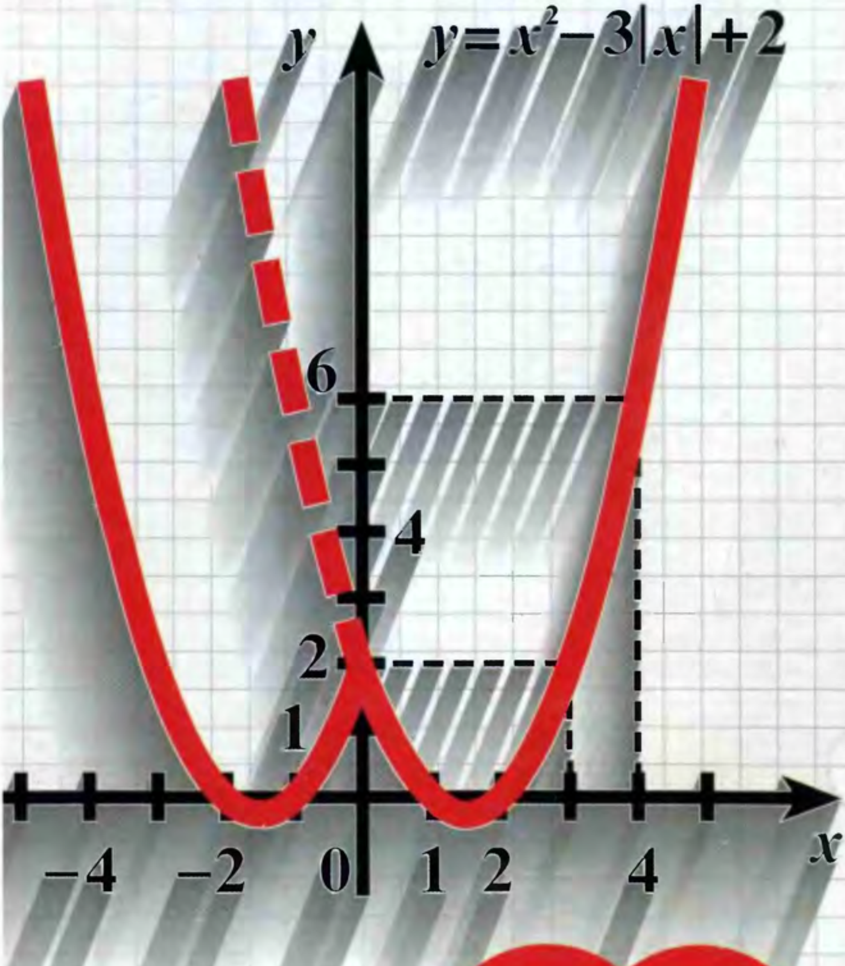
Е. В. Смыкалова

МАТЕМАТИКА

МОДУЛИ, ПАРАМЕТРЫ, МНОГОЧЛЕНЫ

предпрофильная подготовка



8-9

ПРЕДПРОФИЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА

Е. В. Смыкалова

МОДУЛИ, ПАРАМЕТРЫ, МНОГОЧЛЕНЫ

учебное пособие
для учащихся 8–9 классов

Санкт-Петербург
СМИО Пресс
2007

С 21

Смыкалова Е. В.

С21 Модули, параметры, многочлены. Учебное пособие для учащихся 8–9 классов. СПб: СМИО Пресс, 2007. — 72 с., ил.

Три темы, включенные в состав этого учебного пособия, представляют собой подготовленные двенадцатичасовые курсы для предпрофильной подготовки учащихся 8–9 классов, готовящихся к профильному обучению в классах естественнонаучного направления.

© Смыкалова Е. В., 2006 г.
© Гульковский Н. Н., оформление обложки, 2006 г.
ISBN 978-5-7704-0189-9
© «СМИО Пресс», 2006 г.

Редактор к. ф.-м. н. *Золина Н. К.*

Художественный редактор *Соловьева Н. Д.*

Директор издательства *Морозова И. С.*

Издательство «СМИО Пресс»
г. Санкт-Петербург, ул. Седова, д. 97, к. 3.
Тел/факс (812) 595-94-76, (911) 290-90-26,
e-mail: smio@vs7316.spb.edu http://www.smio.ru

Подписано к печати 30 июля 2007 г. Формат $84 \times 108^{1}/_{32}$.
Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Усл.-печ. л. 1,6.
Печать офсетная. Тираж 1500 экз. Заказ № 565

Отпечатано в ОАО «Петроцентр» СП Пушкинская типография
196601, г. Пушкин, ул. Средняя, д. 3/8.

МОДУЛИ

Определение модуля действительного числа

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называется само это число, если оно неотрицательное, и это число, взятое с противоположным знаком, если оно отрицательное.

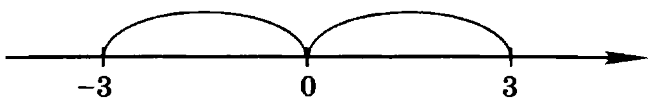
Модуль числа a обозначается так: $|a|$.

$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geq 0; \\ -a \text{ при } a < 0. \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называется расстояние от точки, изображающей число a на числовой прямой, до точки 0.

Например: $|3| = 3$; $|0| = 0$; $|-3| = 3$.



$$|3| = |-3| = 3$$

Рис. 1

Основные свойства модуля

1) Модуль любого действительного числа a есть неотрицательное число:

$$|a| \geq 0.$$

2) Каждое действительное число a не больше своего модуля и не меньше числа, противоположного модулю, т. е. каждое действительное число a удовлетворяет неравенству
$$-|a| \le a \le |a|.$$

3) Если число $a > 0$ и число x удовлетворяет неравенству $-a \le x \le a$, то модуль числа x удовлетворяет неравенству $|x| \le a$. Если $|x| \le a$, то справедливо неравенство $-a \le x \le a$.

4) Если число $a \ge 0$ и для числа x справедливо одно из неравенств $x \ge a$ или $x \le -a$, то модуль числа x удовлетворяет неравенству $|x| \ge a$. Каждое число x, удовлетворяющее неравенству $|x| \ge a$, удовлетворяет одному из неравенств $x \ge a$ или $x \le -a$.

5) Модуль суммы двух чисел не больше суммы модулей этих чисел:
$$|a + b| \le |a| + |b|.$$
Это свойство распространяется на любое конечное число слагаемых.

6) Модуль разности двух чисел не меньше разности модулей этих чисел:
$$|a - b| \ge |a| - |b|.$$

7) Модуль произведения двух чисел равен произведению модулей этих чисел:
$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$
Данное свойство сохраняется для произвольного конечного числа множителей.

8) Модуль частного двух чисел равен частному модулей этих чисел:
$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b > 0.$$

9) Модуль степени какого-либо числа равен степени модуля этого числа: $|a^n| = |a|^n$, причем если $n = 2k$ — четное число, то $|a|^{2k} = a^{2k}$.

10) Модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками числовой прямой, изображающими эти числа: $|a - b| = \rho(a;\ b)$. Из этого свойства следует важное равенство: $|a - b| = |b - a|$. В частности, $|-a| = |a|$.

11) Сумма модулей чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое число равно нулю.

12) Модуль разности модулей двух чисел не больше модуля разности этих чисел:
$$||a| - |b|| \le |a - b|.$$

13) Квадратный корень квадрата числа равен модулю этого числа:
$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Все эти свойства следуют из определения модуля действительного числа.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С МОДУЛЯМИ

1) Решить уравнение: $|2x - 1| = 3$.

Решение

Уравнение равносильно совокупности двух уравнений:
$$\left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 3; \\ 2x - 1 = -3. \end{array}\right.$$

Корень первого уравнения число 2, а корень второго — число -1.

Ответ: 2; -1.

2) Решить уравнение: $|3 - 5x| = -2$.

Ответ: решений нет.

3) Решить уравнение: $|x - 5| = x - 5$.

Решение

$x - 5 \geq 0$; $x \geq 5$.

Ответ: $x \geq 5$.

4) Решить уравнение: $|x| + x = 0$.

Решение

$|x| = -x$; $x \leq 0$.

Ответ: $x \leq 0$.

5) Решить уравнение: $|2x + 1| = |x - 3|$.

Решение

Уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 2x + 1 = x - 3; \\ 2x + 1 = -(x - 3). \end{array}\right.$$

Корень первого уравнения число -4, а корень второго — число $\frac{2}{3}$.

Ответ: -4; $\frac{2}{3}$.

6) Решить уравнение: $|x - 3| = x + 2$.

Решение

Уравнение равносильно системе:

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2 \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x - 3 = x + 2, \\ x - 3 = -x - 2; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x \geq -2, \\ 2x = 1. \end{array}\right. \quad x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

7) Решить уравнение: $x^2 - 6|x| + 8 = 0$.

Решение

Замена переменной $|x| = y$; $y \geq 0$. Уравнение принимает вид:

$$y^2 - 6y + 8 = 0; \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 4.$$

$$x = \pm 2; \ x = \pm 4.$$

Ответ: ± 2; ± 4.

8) Решить уравнение: $|x^2 - 1| + |1 - x| = 0$.

Решение

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} |x^2 - 1| = 0, \\ |1 - x| = 0. \end{cases} \quad x = 1.$$

Ответ: 1.

9) Решить уравнение: $||x + 1| - 2| = 3$.

Решение

Уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} |x+1| - 2 = 3, \\ |x+1| - 2 = -3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |x+1| = 5, \\ |x+1| = -1; \end{array}\right. \text{ решений нет.}$$

$$\left[\begin{array}{l} x+1 = 5, \\ x+1 = -5; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -6. \end{array}\right.$$

Ответ: 4; −6.

10) Решить уравнение: $|x| = |x - 1| + x - 3$.

Решение

Выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль при $x = 0$ и при $x = 1$. Точки 0 и 1 разбивают числовую ось на три промежутка $(-\infty;\ 0)$; $[0;\ 1)$; $[1;\ +\infty)$.

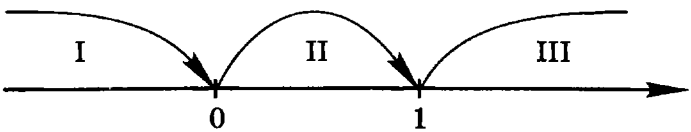


Рис. 2

На промежутке $(-\infty;\ 0)$ имеем $x < 0$ и $x - 1 < 0$, поэтому на этом промежутке уравнение принимает вид $-x = -x + 1 + x - 3$. Решая, получаем $x = 2$. Но это значение не лежит на промежутке $(-\infty;\ 0)$, и потому на этом промежутке уравнение корней не имеет.

На промежутке $[0; 1)$ $x \geq 0$, а $x - 1 < 0$, уравнение принимает вид $x = -x + 1 + x - 3$, $x = -2$. Это значение не лежит на промежутке $[0; 1)$, значит, на этом промежутке корней нет.

На промежутке $[1; +\infty)$ $x \geq 0$ и $x - 1 \geq 0$, уравнение принимает вид $x = x - 1 + x - 3$, $x = 4$.

Это значение принадлежит промежутку $[1; +\infty)$, значит, является корнем заданного уравнения.

Таким образом, уравнение имеет лишь один корень $x = 4$.

Ответ: 4.

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЯМИ

1) Решить неравенство: $|x - 2| < 3$.

Решение

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ x - 2 < 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 < 0, \\ -(x - 2) < 3. \end{cases}$$

Из первой системы получаем $2 \leq x < 5$, из второй $-1 < x < 2$. Объединяя эти решения, получаем $-1 < x < 5$.

Ответ: $-1 < x < 5$.

2) Решить неравенство: $3|x - 1| \leq x + 3$.

Решение

Данное неравенство равносильно двойному неравенству $-x - 3 \leq 3x - 3 \leq x + 3$ или системе

$$\begin{cases} -x - 3 \leq 3x - 3, \\ 3x - 3 \leq x + 3. \end{cases} \quad \begin{cases} 4x \geq 0, \\ 2x \leq 6. \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 3.$$

Ответ: $0 \leq x \leq 3$.

3) Решить неравенство: $|2x - 1| \leq |3x + 1|$.

Решение

Обе части неравенства неотрицательны, возводим их в квадрат, получаем:

$$(2x-1)^2 \le (3x+1)^2; \quad x(x+2) \ge 0;$$

$$(-\infty; -2] \cup [0; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$.

4) Решить неравенство: $-\frac{2}{(|x|+1)} > |x| - 2$.

Решение

Замена переменной: $|x| = y$; $y \ge 0$. Тогда неравенство принимает вид:

$$-\frac{2}{(y+1)} > y - 2; \quad \frac{y^2-y}{(y+1)} < 0.$$

Т. к. $y+1>0$ при всех $y \ge 0$, то $y(y-1)<0$, $0<y<1$. Возвращаясь к исходной неизвестной x, имеем: $0<|x|<1$; $(-1; 0) \cup (0; 1)$.

Ответ: $(-1; 0) \cup (0; 1)$.

5) Решите неравенство: $|x-1|+|x-3|>2$.

Решение

$x=1$ и $x=3$ делят числовую прямую на три промежутка.

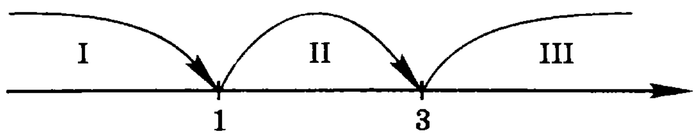


Рис. 3

Решим неравенство на каждом из этих промежутков.

На промежутке $(-\infty; 1)$: $-x+1-x+3>2$; $x<1$.

На промежутке $[1; 3]$: $x-1-x+3>2$; $2>2$; решений нет.

На промежутке $(3; +\infty)$: $x-1+x-3>2$; $x>3$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$.

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ С МОДУЛЯМИ

Построение графиков функций вида $y = f(|x|)$.

На основании определения модуля имеем:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \ge 0, \\ f(-x), & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Следовательно, график функции $y = f(|x|)$ состоит из двух графиков: графика $y = f(x)$ в правой полуплоскости и графика $y = f(-x)$ в левой полуплоскости.

Например, пусть требуется построить график функции

$$y = x^2 - 3|x| + 2.$$

На основании определения модуля имеем:

$$y = x^2 - 3|x| + 2 = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & \text{если } x \ge 0, \\ x^2 + 3x + 2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

График изображен на рис. 4.

