа.

б) Представьте число $\frac{15}{91}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых — единица, а знаменатели — попарно различные натуральные числа.

в) Найдите все возможные пары натуральных чисел m и n , для которых $m \leq n$ и

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{14}$$