

Вариант № 19602907

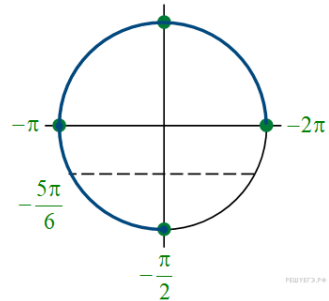
ЕГЭ — 2018. Основная волна 01.06.2018. Вариант 401 (С часть).

1. Задание 13 № 520783

а) Решите уравнение: $2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x$ б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.**Решение.**

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin^2 + \sin x + \cos x = \cos x; \quad 2\sin^2 + \sin x = 0; \quad \sin x \cdot (2\sin x + 1) = 0$$

Значит, $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$,или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.Получим числа: $-2\pi; -\pi; -\frac{5\pi}{6}$.Ответ: а) $\pi k, k \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi; -\pi; -\frac{5\pi}{6}$ **Критерии проверки:**

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

2. Задание 14 № 520784

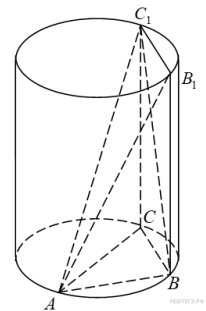
В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A, B и C , а на окружности другого основания — точка C_1 , причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2}$, $CC_1 = 2$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 и BC равен 45° .

б) Найдите объём цилиндра.

Решение.а) Пусть BB_1 — образующая цилиндра. Тогда BB_1C_1C — прямоугольник, поэтому угол между прямыми AC_1 и BC равен углу AC_1B_1 .Угол ABC опирается на диаметр основания цилиндра, поэтому он прямой. Значит, прямая B_1C_1 , параллельная прямой BC , перпендикулярна прямым AB и BB_1 . Таким образом, прямая B_1C_1 перпендикулярна плоскости ABB_1 , а значит, угол AB_1C_1 прямой.В прямоугольном треугольнике AB_1C_1 :

$$B_1C_1 = BC = AB\sqrt{3} = \sqrt{6}, \quad AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{AB^2 + CC_1^2} = \sqrt{6}.$$

Значит, $\angle AC_1B_1 = 45^\circ$.б) Отрезок AC является диаметром основания цилиндра. Значит, площадь основания цилиндра равна

$$\frac{\pi \cdot AC^2}{4} = \pi \cdot AB^2 = 2\pi.$$

Следовательно, объём цилиндра равен

$$2\pi \cdot BB_1 = 4\pi.$$

Ответ: б) 4π **Критерии проверки:**

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а	

ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> с использованием утверждения пункта <i>а</i> , при этом пункт <i>а</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

3. Задание 15 № 520785

Решите неравенство: $\log_5(3x+1) + \log_5\left(\frac{1}{72x^2} + 1\right) \geq \log_5\left(\frac{1}{24x} + 1\right)$.

Решение.

Правая часть неравенства определена при $x < -\frac{1}{24}$ и $x > 0$.

Поскольку при $x \neq 0$ выражение $\frac{1}{72x^2} + 1$ принимает положительные значения, при $x < -\frac{1}{24}$ и $x > 0$ неравенство принимает вид:

$$3x + 1 + \frac{1}{24x} + \frac{1}{72x^2} \geq \frac{1}{24x} + 1; \quad \frac{216x^3 + 1}{72x^2} \geq 0; \quad \frac{(6x)^3 + 1}{72x^2} \geq 0,$$

откуда $-\frac{1}{6} \leq x < 0$; $x > 0$. Учитывая ограничения $x < -\frac{1}{24}$ и $x > 0$, получаем: $-\frac{1}{6} \leq x < -\frac{1}{24}$; $x > 0$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{6}; -\frac{1}{24}\right)$; $(0; +\infty)$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $\frac{1}{3}$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

4. Задание 16 № 520786

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса $R=8$. Известно, что $AB = BC = CD = 12$.

а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

б) Найдите AD .

Решение.

а) Острые углы BCA и CAD равны, поскольку опираются на равные хорды AB и CD . Значит, прямые BC и AD параллельны.

б) Обозначим угол BCA через α . По теореме синусов

$$\sin \alpha = \frac{AB}{2R} = \frac{3}{4}.$$

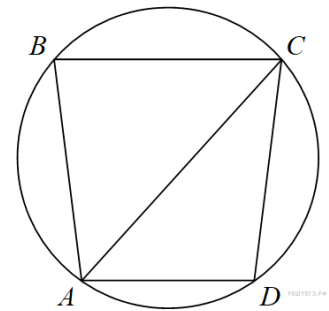
Треугольник ABC равнобедренный, поэтому $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 2\alpha$.

Четырёхугольник $ABCD$ — равнобедренная трапеция, поэтому $\angle CDA = \angle BAD = 2\alpha$. Значит,

$$\angle ACD = 180^\circ - \angle CAD - \angle CDA = 180^\circ - 3\alpha.$$

Таким образом, по теореме синусов для треугольников ACD и ACB получаем:

$$\frac{AD}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{AB}{\sin \alpha}; \quad AD = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} \cdot AB = (3 - 4 \sin^2 \alpha) \cdot AB = 9$$



Ответ: б) 9

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> .	3
Получен обоснованный ответ в пункте <i>б</i> . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> и при обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки.	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>а</i> . ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>б</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>б</i> и использованием утверждения пункта <i>а</i> , при этом пункт <i>а</i> не выполнен.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

5. Задание 17 № 520787

15-го декабря планируется взят кредит в банке на 1 000 000 рублей на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по n -й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— 15-го числа n -го месяца долг составит 200 тысяч рублей;

— к 15-му числу $(n+1)$ -го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r , если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

Решение.