Функция $y = f(|x|)$ четная, поэтому для построения ее графика достаточно построить график функции $y = f(x)$ для всех $x \ge 0$ из области ее определения и отразить полученную часть графика симметрично оси ординат.

На рис. 5 представлен график функции $y = x^2 - |x| - 2$, а на рис. 6 – график функции $y = x^2 + |x| - 2$.

Построение графиков функций вида $y = |f(x)|$.

На основании определения модуля имеем:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \ge 0, \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Для построения графика функции $y = |f(x)|$ достаточно построить график функции $y = f(x)$ для всех x из области ее определения и ту часть графика функции

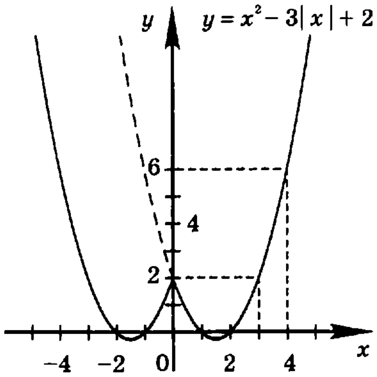


Рис. 4

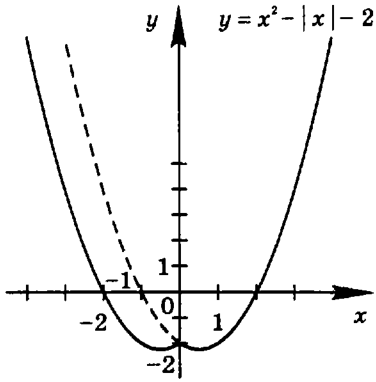


Рис. 5

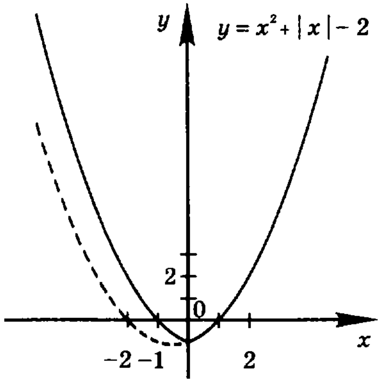


Рис. 6

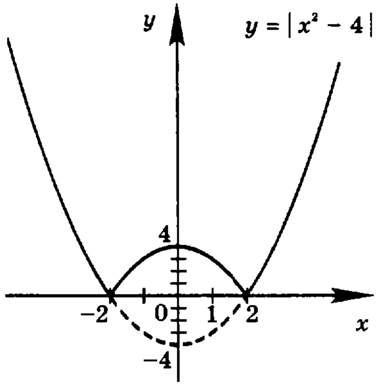


Рис. 7

$y = f(x)$, которая расположена ниже оси абсцисс, отразить симметрично этой оси. Таким образом, график функции $y = |f(x)|$ расположен только в верхней полуплоскости.

Так, для построения графика функции $y = |x^2 - 4|$ достаточно построить график функции $y = x^2 - 4$ для всех x и ту часть графика, которая расположена в нижней полуплоскости при $-2 < x < 2$, отобразить симметрично оси абсцисс.

График изображен на рис. 7.

Построение графиков функций вида $|y| = f(x)$.

Учитывая, что в формуле $|y| = f(x)$ $f(x) \ge 0$ и на основании определения модуля имеем:

$$|y| = \begin{cases} y, & \text{если } \ y \ge 0, \\ -y, & \text{если } \ y < 0. \end{cases}$$

Для построения графика функции $|y| = f(x)$ достаточно построить график функции $y = f(x)$ для тех x из области ее определения, при которых $f(x) \ge 0$, и отразить полученную часть графика симметрично оси абсцисс. Таким образом, график функции $|y| = f(x)$ состоит из графиков двух функций: $y = f(x)$ и $y = -f(x)$, где $f(x) \ge 0$.

На рис. 8 представлен график функции $|y| = x$, на рис. 9 — график функции $|y| = x^2$, на рис. 10 — график функции $|y| = x^2 - 5x + 6$.

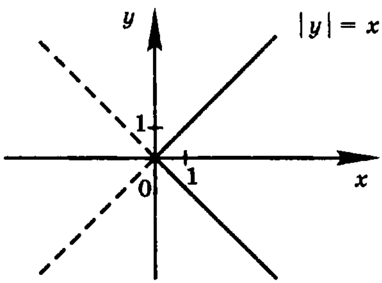


Рис. 8

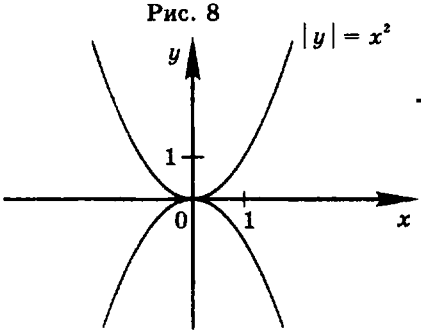


Рис. 9

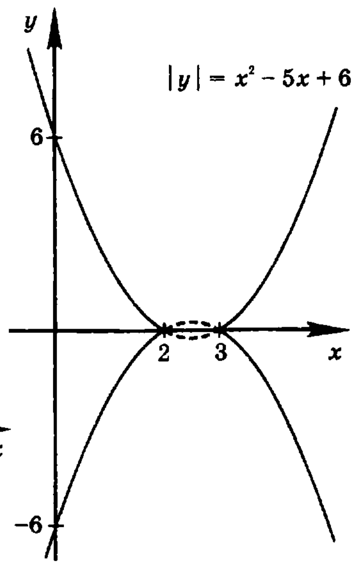


Рис. 10

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ УРАВНЕНИЙ С МОДУЛЯМИ

Пример 1

Построить график уравнения: $y+|y|=x$.

Решение

По определению модуля числа имеем:

$$x = y+|y| = \begin{cases} 2y, \text{ если } y \ge 0, \\ 0, \text{ если } y < 0. \end{cases}$$

График уравнения изображен на рис. 11.

Пример 2

Построить график уравнения: $y=x|y|$.

Решение

По определению модуля числа имеем:

$$x = \frac{y}{|y|} = \begin{cases} 1, \text{ если } y > 0, \\ -1, \text{ если } y < 0. \end{cases}$$

Если $y=0$, то x — любое.

График уравнения изображен на рис. 12.

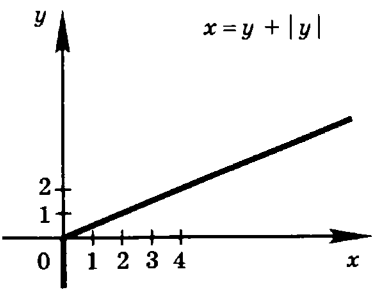


Рис. 11

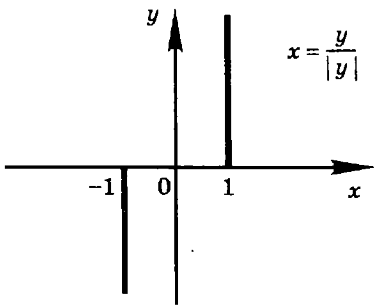


Рис. 12

Пример 3

Построить график уравнения: $|x|+|y|=4$.

Решение

По определению модуля числа имеем:

1) при $x \geq 0$, $y \geq 0$ уравнение $x + y = 4$;

2) при $x \geq 0$, $y < 0$ уравнение $x - y = 4$;

3) при $x < 0$, $y \geq 0$ уравнение $-x + y = 4$;

4) при $x < 0$, $y < 0$ уравнение $-x - y = 4$.

Строим графики четырех полученных уравнений в соответствующих четвертях. График уравнения изображен на рис. 13.

Пример 4

Построить график уравнения: $|x| - |y| = 4$.

Решение

По определению модуля числа имеем:

1) при $x \geq 0$, $y \geq 0$ уравнение $x - y = 4$;

2) при $x \geq 0$, $y < 0$ уравнение $x + y = 4$;

3) при $x < 0$, $y \geq 0$ уравнение $-x - y = 4$;

4) при $x < 0$, $y < 0$ уравнение $-x + y = 4$.

Строим графики четырех полученных уравнений в соответствующих четвертях. График уравнения изображен на рис. 14.

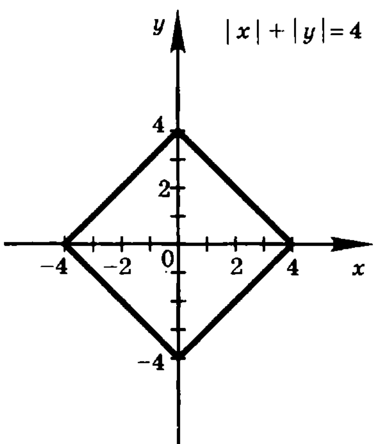


Рис. 13

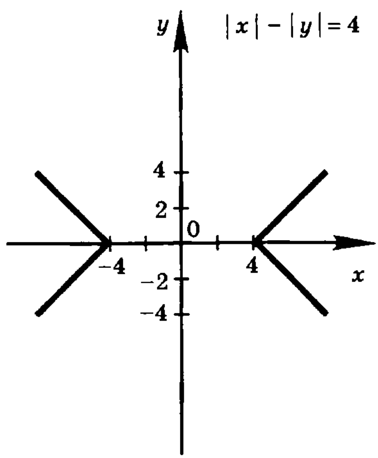


Рис. 14

ЗАДАЧИ

Решите уравнения.

1. $|x| = 4$.
2. $|x - 2| = -2$.
3. $|x| = -x$.
4. $|x| = x - 2$.
5. $|x - 1| = 3$.
6. $|3x - 5| = 2$.
7. $|x + 3| = 2x - 1$.
8. $|x - 1| = 2x - 5$.
9. $|x - 2| = -x + 8$.
10. $|5 - x| = 2(2x - 5)$.
11. $2|x - 4| = 3x + 1$.
12. $|1 - 2x| - 4x = -6$.
13. $|3x + 1| + x = 9$.
14. $|x| = |x + 0{,}5|$.
15. $|x + 4| = |x - 3|$.
16. $|6 - x| = |x - 9|$.
17. $|x + 2| = |2x - 1|$.
18. $|x - 1| - 2|x + 2| = 0$.
19. $|x| + |x - 1| = 11$.
20. $|x - 4| + |x + 2| = 6$.
21. $|x + 5| - |x - 3| = 8$.
22. $|x - 4| - |2 - x| = -2$.
23. $|x - 2| - |x + 5| = 3$.
24. $|x + 2| + |x + 3| = x$.
25. $|x - 3| + 2|x + 1| = 4$.
26. $|x - 4| + |x - 2| = x + 1$.
27. $|x + 1| - |2x - 3| = x - 5$.
28. $|2x - 3| - |4x - 5| = 6x - 1$.
29. $|x - 2| + 3x = |x - 5| - 18$.
30. $|5 - 2x| + |x + 3| + 3x - 2 = 0$.
31. $|x| + |x - 7| + 2|x - 4| = 2$.
32. $|3 - x| + |2x + 4| - |x + 1| = 2x + 4$.
33. $||x - 1| + 3| = 3$.
34. $||2x - 1| - 5| + x = |6 - x|$.
35. $3||x + 8| - 2| + 9 = 45$.
36. $3|4 - |2x - 1|| - 10 = 22$.
37. $|x + 1 + |-x - 3|| - 6 = x$.

Найдите меньший корень уравнения.

38. $|2|x|-1|=3.$

Найдите больший корень уравнения.

39. $|3|x|-4|=7.$

Решите уравнения.

40. $|||x|-1|-1|=1.$

41. $|||x-2|+1|-x|=5-x.$

42. $4+x=|||x+2|-3|+x|.$

43. $||||x-1|+2|-1|+1|=2.$

44. $x^2-6|x|+5=0.$

45. $x^2-7|x|+12=0.$

46. $x^2+8|x|=9.$

47. $|x-8|=x^2-x-8.$

48. $|x+6|=x^2-6x+6.$

49. $x|x-2|=-3.$

50. $x|3x+2|=-8.$

51. $|x^2-5x|=6.$

52. $|x^2-1|+x=5.$

53. $x^2+|x-1|=1.$

54. $|x^2+x|+3x-5=0.$

55. $|x^2-9|+|x^2-4|=5.$

56. $|x^4-1|=1-x^4.$

57. $|x^2-3x+2|+|x^2-1|=0.$

58. $|x-3|^2-6|x-3|=7.$

59. $x^2-6x=4|3-x|-9.$

60. $|x^2+x|+3x-5=0.$

61. $|4x-8|=|x^2-4x-8|.$

62. $\frac{|x-1|}{|x-2|}=\frac{6}{x-2}.$

63. $\frac{x+1}{|x-1|}-\frac{5|x-1|}{x+1}+4=0.$

Решите системы уравнений.

64. $\begin{cases} y+x-1=0, \\ |y|-x-1=0. \end{cases}$

65. $\begin{cases} x+3|y|-1=0, \\ x+y+3=0. \end{cases}$

66. $\begin{cases} y-2x+1=0, \\ y-|x|-1=0. \end{cases}$

67. $\begin{cases} |x-1|+y=0, \\ 2x-y=1. \end{cases}$

68. $\begin{cases} x + 2y - 6 = 0, \\ |x - 3| - y = 0. \end{cases}$

69. $\begin{cases} x + y = 2, \\ |3x - y| = 1. \end{cases}$

70. $\begin{cases} |x| + 2|y| = 3, \\ 5y + 7x = 2. \end{cases}$

71. $\begin{cases} |x + 1| + |y - 1| = 5, \\ |x + 1| = 4y - 4. \end{cases}$

72. $\begin{cases} |x - y| = 2, \\ |x| + |y| = 4. \end{cases}$

73. $\begin{cases} |x + 3| + 3y = 7, \\ 2x + 2(y - 1) = 3. \end{cases}$

74. $\begin{cases} |x - 1| + |y + 2| = 5, \\ |x| + y = 3. \end{cases}$

75. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 37, \\ |x - y| = 7. \end{cases}$

76. $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 2, \\ |x + y| = 1. \end{cases}$

77. $\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 94, \\ |x - y| = 2. \end{cases}$

78. $\begin{cases} xy - y^2 = 12, \\ |x - 2y| = 4. \end{cases}$

79. $\begin{cases} 2y^2 - x^2 = 7, \\ |x + y + 1| = 2. \end{cases}$

80. $\begin{cases} 3x^2 + xy = 16, \\ |2x + y + 3| = 3. \end{cases}$

Решите неравенства.

81. $|x| < 3.$

82. $|x| < -4.$

83. $|x| > 2.$

84. $|x| > -3.$

85. $|x - 1| < 2.$

86. $|x - 1| > 3.$

87. $|2x - 3| > 9.$

88. $|x| < 2x + 1.$

89. $|x - 1| < 2 - x.$

90. $3|x - 1| \le x + 3.$

91. $4|x + 2| < 2x + 10.$

92. $|x - 2| \le |x + 4|.$

93. $|x - 1| + |x + 1| < 4.$

94. $|x + 3| + |x - 3| < -1.$

95. $|x - 2| + |3 - x| > 4 + x.$

96. $|2x + 1| + |3x + 2| \le 5x + 3.$

97. $x + |x - 2| \le |x|.$

98. $|x + 5| + 2|x - 6| > 14.$

99. $|x + 2| - |x - 1| < x - 1{,}5.$

100. $|5x-1|-|4x+2|\le|x-3|$.
101. $|x-1|-|x|+|2x+3|>2x+4$.
102. $|x^2-5x|<6$.
103. $|x^2-2x|<x$.
104. $|x^2-2x-3|<3x-3$.
105. $x^2-3|x|+2>0$.
106. $x^2-x<3|x|$.
107. $x^2-6x+7-|x-3|<0$.
108. $3|x-1|+x^2-7>0$.
109. $(|x-1|-3)(x-3)<0$.
110. $|x-6|>|x^2-5x+9|$.
111. $|x^2+x|>|x^2-x|$.
112. $|x+7|\ge|x^2-3x+2|$.
113. $|x^2-5x+4|\le|x^2-4|$.
114. $|x^2-3x-3|>|x^2+7x-13|$.
115. $(|x-1|-3)(|x+2|-5)<0$.
116. $\frac{3x-4}{|x-3|}>2$.
117. $\frac{2x+7}{|x+2|}>1$.
118. $\left|\frac{x+1}{x-9}\right|<1$.
119. $\left|\frac{2x+1}{x-1}\right|<2$.
120. $\frac{x^2-5x+6}{|x|+7}<0$.
121. $\frac{|x-3|}{x^2-5x+6}\ge 2$.
122. $\left|\frac{x^2-3x-1}{x^2+x+1}\right|<3$.
123. $\frac{x^2-|x|-12}{x-3}\ge 2x$.

Постройте графики функций.

124. $y=-|x|$.
125. $y=|x|+1$.
126. $y=|x-2|$.
127. $y=|x+1|-2$.
128. $y=3|x|+2$.
129. $y=-1-2|x|$.
130. $y=|2x-1|$.
131. $y=|2-3x|$.
132. $y=2-|x+1|$.
133. $y=||x|-1|$.
134. $y=|2|x|-3|$.
135. $y=|5-3|x||$.
136. $y=||x+2|-1|$.
137. $y=2-||x|-2|$.
138. $y=|||x|-1|-1|$.
139. $y=|x|+x$.

140. $y = |x + 3| - 2x + 1$. 141. $y = |x| + |x - 2|$.

142. $y = |x^2 - 4x + 3|$.

Решите графически уравнение.

143. $|x| = x - 3$. 144. $|3x - 1| = 3 - x$.

145. $|x| + |x-2| = 2$.

Постройте график уравнения.

146. $|x| + |y| = 2$. 147. $|y| = 1 - |x|$.

148. $|x| - |y| = 3$. 149. $|x| = |y| + 1$.

150. $|y| - |x| = 2$. 151. $|y| = |x| + 3$.

ПАРАМЕТРЫ

УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

В уравнениях иногда некоторые коэффициенты заданы не конкретными числами, а обозначены буквами. Такие буквы называются параметрами. Предполагается, что эти параметры могут принимать любые числовые значения.

Например, линейные уравнения с параметром a:

$$ax = 5; \quad ax + 3 = 4; \quad 2x + a = 7;$$

квадратные уравнения с параметрами a, b и c:

$$ax^2 + bx + c = 0; \quad (a + 6)x^2 - bx + 3 = 0;$$

$$(2a + 8)x^2 - (a + 4)x + 3 = 0.$$

Так как параметры могут принимать любые числовые значения, то одно уравнение задает множество уравнений для всех возможных значений параметров.

Решить уравнение с параметром — значит для любого допустимого значения параметра найти множество всех корней заданного уравнения.

Основной принцип решения параметрических уравнений можно сформулировать так: необходимо разбить область изменения параметра на участки, такие, что при изменении параметра в каждом из них получающиеся уравнения можно решить одним и тем же методом. Отдельно для каждого участка находятся корни уравнения, выраженные через значения параметра. Используемые для этого приемы в точности таковы, как и при решении уравнений с постоянными коэффициентами. Поскольку каждый из методов представляет собой последовательность определенных действий, которые могут выполняться по-разному в зависимости от значений параметра, то выбранные первоначально участки его изменения в процессе решения могут дробиться, с тем чтобы на каждом из них рассуждения проводились единообразно. Ответ задачи состоит из списка участков изменения параметра с указанием для каждого участка всех корней уравнения.

Линейное уравнение $ax + b = c$ с неизвестным x можно рассматривать как уравнение с параметрами a, b, c. Его решением при $a \neq 0$ является $x = \frac{c-b}{a}$. Если $a = 0$, то получается $b = c$, и если действительно $b = c$, то корнями данного уравнения являются все действительные числа. Если же b не равно c, при этом $a = 0$, то данное уравнение корней не имеет.

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с неизвестным x можно рассматривать как уравнение с параметрами a, b, c $(a \neq 0)$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Решение квадратного уравнения при $a \neq 0$: два корня, если дискриминант $b^2 - 4ac$ положительный; один корень, если дискриминант равен нулю; корней нет, если дискриминант отрицательный.

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то уравнение линейное, имеет единственное решение: $x = -\frac{c}{b}$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

1) Решить уравнение $ax = 3$ с неизвестным x и параметром a.

Решение

Если $a \neq 0$, то можно разделить обе части уравнения на a, и тогда мы находим единственный корень уравнения: $x=\frac{3}{a}$. Если $a=0$, то уравнение корней не имеет, т. к. $0\cdot x=0$, а не 3.

Ответ: если $a\neq 0$, то $x=\frac{3}{a}$;
если $a=0$, то решений нет.

2) Решить уравнение $(a-2)x=a-2$.

Решение

Если $a=2$, то $0\cdot x=0$, x — любое число; если $a\neq 2$, то $x=\frac{a-2}{a-2}=1$.

Ответ: если $a\neq 2$, то $x=1$;
если $a=2$, то x — любое число.

3) Решить уравнение $ax-6=x-1$.

Решение

Приведем уравнение к виду: $ax-x=5$; $(a-1)x=5$; если $a=1$, то $0\cdot x=5$, решений нет; если $a\neq 1$, то $x=\frac{5}{a-1}$.

Ответ: если $a=1$, решений нет;
если $a\neq 1$, то $x=\frac{5}{a-1}$.

4) Решить уравнение $(a^2-9)x=a+3$.

Решение

Если $a=3$, то уравнение принимает вид $0\cdot x=6$ и не имеет решений; если $a=-3$, то уравнение принимает вид $0\cdot x=0$, x — любое число; если $a\neq\pm 3$, то $x=\frac{1}{a-3}$.

Ответ: если $a\neq\pm 3$, то $x=\frac{1}{a-3}$; если $a=3$, то решений нет; если $a=-3$, то x – любое число.

5) Решить уравнение: $(a-1)(a-5)x=a-5$.

Решение

Если $a=1$, то уравнение принимает вид $0\cdot x=-4$ и не имеет решений; если $a=5$, то уравнение принимает вид $0\cdot x=0$, x – любое число; если $a\neq 1$ и $a\neq 5$, то $x=\frac{1}{a-1}$.

Ответ: если $a\neq 1$ и $a\neq 5$, то $x=\frac{1}{a-1}$; если $a=1$, то решений нет; если $a=5$, то x – любое число.

6) Решить уравнение $(a + 5)(a - 3)x = a^2 - 25$.

Решение

Если $a = 3$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = -16$ и не имеет решений; если $a = -5$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, x – любое число; если $a \neq 3$ и $a \neq -5$, то $x = \frac{a-5}{a-3}$.

Ответ: если а ≠ 3 и а ≠ −5, то $x = \frac{a-5}{a-3}$;
если $a = 3$, то решений нет;
если $a = -5$, то x – любое число.

7) Решите уравнение $a^2x^2 + ax = 0$.

Решение

Это неполное квадратное уравнение, раскладываем на множители: $ax(ax + 1) = 0$. Если $a = 0$, тогда $0 = 0$, x — любое число; если $a \neq 0$, тогда корни уравнения $x = 0$ и $x = -\frac{1}{a}$.

Ответ: если $a \neq 0$, тогда корни уравнения $x = 0$ и $x = -\frac{1}{a}$; если $a = 0$, то x — любое число.

8) Решите уравнение $ax^2 + (2a^2 - 1)x - 2a = 0$.

Решение

Если $a = 0$, тогда $x = 0$; если $a \neq 0$, тогда корни уравнения $x = \frac{-2a^2 + 1 \pm (2a^2 + 1)}{2a}$; $x = \frac{1}{a}$ и $x = -2a$.

Ответ: если а ≠ 0, то $x = \frac{1}{a}$ и $x = -2a$;
если $a = 0$, тогда $x = 0$.

9) Решите уравнение $(a + 1)x^2 - 2x + 1 - a = 0$.

Решение

Если $a = -1$, тогда $-2x + 2 = 0$, $x = 1$; если $a \neq -1$, тогда корни уравнения $x = \frac{2 \pm 2a}{2(a+1)}$; $x = 1$ и $x = \frac{1-a}{1+a}$.

Ответ: если $a \neq -1$, то $x = 1$ и $x = \frac{1-a}{1+a}$;
если $a = -1$, то $x = 1$.

10) Решите уравнение $ax^2 - (2a + b)x + 2b = 0$.

Решение

Если $a = 0$ и $b = 0$, тогда $0 \cdot x = 0$, x — любое число; если $a = 0$, $b \neq 0$, тогда $bx = 2b$, $x = 2$; если $a \neq 0$, тогда корни уравнения $x = \frac{2a+b\pm|2a-b|}{2a}$; $x = 2$ и $x = \frac{b}{a}$.

Ответ: если $a \neq 0$, $x = 2$ и $x = \frac{b}{a}$; если $a = 0$, $b \neq 0$, $x = 2$; если $a = 0$ и $b = 0$, x — любое число.

11) При каких значениях параметра a уравнение $(a - 1)x^2 + x + a - 1 = 0$ имеет ровно 1 корень?

Решение

Если $a = 1$, имеем линейное уравнение с одним корнем $x = 0$. Если $a \neq 1$, имеем квадратное уравнение. Когда дискриминант равен нулю — один корень:

$$1 - 4(a - 1)(a - 1) = 0;\ (a - 1)^2 = \frac{1}{4};\ a - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{и } a - 1 = -\frac{1}{2};\ a = 1{,}5 \text{ и } a = 0{,}5.$$

Ответ: $a = 0{,}5$; $a = 1$; $a = 1{,}5$.

12) При каком значении a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + x + a = 0$ равна 13?

Решение

По теореме Виета $x_1 + x_2 = -1$, $x_1x_2 = a$. Сумма квадратов корней:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-1)^2 - 2a = 1 - 2a.$$

По условию $1 - 2a = 13$, тогда $a = -6$.

Ответ: $a = -6$.

НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ

Решить неравенство с параметром — значит для любого допустимого значения параметра найти множество всех решений заданного неравенства.

При решении параметрических неравенств используются те же соображения, что и при решении параметрических уравнений.

Рассмотрим некоторые примеры.

Решение неравенств с параметрами

1) Решить неравенство $ax < 2$.

Решение

Рассматриваем три возможности:

- если $a = 0$, x — любое число;
- если $a > 0$, тогда $x < \frac{2}{a}$;
- если $a < 0$, тогда $x > \frac{2}{a}$.

Ответ: если $a < 0$, то $x > \frac{2}{a}$; если $a = 0$, то x — любое число; если $a > 0$, то $x < \frac{2}{a}$.

2) Решить неравенство $ax > 3$.

Решение

Рассматриваем три возможности:

- если $a = 0$ — решений нет;
- если $a > 0$, тогда $x > \frac{3}{a}$;
- если $a < 0$, тогда $x < \frac{3}{a}$.

Ответ: если $a < 0$, то $x < \frac{3}{a}$; если $a = 0$, то решений нет; если $a > 0$, тогда $x > \frac{3}{a}$.

3) Решить неравенство $5x - a > ax - 3$.

Решение

Приведем неравенство к виду: $(5 - a)\,x > a - 3$; рассмотрим три возможности:

- если $a = 5$, то $0 \cdot x > 2$ – решений нет;
- если $5 - a > 0$, т. е. $a < 5$, тогда $x > \frac{a-3}{5-a}$;
- если $5 - a < 0$, т. е. $a > 5$, тогда $x < \frac{a-3}{5-a}$.

Ответ: если $a < 5$, то $x > \frac{a-3}{5-a}$; если $a = 5$, то решений нет; если $a > 5$, то $x < \frac{a-3}{5-a}$.

4) Решить неравенство: $a(ax - 4x) > a + 2 - 4x$.

Решение

Приведем неравенство к виду: $(a - 2)^2 x > a + 2$; если $a = 2$, то $0 \cdot x > 4$ — решений нет; если $a \neq 2$, то $x > \frac{a+2}{(a-2)^2}$.

Ответ: если $a \neq 2$, то $x > \frac{a+2}{(a-2)^2}$;
если $a = 2$, то решений нет.

5) При каких a неравенство $(x - a)(x - 3) \leq 0$ имеет единственное решение?

Решение

Если $a = 3$, то неравенство $(x - 3)^2 \leq 0$ имеет единственное решение $x = 3$; если $a \neq 3$, то решением неравенства будет отрезок.

Ответ: $a = 3$.

6) Решить неравенство: $|x - 4| > -a^4$.