По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1000; 960; 920; \dots; 240; 200; 0.$$

Значит, $n=20$.

Первого числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$. Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$1000k; 960k; \dots; 240k; 200k.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$1000(k-1)+40; 960(k-1)+40; \dots; 240(k-1)+40; 200k.$$

Всего следует выплатить

$$(k-1) \cdot \frac{20 \cdot 1240}{2} + 800 + 200k = 12600k - 11600 \text{ (тыс. рублей)},$$

откуда $12\,600k - 11\,600 = 1378$; $12\,600k = 12\,978$; $k = 1,03$; $r = 3$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	3

6. Задание 18 № 520788

Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + ay^2 - (2a-5)x + 2ay + 1 = 0, \\ x^2 + y = xy + x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Решение.

Второе уравнение приводится к виду $(x-1)(x-y) = 0$, откуда $x = 1$ или $y = x$.

При $a = 0$ исходная система имеет одно решение.

При $a \neq 0$ при подстановке в первое уравнение системы $x = 1$ или $y = x$ получаются квадратные уравнения. Значит исходная система уравнений имеет ровно 4 различных решения тогда и только тогда, когда каждое из этих уравнений имеет ровно два корня и пара чисел $(1;1)$ не является решением исходной системы.

При $x = 1$ получаем:

$$ay^2 + 2ay + 6 - a = 0$$

Это квадратное уравнение имеет ровно два корня при положительном дискриминанте:

$$4a^2 + 4a^2 - 24a > 0; a^2 - 3a > 0,$$

откуда $a < 0$ и $a > 3$.

При $y = x$ получаем:

$$2ax^2 + 5x + 1 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня при положительном дискриминанте:

$$25 - 8a > 0,$$

откуда, учитывая условие $x \neq 0$, получаем $a < 0$ и $0 < a < \frac{25}{8}$.

Пара чисел $(1;1)$ является решением исходной системы при $2a + 6 = 0$, то есть $a = -3$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно 4 решения при $a < -3$; $-3 < a < 0$; $3 < a < \frac{25}{8}$.

Ответ: $a < -3$; $-3 < a < 0$; $3 < a < \frac{25}{8}$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ.	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого только включением/исключением точек $a = 0$, $a = \frac{\pi}{4}$ и/или $a = \pi$	3
В решении верно найдены корни $x = a$ при $a \in \mathbb{R}$ и $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ при $a \leq \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, возможно, с учётом принадлежности корней указанному отрезку: $x = a$ при $0 \leq a \leq \pi$, $x = \frac{\pi}{4}$ при $a \leq \frac{\pi}{4}$ ИЛИ верно пройдены все этапы решения, но неверно найдены граничные точки множества значений a из-за вычислительной ошибки	2
В решении верно найден один из корней $x = a$ при $a \in \mathbb{R}$ или $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ при $a \leq \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, возможно, с учётом принадлежности корней указанному отрезку: $x = a$ при $0 \leq a \leq \pi$, $x = \frac{\pi}{4}$ при $a \leq \frac{\pi}{4}$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

7. Задание 19 № 520789

На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 5, а среднее арифметическое шести наибольших равно 15.

а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться 3?

б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 9?

в) Пусть B — шестое по величине число, а S — среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения $S - B$

Решение.

а) Если наименьшее число равно 3, то сумма шести наименьших чисел не меньше $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$, а их среднее арифметическое больше 5.

б) Пусть сумма пяти наименьших чисел равна A , шестое по величине число равно B , а сумма пяти наибольших чисел равна C . Предположим, что среднее арифметическое всех 11 чисел равно 9. Тогда получаем: $B + C = 90$, $A + B + C = 99$, откуда $A = 9$. Это невозможно, поскольку должно выполняться неравенство $A \geq 15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

в) $A + B = 30$, $B + C = 90$. Получаем:

$$S - B = \frac{A + B + C}{11} - B = \frac{(A + B) + (B + C) - 12B}{11} = \frac{120 - 12B}{11}.$$

Значит, нужно найти наименьшее значение B .

Пусть числа, написанные на доске, равны $a_1, a_2, \dots, a_{11}$, причем $a_1 < a_2 < \dots < a_{11}$. Тогда $a_1 + 5 \leq a_2 + 4 \leq a_3 + 3 \leq a_4 + 2 \leq a_5 + 1 \leq a_6 = B$, откуда

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + 15 \leq 6B \Leftrightarrow 45 \leq B \Leftrightarrow B \geq 7,5.$$

Значит, $B \geq 8$, поскольку B целое.

Покажем, что число B может равняться 8. Например, если на доске написаны числа 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 40, то условия задачи выполнены и $B = 8$.

Таким образом, $S - B = \frac{120 - 12B}{11} = \frac{24}{11}$.

Ответ: а) нет, б) нет, в) $\frac{24}{11}$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты.	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов.	2
Верно получен один из следующих результатов: — пример в пункте а; — обоснованное решение пункта б; — искомая оценка в пункте в; — пример в пункте в, обеспечивающий точность предыдущей оценки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4