Решение

Если $a \neq 0$, то правая часть неравенства отрицательна, и тогда при любом x левая часть больше правой. Если $a = 0$, то решением неравенства будут все x, кроме $x = 4$.

Ответ: если $a \neq 0$, то x — любое число;
если $a = 0$, то $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

7) При каких a уравнение $ax = a^2$ равносильно неравенству $|x + 1| \geq a$?

Решение

Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственное решение, а неравенство — бесконечно много решений. Если $a = 0$, то решением уравнения и решением неравенства будет x — любое число.

Ответ: $a = 0$.

8) При каких значениях a неравенство $ax^2 + 4x + a +$ $+ 3 < 0$ выполняется при всех действительных значениях x?

Решение

Старший коэффициент a должен быть отрицательным, дискриминант — меньше нуля.

$$a < 0; \ \ 16 - 4a(a + 3) < 0;$$

в результате решения системы неравенств получаем $a < -1$.

Ответ: $a < -1$.

9) Решить неравенство $\frac{a}{2a-x} > 3$.

Решение

Данное неравенство является рациональным. После приведения к стандартному виду получим:

$$\frac{x-\frac{5}{3}a}{x-2a} < 0.$$

Если $a = 0$, то решений нет.

Если $a > 0$, то точки $x = \frac{5}{3}a$ и $x = 2a$ разбивают числовую ось на интервалы:

$$-\infty < x < \frac{5}{3}a; \ \ \frac{5}{3}a < x < 2a; \ \ 2a < x < +\infty.$$

Неравенство верно на среднем интервале. Следовательно, если $a > 0$, то $x \in (\frac{5}{3}a; 2a)$.

Если $a < 0$, то точки $x = \frac{5}{3}a$ и $x = 2a$ разбивают числовую ось на интервалы:

$$-\infty < x < 2a; \ \ 2a < x < \frac{5}{3}a; \ \ \frac{5}{3}a < x < +\infty.$$

Неравенство справедливо на среднем интервале. Таким образом, если $a < 0$, то $x \in (2a; \frac{5}{3}a)$.

Ответ: если $a < 0$, то $x \in (2a; \frac{5}{3}a)$; если $a = 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $x \in (\frac{5}{3}a; 2a)$.

10) При каких значениях параметра a неравенство $\frac{2-ax-x^2}{1-x+x^2} \le 3$ верно при всех значениях переменной?

Решение

Так как $1-x+x^2>0$ при всех x, то данное неравенство равносильно неравенству $2-ax-x^2 \le 3-3x+3x^2$ или $4x^2+(a-3)x+1 \ge 0$. Последнее неравенство справедливо при всех значениях переменной при условии $(a-3)^2-16 \le 0$, т. е. $|a-3| \le 4$, откуда $-4 \le$ $\le a-3 \le 4$ и, следовательно, $-1 \le a \le 7$.

Ответ: $-1 \le a \le 7$.

ЗАДАЧИ

Решите уравнение.

152. $ax = ax$.
153. $\frac{x}{a} = \frac{x}{a}$.
154. $ax = 2$.
155. $(a-1)x = 1$.
156. $(a+2)x = 3a$.
157. $(a+1)x = a-1$.
158. $ax = a^2 + a$.
159. $(a^2+a)x = a^2 - 4a$.
160. $(a-1)x = a^2 - 6a + 5$.
161. $(a^2-1)x = a+1$.
162. $a^2x = a(x+2) - 2$.
163. $(a^2-1)x = a^2 + 3a + 2$.
164. При каком a уравнение $ax = x + 1$ не имеет решений?
165. При каком b уравнение $bx = x$ обращается в тождество?
166. При каком k уравнение $kx = k + x + 1$ не имеет корней?

167. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax = 2x + 1$ не имеет корней.

168. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $a^2x + 2ax + x = 1$ не имеет корней.

169. Найдите значение параметра a, при котором уравнение $a^2x = a(x + 2) - 2$ не имеет решений.

170. В уравнении $(a - 1)x = a - 2$ определите a так, чтобы число 3 было его решением.

171. В уравнении $a^2x = a^2 - a$ определите a так, чтобы число 2 было его решением.

172. При каком значении параметра a корень уравнения $3x(a + 4) = 6a + 35$ в 3 раза меньше корня уравнения $2(-x - 1) = 3(2 - x)$?

173. При каком значении параметра a корень уравнения $a(2x - 1) - \frac{5}{7} = 4a - x$ в 1,5 раза больше корня уравнения $0{,}5(x - 2) = 3(3 - x)$?

174. Определите, при каких значениях параметра a пара уравнений

$$2ax - 4x - a - 1 = 0;$$
$$4ax - 8x - a + 3 = 0$$

равносильна.

175. Определите, при каких значениях параметра a пара уравнений

$$ax - a + 2 - x = 0;$$
$$ax - a - 2 - x = 0$$

равносильна.

176. Сколько решений имеет уравнение $|x| = a$ в зависимости от a?

177. Для каждого значения параметра a определите число корней уравнения $|x - 1| = a$.

178. Для каждого значения параметра a определите число корней уравнения $|5x - 3| - 7 = a$.

179. Решите уравнение $|x - a| = 2x - a$.
180. Найдите все положительные значения a, при которых уравнение $||x| + a| = a^2$ имеет два корня.
181. Найдите все отрицательные значения a, при которых уравнение $||x| - a| = a^2$ имеет два корня.
182. Найдите координаты точки пересечения прямых $y = ax + 5$ и $2y - 3x + b = 0$, зная, что первая прямая проходит через точку $A(-2;\ 3)$, а вторая — через точку $B(3;\ 4)$.
183. Прямая $y = kx + b$ проходит через точку $A(-3;\ 2)$ и параллельна прямой $x - 2y = 1$. Найдите коэффициенты k и b.
184. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 + (a - 3)x + a = 0$ имеет два положительных корня.
185. При каком значении k корни уравнения
$$x^2 - 2(k - 2)x + k = 0$$
будут равными?
186. При каком целом a уравнение $ax^2 + 2ax + x = 1$ не имеет решений?
187. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 + 2ax + 4 = 0$ имеет единственное решение.
188. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(a - 2)x^2 + 2(a - 2)x + 2 = 0$ не имеет действительных корней.
189. При каких значениях параметра m квадратный трехчлен $y = (-2m - 2)\,x^2 + (-m - 1)x + 2$ положителен при всех значениях x? В ответ запишите наименьшее целое решение m.
190. При каких значениях параметра m квадратный трехчлен $y = (-2m - 2)\,x^2 + (-2m + 1)\,x - 1$ отри-

цателен при всех значениях x? В ответ запишите наибольшее целое решение m.

191. При каком положительном значении параметра c уравнение $(2-c)x^2 - 2(1+c)x + 4 = 0$ имеет равные корни?

192. При каком наименьшем целом положительном значении параметра m уравнение $x^2 - x + m^2 = 0$ не имеет корней?

193. Найдите наибольшее целое значение k, при котором сумма корней уравнения $7kx^2 + 5x = 3 + kx$ отрицательна.

194. При каких a сумма корней уравнения
$$x^2 + (2 - a - a^2)x - a^2 = 0$$
равна нулю?

195. При каком a сумма корней уравнения
$$x^2 + ax - 7 = 0$$
равна 6?

196. Найдите все значения a, при которых корни уравнения $(2a - 5)x^2 - 2(a - 1)x + 3 = 0$ равны.

197. При каких значениях параметра a уравнение
$$x^2 + 3x + a = 0$$
имеет единственный корень?

198. Определите значения параметра a, при которых корни многочлена $x^2 + x - a^2 - a$ различны и отрицательны.

199. При каких целых значениях параметра n корни уравнения $x^2 + nx + 15 = 0$ являются нечетными натуральными числами?

200. Определите целые значения n, при которых уравнение $nx^2 - 2(2n - 1)x + n = 0$ имеет единственный корень.

201. Определите значения параметра a, при которых корни многочлена $ax^2 + (2a - 1)x + a - 1$ являются числами разных знаков.

202. Определите значения параметра a, при которых корни многочлена $ax^2 + (2a + 1)x + a + 1$ относятся как $1 : 2$.

203. Найдите b, если корни уравнения $24x^2 + bx + 25 = 0$ положительны и $x_2 = 1{,}5\,x_1$.

204. При каких b уравнение

$$(b - 1)x^2 + (b + 4)x + b + 7 = 0$$

имеет равные корни?

205. Найдите значение a, при котором уравнение $(2a - 5)x^2 - 2(a - 1)x + 3 = 0$ имеет равные корни.

206. При каких значениях m уравнение $x^2 - x + m = 0$ не имеет действительных корней?

207. При каких значениях m уравнение

$$mx^2 - (m + 1)x + 2m - 1 = 0$$

не имеет действительных корней?

208. При каких значениях c уравнение

$$(c - 2)x^2 + 2(c - 2)x + 2 = 0$$

не имеет действительных корней?

209. Найдите наименьшее целое значение k, при котором уравнение $x^2 - 2(k + 2)x + 12 + k^2 = 0$ имеет два различных действительных корня.

210. При каких значениях a сумма корней уравнения $x^2 + (2 - a - a^2)x - a^2 = 0$ равна нулю?

211. Найдите значение a, при котором один корень уравнения $x^2 + (2a - 1)x + a^2 + 2 = 0$ вдвое больше другого.

212. При каких значениях a отношение корней уравнения $x^2 + ax + a + 2 = 0$ равно 2?

213. При каких значениях a отношение корней уравнения $ax^2 - (a + 3)x + 3 = 0$ равно 1,5?

214. Найдите значения k, при которых кривая $y = x^2 + kx + 4$ касается оси Ox.

215. Найдите значение a, при котором кривая $y = x^2 + ax + 25$ касается оси Ox.

216. При каких значениях a графики функций $y = 2ax + 1$ и $y = (a - 6)x^2 - 2$ не пересекаются?

217. При каких значениях p вершина параболы $y = x^2 + 2px + 13$ лежит на расстоянии 5 от начала координат?

218. Найдите значения p и q, при которых числа 3 и -5 являются корнями уравнения $-x^2 + px + q = 0$.

219. Определите коэффициенты уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

так, чтобы его корнями были p и q.

220. Найдите значения a, для которых уравнение $x^2 - 2(a - 1)x + (2a + 1) = 0$ имеет два положительных корня.

221. Найдите значение c, при котором разность корней уравнения $25x^2 - 25x + c - 2 = 0$ равна 0,2.

222. Определите q, если известно, что квадрат разности корней уравнения $x^2 - 2x + q = 0$ равен 16.

223. Определите, при каких значениях параметра a один из корней уравнения $4x^2 - 15x + 4a^3 = 0$ является квадратом другого корня.

224. Составьте уравнение второй степени, один из корней которого был бы равен сумме, а второй — произведению корней уравнения $x^2 - 3x - 10 = 0$.

225. При каком m абсолютная величина разности корней уравнения $x^2 + 3x + m = 0$ равна 6.

226. В уравнении $6x^2 + bx + 1 = 0$ один из корней больше другого на $\frac{1}{6}$. Чему равно значение b?

227. Отношение корней уравнения $24x^2 + bx + 25 = 0$ равно 1,5. Найдите коэффициент b.

228. Найдите p, при котором отношение корней уравнения $2x^2 + (p - 10)x + 6 = 0$ равно 12.

229. При каком a произведение корней уравнения $2x^2 - x + a = 0$ равно -1?

230. При каком p корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ отличаются только знаком?

231. При каких a разность корней уравнения
$$2x^2 - (a + 1)x + a - 1 = 0$$
равна их произведению?

232. Определите число корней уравнения $x^2 - 2|x| = a$ для всех значений параметра a.

233. Определите число корней уравнения
$$|x^2 - 2x - 3| = a$$
для всех значений параметра a.

234. Определите число корней уравнения
$$x^2 + a|x - 2| = 0$$
для всех значений параметра a.

235. При каких m уравнение $4x^2 - m = 5|x|$ имеет три решения?

236. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x^2 - 2ax| = 1$ имеет ровно три различных корня.

237. Определите, при каких значениях параметра a многочлены $2x^2 + (a + 2)x + 1$ и $x^2 - ax - 2$ имеют общий действительный корень.

238. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - (3a + 2)x + 2(a + 1) = 0$ имеет решение, большее 1?

239. При каких значениях параметра a уравнение $(1 - a)x^2 + 3ax + 4a - 1 = 0$ имеет решение, меньшее -3?

240. При каких значениях параметра a корни уравнения $ax^2 + (a - 1)x + a - 2 = 0$ расположены симметрично относительно точки $x = 1$.

241. При каких значениях a сумма корней уравнения $4x^2 + (2 - a - a^2)x + a^2 - 3 = 0$ равна нулю?

242. При каких значениях a произведение корней уравнения $ax^2 + 3x + a^3 - 3a^2 = 0$ равно нулю?

243. Найдите сумму квадратов корней уравнения
$$3x^2 + ax - 1 - 2a = 0.$$

244. При каких значениях a уравнение
$$ax^2 - 2a^2x + 3a^2 - 2a = 0$$
имеет только положительные корни?

245. Пусть число 1 — корень уравнения
$$x^2 - (a^2 - a + 7)x - 3a^2 + 3a + 6 = 0.$$
Найдите второй корень.

246. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + px + 12 = 0$ обладают свойством $x_2 - x_1 = 1$. Найдите p.

247. При каком значении a разность между корнями уравнения $(a - 2)x^2 - (a - 4)x - 2 = 0$ равна 3?

248. В уравнении $5x^2 + bx - 28 = 0$ найдите b, если корни уравнения x_1 и x_2 находятся в зависимости $5x_1 + 2x_2 = 1$ и b — целое число.

249. В уравнении $x^2 - 4x + p = 0$ найдите p, если известно, что сумма квадратов его корней равна 16.

250. При каких значениях a разность корней уравнения $2x^2 - (a + 1)x + (a - 1) = 0$ равна их произведению?

251. Найдите все значения a, при которых сумма корней уравнения $x^2 - 2a(x - 1) - 1 = 0$ равна сумме квадратов его корней.

252. При каких значениях a уравнения
$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + x + a = 0$$
имеют общий корень?

253. При каких a уравнение $(2 - x)(x + 1) = a$ имеет действительные и положительные корни?

254. Найдите все значения p, при которых корни уравнения $(p - 3)x^2 - 2px + 5p = 0$ действительны и положительны.

255. Найдите коэффициенты квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$, зная, что он обращается в ноль при $x = 8$ и что его наименьшее значение равно -12 при $x = 6$.

256. Известно, что каждый корень уравнения $x^2 - 5x + a = 0$ на единицу меньше соответствующего корня уравнения $x^2 - 7x + 3a - 6 = 0$. Найдите a и корни каждого из уравнений.

257. В зависимости от значения параметра a определите, сколько решений имеет уравнение $x^2 + 4|x| + 3 = a$.

258. Определите, сколько решений имеет уравнение $|x^2 - 4|x| + 2| = a$ в зависимости от значений параметра a.

259. Определите, сколько решений имеет уравнение $|x^2 - 6|x| + 6| = a$ в зависимости от значений параметра a.

260. Найдите значение k, при котором система уравнений $\begin{cases} (k+2)x + 3y = 9 + 3k, \\ x + (k+4)y = 2 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

261. При каком значении m система уравнений

$$\begin{cases} (m - 2)x + 7y = 9, \\ (m + 1)x + 2(m + 2)y = 18 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

262. При каком значении a система уравнений
$$\begin{cases} ax - 2y = 4, \\ 0{,}35\,x - 0{,}14\,y = 2 \end{cases}$$
не имеет решений?

263. При каких m система уравнений
$$\begin{cases} 2x + (m - 1)\,y = 3, \\ (m + 1)\,x + 4y = -3 \end{cases}$$
имеет бесконечное множество решений?

264. При каких a система уравнений
$$\begin{cases} 4x + ay = 2, \\ ax + y = 1 \end{cases}$$
имеет бесконечное множество решений?

265. При каких b система уравнений
$$\begin{cases} 4x + by = 4, \\ bx + y = 2 \end{cases}$$
не имеет решений?

266. При каком k все решения системы
$$\begin{cases} x - 3ky = 3, \\ kx = 12y + 6 \end{cases}$$
удовлетворяют условиям $x > 1$, $y < 0$?

267. При каком a система
$$\begin{cases} (a - 2)\,x + 27y = 4{,}5, \\ 2x + (a + 1)\,y = -1 \end{cases}$$
имеет бесконечное множество решений?

268. При каком значении k все решения системы
$$\begin{cases} x - ky = 3, \\ kx - 4y = 6 \end{cases}$$
удовлетворяют условиям $x > 1$, $y < 0$?

269. Найдите все a, при которых имеет решение система $\begin{cases} y + a \geq 2|x - a|, \\ x + |y - a| = a + 1. \end{cases}$

270. Найдите все a, при которых имеет решение система $\begin{cases} x - a \geq 3|y + a|, \\ y + |x + a| = 2 - a. \end{cases}$

Решите неравенство.

271. $ax < 1$.
272. $ax > 1$.
273. $(a - 1)x < a^2 - 1$.
274. $5x - a > ax - 3$.
275. $px - 3 < 2x + 5$.
276. $a(ax - 1) > 3(2ax - 3x + 1)$.
277. $a(ax - 4x) > a + 2 - 4x$.
278. Существуют ли такие значения a, при которых неравенство $ax > 2x + 5$ не имеет решений?
279. Существуют ли такие значения b, при которых неравенство $b(x - b) \leq 3x - 9$ имеет бесконечное множество решений?

Решите неравенство.

280. $\frac{x-a}{2x+1} \geq 0$.
281. $\frac{3-5x}{x-a} \geq 0$.
282. Для всех допустимых значений параметра a решите неравенство $\frac{x}{a+2} > 2x - a$.
283. Для всех допустимых значений параметра a решите неравенство $\frac{x}{a-4} \geq 3x - 2a$.
284. Решите неравенство $|x| - |x - 2| \leq ax$ при каждом значении параметра a.
285. Для всех допустимых значений параметра a решите неравенство $5|x| > |x - a|$.

286. Решите неравенство $|x+1|-|x-2| \geq ax$ при каждом значении параметра a.

287. Решите неравенство $|x+1|-|x-1| \geq a(x+1)$ при каждом значении параметра a.

288. Решите неравенство $|x+1|+|x-1| \leq a(x-1)$ при каждом значении параметра a.

289. При каких значениях параметра a из неравенства $1 < |x-3| < 2$ следует неравенство $x + 5a < 0$?

290. При каких значениях k неравенство

$$x^2 - (k-3)x - k + 6 > 0$$

справедливо при всех действительных x?

291. При каких значениях a неравенство

$$ax^2 + 2ax + 0{,}5 > 0$$

выполняется на всей числовой оси?

292. При каком целом k неравенство

$$x^2 - 2(4k-1)x + 15k^2 - 2k - 7 > 0$$

верно при любом действительном x?

293. Найдите все значения a, при которых неравенство $(a+4)x^2 - 2ax + 2a - 6 < 0$ выполняется при всех действительных x.

294. Найдите все значения a, для которых неравенство $(a-1)x^2 - (a+1)x + a + 1 > 0$ выполняется при всех действительных x.

295. При каком наименьшем целом k трехчлен $(k-2)x^2 + 8x + k + 4$ положителен при всех значениях x?

296. Найдите все действительные значения m, при которых неравенство $mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$ удовлетворяется при всех положительных x.

297. Определите, при каких целых значениях n неравенство $x^2 - (3n+5)x + 1 > 0$ справедливо при всех действительных x.

298. Определите, при каких целых значениях n неравенство $x^2 - 2(3n + 4)x + 4 > 0$ справедливо при всех действительных x.

299. Определите, при каких целых значениях n неравенство $nx^2 - 2nx - 2 < 0$ справедливо при всех действительных x.

300. Определите, при каких значениях a неравенство $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$ справедливо при любых x, больших 2.

301. Определите, при каких значениях a неравенство $(a - 1)x^2 + (2a - 3)x + (a + 3) > 0$ справедливо при любых x, меньших 1.

МНОГОЧЛЕНЫ

Многочлен с одной переменной представляет собой сумму одночленов

$$a_0 x^n,\ a_1 x^{(n-1)},\ \dots,\ a_{n-1}x,\ a_n,$$

где n — натуральное число или 0, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ — целые или рациональные числа. Располагая эти одночлены по убывающим степеням переменной:

$$a_0x^n + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

получим запись многочлена в стандартном виде. Например, многочлен $2x^3 + x^2 - 5x + 1$ записан в стандартном виде. Многочлен $3 - x - 5x^2$ может быть приведен к стандартному виду $-5x^2 - x + 3$.

Если $n = 0$, то многочлен является числом a_0, если при этом $a_0 = 0$, то такой многочлен называется нулевым.

Степенью многочлена с переменной x называется наибольший из показателей степеней одночленов, входящих в его стандартный вид. Поэтому, если $a_0 \neq 0$, то число n называется степенью многочлена.

Числа $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ — его коэффициенты.

Одночлен a_0x^n называется старшим членом многочлена, a_0 — коэффициент при наибольшем показателе степени называется старшим коэффициентом, одночлен a_n — слагаемое, не содержащее x, называется свободным членом многочлена. Нулевой многочлен не имеет степени.

Значение многочлена — это то число, которое получится в результате подстановки в многочлен вместо переменной некоторого числа.

Например, многочлен $P(x) = x^2 - 5x + 3$. При $x = 2$ значение многочлена $P(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 3 = -3$.

Значение $P(0)$ равно свободному члену многочлена.

Значение $P(1)$ равно сумме коэффициентов многочлена.

Например, $P(x) = x^2 - 5x + 3$. $P(0) = 3$, а $P(1) = -1$.

При нахождении значений многочлена используется *схема Горнера* [1]. Это таблица из двух строк, заполненных определенным образом.

Например, чтобы вычислить значение многочлена $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 13$ при $x = 3$, строка его коэффициентов записывается в первой строке, старший коэффициент дублируется во второй строке, а перед ним ставится значение переменной 3, при котором мы вычисляем значение многочлена. Получается таблица:

	2	0	−3	1	−13
3	2				

Пустые клетки таблицы будем заполнять по следующему правилу: стоящее слева число умножаем на 3 и складываем с числом, стоящим над данной пустой клеткой. Поэтому в первой пустой клетке ставится число $2 \cdot 3 + 0 = 6$, во второй клетке ставится $6 \cdot 3 + (-3) = 15$, в третьей — $15 \cdot 3 + 1 = 46$, и в последней — $46 \cdot 3 + (-13) = 125$.

Полностью заполненная схема Горнера выглядит так:

	2	0	−3	1	−13
3	2	6	15	46	125

[1] Английский математик XVI в.

Вычисления приводят к ответу: $P(3) = 125$. Можно проверить полученный результат непосредственной подстановкой:

$$P(3) = 2 \cdot 3^4 - 3 \cdot 3^2 + 3 - 13 = 125.$$

Корень многочлена

Число α называется корнем многочлена, если при значении переменной $x = \alpha$ значение многочлена равно нулю.

Например, для многочлена

$$P(x) = 3x^5 - 5x^4 - 7x^2 + 12$$

число 2 является корнем, т. к.

$$P(2) = 3 \cdot 32 - 5 \cdot 16 - 7 \cdot 4 + 12 = 0.$$

Схема Горнера позволяет проверять, является ли данное число корнем данного многочлена или нет, с ее помощью вычисляется значение $P(2) = 0$.

	3	–5	0	–7	0	12
2	3	1	2	–3	–6	0

Для многочлена $P(x) = 3x^5 - 5x^4 - 7x^2 + 12$ число 1 не является корнем, т. к. $P(1) \neq 0$.

	3	–5	0	–7	0	12
1	3	–2	–2	–9	–9	3

Целые корни многочлена

Теорема

Всякий целый корень многочлена с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.

На этой теореме основан алгоритм поиска целых корней многочлена с целыми коэффициентами: необходимо выписать все делители свободного члена и поочередно вычислять значения многочлена от этих чисел.

Например, целые корни многочлена

$$P(x) = x^3 + 2x - 3$$

следует искать среди делителей свободного члена -3, т. е. ± 1 и ± 3. Вычисляя значения многочлена от этих чисел, $P(1) = 0$; $P(-1) = -6$; $P(3) = 30$; $P(-3) = -36$, находим целый корень 1.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ КОРНИ МНОГОЧЛЕНА

Способ отыскания рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами дается следующей теоремой:

Теорема

Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

с целыми коэффициентами. Тогда число p является делителем свободного члена a_n, а q — делителем старшего коэффициента a_0.

Следствие 1. Любой целый корень уравнения с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.

Следствие 2. Если старший коэффициент уравнения с целыми коэффициентами равен 1, то все рациональные корни уравнения, если они существуют, целые.

Например, рациональные корни многочлена $2x^3 - x^2 + 2x - 1$ следует искать среди чисел $\pm\frac{1}{2}$. $P(\frac{1}{2}) = 0$, $P(-\frac{1}{2}) \neq 0$. Корень многочлена $\frac{1}{2}$.

Деление многочленов

Многочлены можно складывать, вычитать, умножать. В некоторых случаях выполнимо деление. Например, многочлен x^3+3x^2-2x-6 делится на многочлен x^2-2, т. к. $x^3+3x^2-2x-6=(x^2-2)(x+3)$, многочлен $x+3$ является частным.

Для деления многочленов, записанных в стандартном виде, применяется правило «деления уголком», аналогичное правилу деления многозначных чисел. Деление «уголком» выполняется и без остатка, и с остатком:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
-\,2x^4 & -\,3x^3 & +\,x^2 & -\,4x & +\,1 & x^2+3x-1 \\
\cline{6-6}
2x^4 & +\,6x^3 & -\,2x^2 & & & 2x^2-9x+30 \\
\cline{1-5}
 & -\,9x^3 & +\,3x^2 & -\,4x & +\,1 & \\
 & -\,9x^3 & -\,27x^2 & +\,9x & & \\
\cline{2-5}
 & & 30x^2 & -\,13x & +\,1 & \\
 & & 30x^2 & +\,90x & -\,30 & \\
\cline{3-5}
 & & & -\,103x & +\,31 &
\end{array}
$$

$$2x^4-3x^3+x^2-4x+1=\left(x^2+3x-1\right)\left(2x^2-9x+30\right)+$$
$$+\left(-103x+31\right).$$

Итак, имеет место равенство:

$$2x^4-3x^3+x^2-4x+1=(x^2+3x-1)(2x^2-9x+30)+$$
$$+(-103x+31).$$

Теорема Безу [1]

Если число α является корнем многочлена $P(x)$, имеющего степень n, то этот многочлен можно представить в виде $P(x)=(x-\alpha)\,Q(x)$, где $Q(x)$ — частное от деления $P(x)$ на $(x-\alpha)$, многочлен степени $n-1$.

[1] Французский математик XVIII в.

Число α является корнем многочлена тогда и только тогда, когда многочлен делится на двучлен $x - \alpha$.

Таким образом, если известен хотя бы один корень уравнения $P(x) = 0$ степени n, то с помощью теоремы Безу можно свести задачу к решению уравнения степени $n - 1$, т. е., как говорят, понизить степень уравнения.

Например, найдем рациональные корни многочлена $P(x) = 9x^3 + 18x^2 - x - 2$.

Вначале найдем целые корни многочлена $P(x)$. Ими могут быть ± 1, ± 2. Вычисляем значения: $P(1) = 24$; $P(-1) = 8$; $P(2) = 140$; $P(-2) = 0$. Итак, число $x = -2$ — корень $P(x)$, тогда по теореме Безу $P(x)$ делится на $x + 2$: $P(x) = (9x^2 - 1)(x + 2)$. Корни частного $9x^2 - 1$ легко вычисляются: $\pm\frac{1}{3}$. Таким образом, многочлен $P(x)$ имеет три корня: -2; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$. Зная корни многочлена, найдем разложение его на множители: $P(x) = (x + 2)(3x + 1)(3x - 1)$.

При делении многочлена $P(x)$ на двучлен $x - \alpha$ остаток равен числу $P(\alpha)$.

Пользуясь теоремой Безу, можно, не производя деления, найти остаток. Например, остаток от деления многочлена $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1$ на $x + 2$ равен $P(-2) = 87$.

Понижение степени уравнения $P(x) = 0$ в случае, когда известен его корень α, сводится к нахождению частного от деления $P(x)$ на $x - \alpha$.

Деление многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ на двучлен $x - \alpha$ удобно выполнять по схеме Горнера.

Обозначим неполное частное при делении $P(x)$ на $x - \alpha$ через $Q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$, а остаток — через b_n.

Так как $P(x) = Q(x)(x - \alpha) + b_n$, то имеет место тождество

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n =$$
$$= (b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1})(x - \alpha) + b_n.$$

Раскроем в правой части этого равенства скобки и сравним коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа. Получим, что $a_0 = b_0$ и при $1 \le k \le n$ имеют место соотношения $a_k = b_k - \alpha b_{k-1}$. Отсюда следует, что $b_0 = a_0$ и $b_k = a_k + \alpha b_{k-1}$ при $1 \le k \le n$.

Вычисление коэффициентов многочлена $Q(x)$ и остатка b_n записывают в виде следующей таблицы:

a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + \alpha b_0$	$b_2 = a_2 + \alpha b_1$	...	$b_{n-1} = a_{n-1} +$ $+ \alpha b_{n-2}$	$b_n = a_n +$ $+ \alpha b_{n-1}$

В первой строке этой таблицы записаны коэффициенты многочлена $P(x)$. Во второй строке получаются коэффициенты частного и остаток. Старший коэффициент частного равен старшему коэффициенту делимого. Если уже заполнено несколько клеток второй строки, то следующая пустая клетка заполняется так: берут стоящее над ней число первой строки и прибавляют к нему произведение α и предыдущего элемента второй строки. В последней клетке второй строки под свободным членом делимого получается остаток от деления.

Например, требуется разложить на множители с целыми коэффициентами многочлен

$$P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 3x^2 + 5x - 1.$$

Ищем целые корни среди делителей свободного члена: 1; −1. Подходит −1. Делим $P(x)$ на $(x + 1)$:

	2	−7	−3	5	−1
−1	2	−9	6	−1	0

$$P(x) = (x + 1)(2x^3 - 9x^2 + 6x - 1).$$

Ищем целые корни кубического многочлена $2x^3 - 9x^2 + 6x - 1$ среди делителей его свободного члена: 1; −1. Вычисления показывают, что целых корней нет. Так как старший коэффициент многочлена не равен 1, то многочлен может иметь дробные рациональные корни. Дробными корнями могут быть только числа $-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$. Подходит $\frac{1}{2}$:

	2	−9	6	−1
$\frac{1}{2}$	2	−8	2	0

Имеем:

$$P(x) = (x + 1)\left(x - \tfrac{1}{2}\right)(2x^2 - 8x + 2) =$$

$$= (x + 1)(2x - 1)(x^2 - 4x + 1).$$

Трехчлен $x^2 - 4x + 1$ на множители с целыми коэффициентами не раскладывается.

Ответ: $P(x) = (x + 1)(2x - 1)(x^2 - 4x + 1)$.

ЗАДАЧИ

Приведите многочлен к стандартному виду.

302. $(x - 1)^2(x + 1)^2 - (x^2 + 1)^2$.
303. $(x + 1)^4 - (x - 1)^4$.
304. $(x - 3)^3 + (x + 1)^3$.
305. $(x^2 - 1)^3 - (x^3 - 2)^2 + 3x^2(x^2 - x + 1)$.

Найдите степень многочлена.

306. $(5x^2 - 3x + 2)^2(4x^3 + x - 7)$.
307. $(x^3 - x + 4)^{12} + (x^{10} + x^5 + x)^2$.
308. $(x + 1)^2 - 2x(x + 1) + x^2$.
309. $(x - 1)(x - 2) - 2(x - 1)(x - 3) + (x - 2)(x - 3)$.
310. Вычислите значение многочлена $5x^3 - 6x^2 + 7$ при $x = -3$, используя схему Горнера.

311. Вычислите значение многочлена

$$x^4 + 3x^2 + 2x + 1$$

при $x = -2$, используя схему Горнера.

312. Вычислите значение многочлена

$$x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 4x - 6$$

при $x = 2$, используя схему Горнера.

313. Вычислите значение многочлена

$$2x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7x + 8$$

при $x = -1$, используя схему Горнера.

314. Являются ли числа -1 и 1 корнями многочлена $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$?

315. Являются ли числа -2 и 2 корнями многочлена $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$?

316. Какие из чисел $-1, 1, -2, 2, -3, 3$ являются корнями уравнения $2x^4 - 7x^3 + 3x^2 - x + 3 = 0$?

317. Какие из чисел $-1, 1, -2, 2, -3, 3$ являются корнями уравнения $3x^5 - 2x^4 - 19x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0$?

Найдите целые корни многочлена $P(x)$ и разложите его на множители.

318. $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

319. $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$.

320. $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$.

321. $P(x) = 3x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 3$.

Найдите рациональные корни многочлена.

322. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

323. $2x^3 + x^2 - 2x - 1$.

324. $36x^3 - 36x^2 + 11x - 1$.

325. $9x^4 + 9x^3 + 17x^2 - x - 2$.

Найдите рациональные корни многочлена и разложите его на множители.

326. $8x^4 + 12x^3 - 10x^2 - 3x + 2$.

327. $16x^4 + 12x^3 - 8x^2 - 3x + 1$.

328. $6x^4 + 19x^3 + 14x^2 - x - 2$.
329. $x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$.

Разложите на множители.

330. $a^2 - 2a - 3$.
331. $a^3 + a^2 - 12$.
332. $x^3 - 7x + 6$.
333. $x^3 + 6x - 7$.
334. $n^4 + 4$.
335. $n^4 + n^2 + 1$.
336. $a^5 + a + 1$.
337. $a^5 - a^2 - a - 1$.
338. $x^8 - 1$.
339. $x^9 + 1$.
340. $x^8 + x^4 + 1$.
341. $x^8 + x^4 - 2$.

Найдите частное.

342. $(3x^3 + 5x^2 + 4x + 12) : (x + 2)$.
343. $(2x^3 - 5x^2 - x + 1) : (x^2 - 3x + 1)$.
344. $(5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8) : (5x^2 + 4x + 4)$.
345. $(6x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 1) : (2x^2 + x - 1)$.

Найдите частное и остаток при делении $P(x)$ на $Q(x)$.

346. $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$; $Q(x) = x^2 - 1$.
347. $P(x) = x^3 - 5x^2 - 26x + 120$; $Q(x) = x + 2$.
348. $P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 1$; $Q(x) = x^2 - x - 1$.
349. $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1$; $Q(x) = x^2 + 2x + 2$.

Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $Q(x)$.

350. $P(x) = 4x^3 + x^2 - 3x + 2$; $Q(x) = x - 1$.
351. $P(x) = 3x^4 - 2x^3 - 9x - 14$; $Q(x) = x - 2$.
352. $P(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x + 1$; $Q(x) = x + 1$.

353. $P(x) = x^6 + x^4 - x^2 - 6;\ Q(x) = x^2 + 1.$

Сократите дробь.

354. $(x^3 + 5x^2 + 6x)/(x^3 + 6x^2 + 11x + 6).$

355. $(x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 20)/(x^3 - 5x^2 - x + 5).$

356. $(x^3 + 2x^2 - x - 2)/(x^4 - 9x^3 + 9x^2 + 41x - 42)$

357. $(4x^3 - 8x^2 + 3x - 6)/(12x^3 + 4x^2 + 9x + 3).$

Решите уравнения.

358. $x^3 - 3x - 2 = 0.$

359. $x^3 - 19x - 30 = 0.$

360. $x^3 + x^2 = 2x.$

361. $x^3 - 7x - 6 = 0.$

362. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$

363. $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0.$

364. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0.$

365. $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0.$

366. $x^3 + 5x^2 - 4x = 20.$

367. $x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = 0.$

368. $x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0.$

369. $x^3 - x^2 - 17x - 15 = 0.$

Решите уравнения.

370. $x^4 + x^3 + x^2 - x - 2 = 0.$

371. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = 0.$

372. $x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36 = 0.$

373. $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0.$

374. $4x^4 + 12x^3 + 5x^2 - 6x - 15 = 0.$

375. $2x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 7x - 6 = 0.$

376. $8x^4 + 8x^3 - x - 190 = 0.$

377. $2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18 = 0.$

378. $3x^4 - 13x^3 + 16x^2 - 13x + 3 = 0.$

379. $4x^4 + 12x^3 + 13x^2 + 12x + 9 = 0.$

380. $9x^4 + 24x^3 + 25x^2 + 24x + 16 = 0$.
381. $6x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 1 = 0$.

Решите уравнения.

382. $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$.
383. $x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 21x^2 - 10x - 24 = 0$.
384. $x^5 - 11x^4 + 29x^3 + 59x^2 - 342x + 360 = 0$.
385. $2x^5 + x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 8x + 4$.

Решите уравнения.

386. $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$.
387. $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$.
388. $(x + 1)^4 + x^2 + 2x + 1 = 0$.
389. $4/(x^2 + 3x + 2) - 8/(x^2 + 3x + 8) = 1$.
390. $x^2(x - 8)^2 - 2(x^2 - 8x) - 63 = 0$.
391. $7(x + 1/x) = 9 + 2(x^2 + 1/x^2)$.
392. $7(2x + 1/(2x)) - 2(4x^2 + 1/(4x^2)) = 9$.
393. $(x^8 + 3)^2 - 7(x^8 + 3) + 12 = 0$.
394. $(x^6 - 2)^2 + 3(x^6 - 2) + 2 = 0$.
395. $(2x^2 - x + 1)^2 - 2(2x^2 - x + 1) + 1 = 0$.
396. $(3x^2 + x - 1)^2 + 2(3x^2 + x - 1) = -125$.
397. $(x^2 - 7x + 13)^2 - (x - 3)(x - 4) = 1$.
398. $(x^2 - 9x + 21)^2 - (x - 4)(x - 5) - 1 = 0$.
399. $(x^2 + 6x - 5)^2 + 3(x + 8)(x - 2) + 23 = 0$.
400. $(x^2 - 6x + 4)^2 + 6(x - 8)(x + 2) + 125 = 0$.
401. $(x^2 + 3x + 2)/(x^2 + 4x + 3) = 9/(x + 3)$.
402. $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 120$.
403. $(x - 1)(x - 3)(x + 5)(x + 7) = 297$.
404. $(12x - 1)(6x - 1)(4x - 1)(3x - 1) = 5$.
405. $(6x - 1)(8x - 1)(12x - 1)(24x - 1) = 5$.
406. $(x - 1)^6 + (x - 5)^6 = 128$.
407. $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16$.
408. $(x + 1)^4 + (x + 7)^4 = 162$.

409. $(x + 2)^4 + x^4 = 82$.

410. $(x - 1)^5 + (x + 3)^5 = 242(x + 1)$.

411. $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1)$.

412. Решите уравнение $x^3 - x^2 - 8x + a = 0$, если известно, что один из его корней равен 2.

413. Решите уравнение $x^3 - 5x^2 + ax + 8 = 0$, если известно, что один из его корней равен 4.

414. Найдите a и решите уравнение, если известно, что один из корней уравнения
$$6x^3 + 2(a - 9)x^2 - 3(2a - 1)x + a = 0$$
равен $\frac{1}{3}$.

415. Многочлен $P(x) = 2x^3 + x^2 + ax + b$ при делении на $x + 1$ дает остаток 18, а на $x - 2$ делится без остатка. Найдите корни многочлена.

416. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ при делении на $x + 1$ и на $x + 2$ дает остаток 12. Один из корней многочлена $P(x)$ равен 1. Найдите остальные корни многочлена.

417. Может ли многочлен $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1$ принимать отрицательные значения?

418. Докажите, что уравнение
$$x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$$
не имеет отрицательных корней.

419. Докажите, что уравнение
$$x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9 = 0$$
не имеет отрицательных корней.

420. Докажите, что многочлен $x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1$ не принимает отрицательных значений.

421. Докажите, что значение выражения
$$n^5 - 5n^3 + 4n$$
делится на 120 при любых натуральных n.

422. Докажите, что не существует целых коэффициентов a, b, c и d, таких, что значение многочлена

$ax^3 + bx^2 + cx + d$ равно 1 при $x = 19$ и равно 2 при $x = 62$.

423. Выясните, имеет ли уравнение

$$4x^3 - 5x^2 - 6x + 3 = 0$$

корни, удовлетворяющие неравенству $x \geq 2$.

424. Докажите, что многочлен с положительными коэффициентами не может иметь положительных корней.

425. Докажите, что число 1 является корнем многочлена тогда и только тогда, когда сумма его коэффициентов равна нулю.

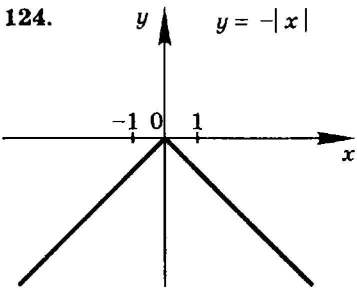
426. Для того чтобы число -1 являлось корнем многочлена, необходимо и достаточно, чтобы сумма его коэффициентов, стоящих на четных местах, равнялась сумме коэффициентов, стоящих на нечетных местах. Докажите.

ОТВЕТЫ

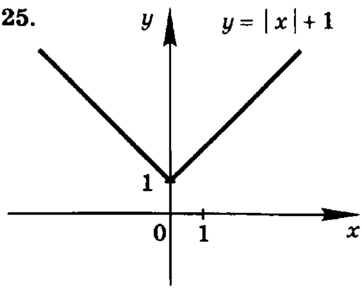
1. $-4;\ 4$.
2. Решений нет.
3. $(-\infty;\ 0]$.
4. Решений нет.
5. $-2;\ 4$.
6. 1 и $\frac{7}{3}$.
7. 4.
8. 4.
9. 5.
10. 3.
11. $\frac{7}{5}$.
12. $2{,}5$.
13. -5 и 2.
14. $-0{,}25$.
15. $-0{,}5$.
16. $7{,}5$.
17. $-\frac{1}{3}$ и 3.
18. $-5;\ -1$.
19. $-5;\ 6$.
20. $[-2;\ 4]$.
21. $[3;\ +\infty)$.
22. $[4;\ +\infty)$.
23. -3.
24. Решений нет.
25. -1.
26. $\frac{5}{3}$ и 7.
27. $4{,}5$.
28. $-0{,}25$.
29. -5.
30. $(-\infty;\ -3]$.
31. Корней нет.
32. 1.
33. 1.
34. $[0{,}5;\ 3]$.
35. -22 и 6.
36. $-\frac{41}{6}$ и $\frac{47}{6}$.
37. -4 и 2.
38. -2.
39. $\frac{11}{3}$.
40. $-3;\ -1;\ 1;\ 3$.
41. -2 и 4.
42. $-3;\ 5$.
43. 1.
44. $-5;\ -1;\ 1;\ 5$.
45. $-4;\ -3;\ 3;\ 4$.
46. $-1;\ 1$.
47. $-4;\ 4$.
48. $0;\ 7$.
49. -1.
50. -2.
51. $-1;\ 2;\ 3;\ 6$.
52. $-3;\ 2$.
53. $0;\ 1$.
54. $-5;\ 1$.
55. $[-3;\ -2];\ [2;\ 3]$.
56. $[-1;\ 1]$.
57. 1.
58. $-4;\ 10$.
59. $-1;\ 3;\ 7$.
60. $-5;\ 1$.

61. $-4; 0; 4; 8.$
62. $7.$
63. $0.$
64. $(0; 1).$
65. $(-5; 2); (-2; -1).$
66. $(2; 3).$
67. $(0; -1).$
68. $(0; 3); (4; 1).$
69. $\left(\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right); \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right).$
70. $\left(-\frac{11}{19}; \frac{23}{19}\right); (1; -1).$
71. $(3; 2); (-5; 2).$
72. $(3; 1); (1; 3); (-3; -1); (-1; -3).$
73. $\left(\frac{7}{4}; \frac{3}{4}\right).$
74. $\left(\frac{11}{2}; -\frac{5}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right).$
75. $(6; -1); (1; -6); (-1; 6); (-6; 1).$
76. $(-3; 4); (1; 0); (3; -4); (-1; 0).$
77. $(-3; -5); (5; 3); (-5; -3); (3; 5).$
78. $(-8; -6); (8; 2); (8; 6); (-8; -2).$
79. $(5; -4); (-1; 2); (-11; 8); (-1; -2).$
80. $(4; -8); (-4; 8); (8; -22); (-2; -2).$
81. $(-3; 3).$
82. Решений нет.
83. $(-\infty; -2); (2; +\infty).$
84. x — любое действительное число.
85. $(-1; 3).$
86. $(-\infty; -2); (4; +\infty).$
87. $(-\infty; -3); (6; +\infty).$
88. $(-1/3; +\infty).$
89. $(-\infty; \frac{3}{2}).$
90. $[0; 3].$
91. $(-3; 1).$
92. $[-1; +\infty).$
93. $(-2; 2).$
94. Решений нет.
95. $(-\infty; \frac{1}{3}); (9; +\infty).$
96. $[-\frac{1}{2}; +\infty).$
97. $(-\infty; -2]; \{2\}.$
98. $(-\infty; 3); (7; +\infty).$
99. $(4,5; +\infty).$
100. $(-\infty; +\infty).$
101. $(-\infty; -\frac{3}{2}).$
102. $(-1; 2); (3; 6).$
103. $(1; 3).$
104. $(2; 5).$
105. $(-\infty; -2); (-1; 1); (2; +\infty).$
106. $(-2; 0); (0; 4).$
107. $(1; 5).$
108. $(-\infty; -1); (2; +\infty).$
109. $(-\infty; -2); (3; 4).$
110. $(1; 3).$
111. $(0; +\infty).$
112. $[-1; 5].$
113. $[0; 1,6]; [2,5; +\infty).$
114. $(-\infty; -4); (1; 2).$
115. $(-7; -2); (3; 4).$
116. $(2; 3); (3; +\infty).$
117. $(-3; -2); (-2; +\infty).$
118. $(-\infty; 4).$
119. $(-\infty; \frac{1}{4}).$
120. $(2; 3).$
121. $[1,5; 2).$
122. $(-\infty; -2); (-1; +\infty).$
123. $(-\infty; 3).$

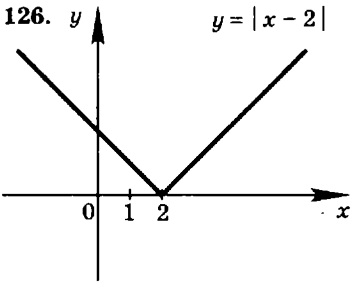
124.



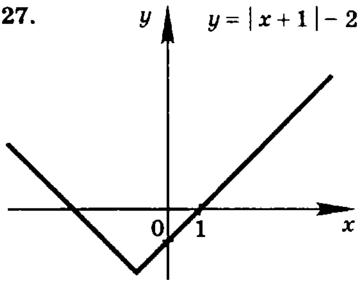
125.



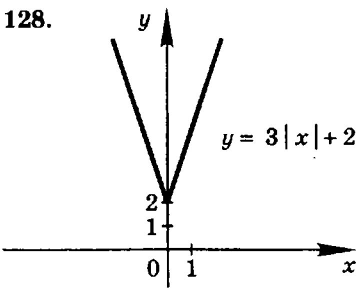
126.



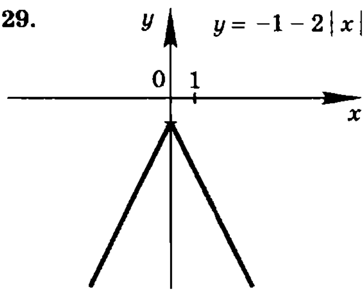
127.



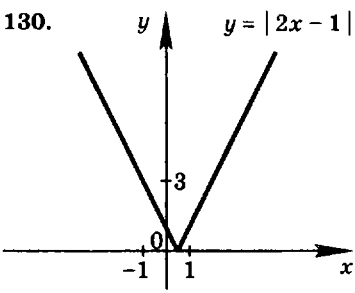
128.



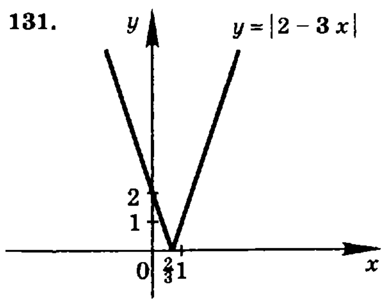
129.



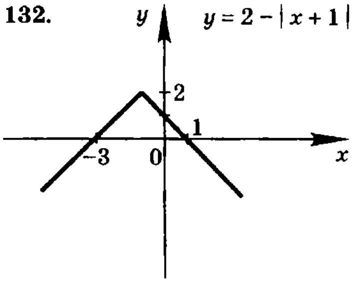
130.



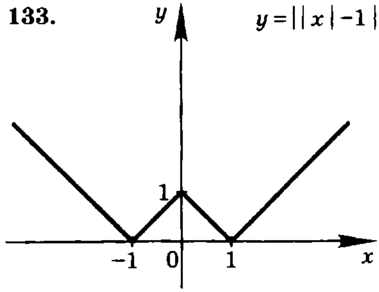
131.



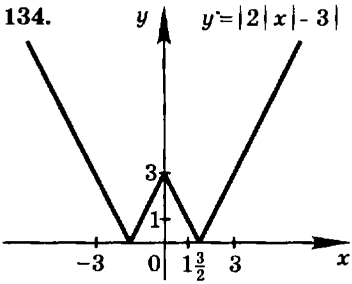
132.



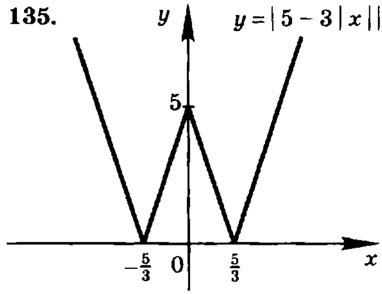
133.



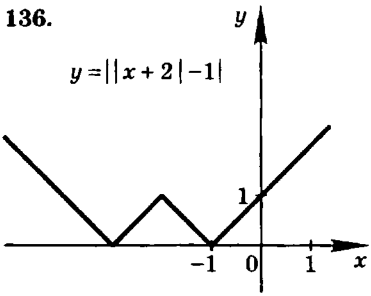
134.



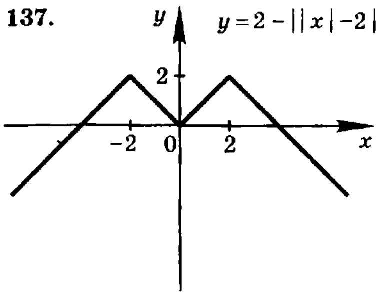
135.



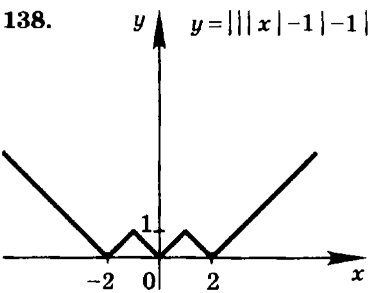
136.



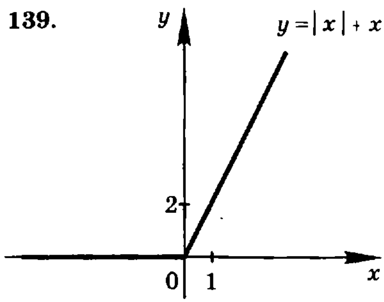
137.



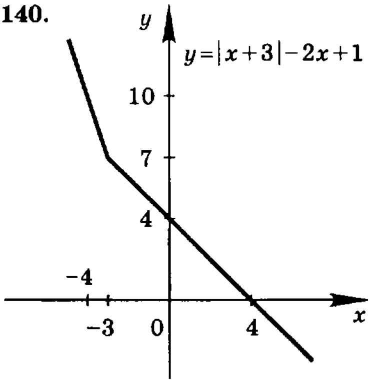
138.



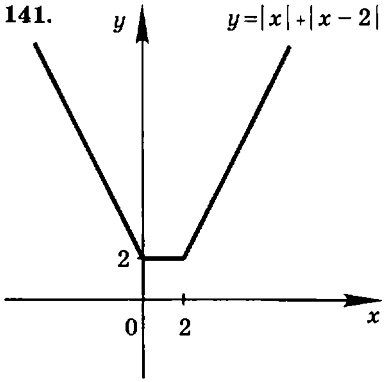
139.



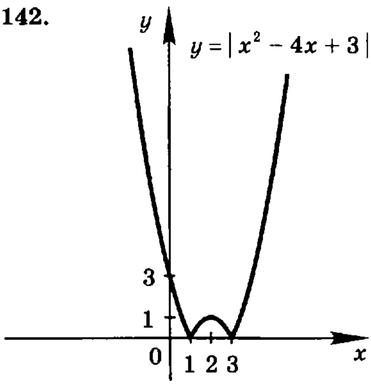
140.



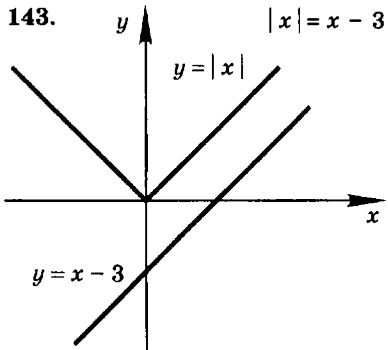
141.



142.

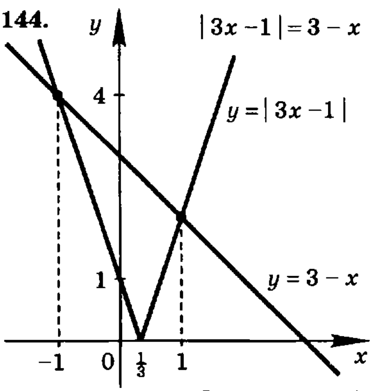


143.



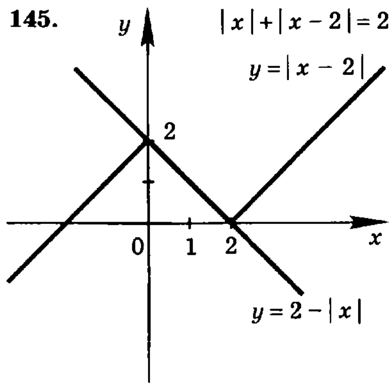
Решений нет.

144.



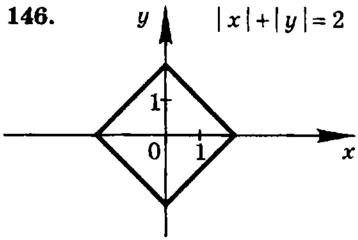
Ответ: 1; −1.

145.

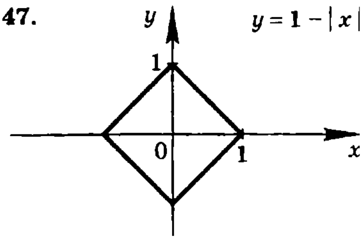


Ответ: [0; 2].

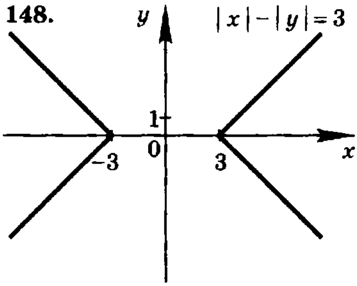
146.



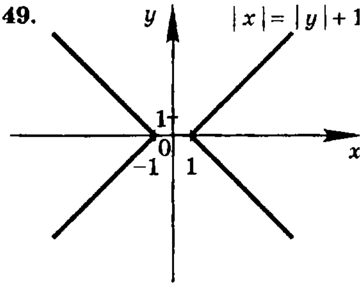
147.



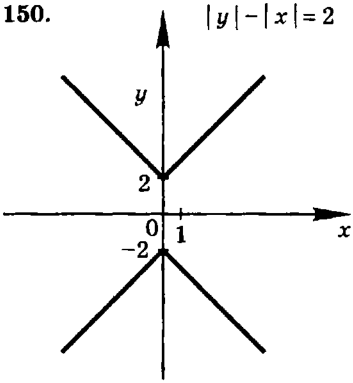
148.



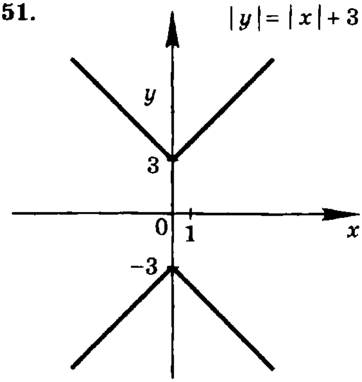
149.



150.



151.



152. x — любое действительное число.

153. При $a = 0$ решений нет; при a, не равном 0, x — любое действительное число.

154. При $a = 0$ решений нет; при a, не равном 0, $x = \frac{2}{a}$.

155. При $a = 1$ решений нет; при a, не равном 1, $x = \frac{1}{a-1}$.

156. При $a = -2$ решений нет; при a, не равном -2, $x = \frac{3a}{a+2}$.

157. При $a = -1$ решений нет; при a, не равном -1, $x = \frac{a-1}{a+1}$.

158. При $a = 0$ x — любое число; при a, не равном 0, $x = a + 1$.

159. При $a = 0$ x — любое число; при $a = -1$ решений нет; при a, не равном 0 и не равном -1, $x = \frac{a-4}{a+1}$.

160. При $a = 1$ x — любое число; при a, не равном 1, $x = a-5$.

161. При $a = 1$ решений нет; при $a = -1$ x — любое число; при a, не равном 1 и -1, $x = \frac{1}{a-1}$.

162. При a, не равном 0 и не равном 1, $x = \frac{2}{a}$; при $a = 0$ решений нет; при $a = 1$ x — любое число.

163. При $a = 1$ решений нет; при $a = -1$ x — любое число; при a, не равном 1 и -1, $x = \frac{a+2}{a-1}$.

164. 1.

165. 1.

166. 1.

167. 2.

168. -1.

169. 0.

170. $\frac{1}{2}$.

171. 0 и -1.

172. $\frac{3}{2}$.

173. -1.

174. 2; -5.

175. 1.

176. При $a > 0$ — два; при $a = 0$ — одно; при $a < 0$ решений нет.

177. При $a = 0$ один корень; при $a > 0$ два корня; при $a < 0$ корней нет.

178. При $a = -7$ один корень; при $a > -7$ два корня; при $a < -7$ корней нет.

179. При $a > 0$ $x = \frac{2a}{3}$; при $a \le 0$ $x = 0$.

180. $a > 1$.

181. $a < -1$.

182. (11; 16).

183. $k = 0{,}5$; $b = 3{,}5$.

184. $0 < a < 1$.

185. 1; 4.

186. -1.

187. 4.

188. [2; 4).

189. -16.

190. 3.

191. 1.

192. 1.

193. 4.

194. -2; 1.

195. -6.

196. 4.

197. $\frac{9}{4}$.

198. $(-1; -\frac{1}{2})$ и $(-\frac{1}{2}; 0)$.

199. -16; -8.

200. 0; 1.

201. (0; 1).

202. -2; 1.

203. -50.

204. $-\frac{22}{3}$; 2.

205. 4.

206. $(\frac{1}{4}; +\infty)$.
207. $(-\infty; -\frac{1}{7})$ и $(1; +\infty)$.
208. (2; 4).
209. 3.
210. –2; 1.
211. –4.
212. $-\frac{3}{2}$; 6.
213. 2; $\frac{9}{2}$.
214. –4; 4.
215. 10; –10.
216. (–6; 3).
217. –4; –3; 3; 4.
218. $p=-2$; $q=15$.
219. $p=q=0$ или $p=1$; $q=-2$.
220. $a>4$.
221. 8.
222. –3.
223. $\frac{3}{2}$; $-\frac{5}{2}$.
224. $x^2+7x-30=0$.
225. –6,75.
226. –5; 5.
227. –50; 50.
228. –3; 23.
229. –2.
230. 0.
231. 2.
232. При $a>0$ и $a=-1$ два корня; при $a=0$ три корня; при $-1<a<0$ четыре корня; при $a<-1$ нет корней.
233. При $a=0$ и $a>4$ два корня; при $a=4$ три корня; при $0<a<4$ четыре корня; при $a<0$ нет корней.
234. При $a=0$ один корень; при $-8<a<0$ два корня; при $a=-8$ три корня; при $a<-8$ четыре корня; при $a>0$ нет корней.
235. 0.
236. –1; 1.
237. $-\frac{17}{3}$; 1.
238. $(-\infty; -2)$ и $(0; +\infty)$.
239. $(\frac{4}{7}; 1)$.
240. $\frac{1}{3}$.
241. $a=1$.
242. $a=3$.
243. $x_1^2+x_2^2=(a^2+12a+6)/9$.
244. $\left(\frac{2}{3}; 1\right]\cup\left[2; +\infty\right)$.
245. 6.
246. 7; –7.
247. $\frac{3}{2}$; 3.
248. –13.
249. 0.
250. 2.
251. $\frac{1}{2}$; 1.
252. –2.
253. $2<a\le\frac{9}{4}$.
254. $[3; \frac{15}{4}]$.
255. $a=3$; $b=-36$; $c=96$.
256. $a=6$; корни первого уравнения 2 и 3; корни второго уравнения 3 и 4.
257. При $a<3$ нет решений; при $a=3$ одно решение; при $a>3$ два решения.

258. При $a < 0$ нет решений; при $a = 0$ четыре решений; при $0 < a < 2$ восемь решений; при $a = 2$ пять решений; при $a > 2$ два решения.

259. При $a < 0$ нет решений; при $a = 0$ четыре решения; при $0 < a < 3$ восемь решений; при $a = 3$ шесть решений; при $3 < a < 6$ четыре решения; при $a = 6$ три решения; при $a > 6$ два решения.

260. –5. **261.** 5. **262.** 5.

263. –3. **264.** 2. **265.** –2.

266. (–2; 2); (2; 4). **267.** –7. **268.** (–2; 2); (2; 4).

269. $a \geq -\frac{1}{2}$. **270.** $a \leq 1$.

271. При $a = 0$ x — любое действительное число; при $a < 0$ $x > \frac{1}{a}$; при $a > 0$ $x < \frac{1}{a}$.

272. При $a > 0$ $x > \frac{1}{a}$; при $a = 0$ решений нет; при $a < 0$ $x < \frac{1}{a}$.

273. При $a > 1$ $x < a + 1$; при $a = 1$ решений нет; при $a < 1$ $x > a + 1$.

274. При $a < 5$ $x > \frac{a-3}{5-a}$; при $a = 5$ решений нет; при $a > 5$ $x < \frac{a-3}{5-a}$.

275. При $p > 2$ $x < \frac{8}{p-2}$; при $p = 2$ любое действительное число; при $p < 2$ $x > \frac{8}{p-2}$.

276. При a неравном 3 $x > \frac{a+3}{(a-3)^2}$; при $a = 3$ решений нет.

277. При a неравном 2 $x > \frac{a+2}{(a-2)^2}$; при $a = 2$ решений нет.

278. При $a = 2$. **279.** При $b = 3$.

280. При $a > -\frac{1}{2}$ $x < -\frac{1}{2}$ и $x \geq a$; при $a = -\frac{1}{2}$ x — любое число, не равное $-\frac{1}{2}$; при $a < -\frac{1}{2}$ $x > -\frac{1}{2}$ и $x \leq a$.

281. При $a < 0{,}6$ $a < x \leq 0{,}6$; при $a = 0{,}6$ решений нет; при $a > 0{,}6$ $0{,}6 \leq x < a$.

282. При $a \in (-\infty; -2) \cup (-\frac{3}{2}; +\infty)$ $x < \frac{a(a+2)}{2a+3}$; при $a \in (-2; -\frac{3}{2})$ $x > \frac{a(a+2)}{2a+3}$; при $a = -\frac{3}{2}$ нет решений.

283. При $a \in (4; \frac{13}{3})$ $x \in [\frac{2a(a-4)}{3a-13}; +\infty)$; при $a \in (-\infty; 4) \cup (\frac{13}{3}; +\infty)$ $x \in (-\infty; \frac{2a(a-4)}{3a-13}]$; при $a = \frac{13}{3}$ x — любое действительное число.

284. При $a \leq 0$: $(-\infty; \frac{2}{2-a}]$; при $0 < a < 1$: $[-\frac{2}{a}; \frac{2}{2-a}]$ и $[\frac{2}{a}; +\infty)$; при $a \geq 1$: $[-\frac{2}{a}; +\infty)$. Решать графически.

285. При $a \in (-\infty; 0)$ $x \in (-\infty; -\frac{a}{6}) \cup (-\frac{a}{4}; +\infty)$; при $a = 0$ $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; при $a \in (0; +\infty)$ $x \in (-\infty; -\frac{a}{4}) \cup (\frac{a}{6}; +\infty)$.

286. При $a \le 0$: $[\frac{1}{2-a}; +\infty)$; при $0 < a < \frac{3}{2}$: $(-\infty; -\frac{3}{a}] \cup [\frac{1}{2-a}; \frac{3}{a}]$; при $a = \frac{3}{2}$: $(-\infty; -2] \cup \{2\}$; при $\frac{3}{2} < a \le 3$: $(-\infty; -\frac{3}{a}]$; при $a \ge 3$: $(-\infty; \frac{1}{2-a}]$.

287. При $a \le 0$: $[\frac{a}{2-a}; +\infty)$; при $0 < a < 1$: $(-\infty; -1-\frac{2}{a}] \cup [\frac{a}{2-a}; \frac{2-a}{a}]$; при $a = 1$: $(-\infty; -3] \cup \{1\}$; при $a > 1$: $(-\infty; -1-\frac{2}{a}]$.

288. При $a \le -2$: $(-\infty; 1+\frac{2}{a}]$; при $-2 < a < -1$: $[\frac{a}{a+2}; \frac{2}{a}+1]$; при $a = -1$: $\{-1\}$; при $-1 < a \le 2$: решений нет; при $a > 2$: $[\frac{a}{a-2}; +\infty)$.

289. $a \le -1$.

290. $(-3; 5)$.

291. $[0; \frac{1}{2})$.

292. 3.

293. $(-\infty; -6)$.

294. $(\frac{5}{3}; +\infty)$.

295. 5.

296. $(1; +\infty)$.

297. -2.

298. -1.

299. -1; 0.

300. $[1; +\infty)$.

301. $[1; +\infty)$.

302. $-4x^2$.

303. $8x^3 + 8x$.

304. $2x^3 - 6x^2 + 30x - 26$.

305. $x^3 + 6x^2 - 5$.

306. 7.

307. 36.

308. 0.

309. 0.

310. -182.

311. 25.

312. -2.

313. 35.

314. 1 — корень.

315. Да.

316. 1; 3.

317. -2; 3.

318. Целые корни: -2, 1, 2. Разложение на множители: $(x+1)(x-2)(x+2)$.

319. Целые корни: -1; 1. Разложение на множители: $(x-1)(x+1)(2x-1)$.

320. Целые корни: 1, 2. Разложение на множители: $(x-1)(x-2)(x^2+1)$.

321. Целый корень: 3. Разложение на множители: $(x-3)(3x-1)(x^2+1)$.

322. -3; -1; 2.

323. -1; $-\frac{1}{2}$; 1.

324. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$.

325. $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$.

326. $(2x-1)(2x-1)(2x+1)(x+2)$.

327. $(2x+1)(2x-1)(x+1)(4x-1)$.

328. $(3x-1)(2x+1)(x+1)(x+2)$.

329. $(x-1)^3(x+1)^3$.

330. $a^2 + a - 3a - 3 = a(a + 1) - 3(a + 1) = (a + 1)(a - 3)$.
331. $(a^3 - 8) + (a^2 - 4) = (a - 2)(a^2 + 3a + 6)$.
332. $(x^3 - 1) - 7x + 7 = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$.
333. $(x - 1)(x^2 + x + 7)$.
334. $(n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$.
335. $(n^2 + 1)^2 - n^2 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$.
336. $(a^5 + a^4 + a^3) - (a^4 + a^3 + a^2) + (a^2 + a + 1) = (a^3 - a^2 + 1)(a^2 + a + 1)$.
337. $(a^5 - a) - (a^2 + 1) = a(a^4 - 1) - (a^2 + 1) = (a^2 + 1)(a^3 - a - 1)$.
338. $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$.
339. $(x^3)^3 + 1 = (x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)(x^6 - x^3 + 1)$.
340. $(x^8 + 2x^4 + 1) - x^4 = (x^4 + 1)^2 - (x^2)^2 = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) =$
$= ((x^2 + 1)^2 - x^2)(x^4 - x^2 + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$.
341. $x^8 - 1 + x^4 - 1 = (x^4 - 1)(x^4 + 1) + (x^4 - 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 2)$.
342. $3x^2 - x + 6$.
343. $2x + 1$.
344. $x^2 + x - 2$.
345. $3x^2 - 2x - 1$.
346. Частное $x + 6$, остаток $12x + 12$.
347. Частное $x^2 - 7x - 12$, остаток 144.
348. Частное $2x + 1$, остаток $7x$.
349. Частное $x^2 - 3x + 6$, остаток $-5x - 11$.
350. 4.
351. 0.
352. 1.
353. –5.
354. $\frac{x}{x+1}$.
355. $\frac{x^2-4x+4}{x-1}$.
356. $\frac{x+1}{x^2-10x+21}$.
357. $\frac{x-2}{3x+1}$.
358. –1; 2.
359. –2; –3; 5.
360. –2; 0; 1.
361. –2; –1; 3.
362. –1.
363. –2; –1; 2.
364. –2; 2; 3.
365. –3; –2; 3.
366. –5; –2; 2.
367. –3; 3; 6.
368. –2.
369. –3; –1; 5.
370. –1; 1.
371. –1; 2.
372. –3; 2.
373. –1; 1; 2; 4.
374. –2,5; 1.
375. –3; 0,5.
376. –2,5; 2.
377. –1,5; 1; 2; 3.
378. $\frac{1}{3}$; 3.
379. –1,5.
380. $-\frac{4}{3}$.
381. -1; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; 1.
382. –1.
383. –4; –2; 3.

384. -3; 2; 3; 4; 5.

385. -2; -1; $-\frac{1}{2}$; 1; 2.

386. 1; -2.

387. -2; -1; 1; 2.

388. -1.

389. -3; 0.

390. -1; 1; 7; 9.

391. 0,5; 2.

392. 0,25; 1.

393. -1; 0; 1.

394. -1; 0; 1.

395. 0; $\frac{1}{2}$.

396. Нет решений.

397. 3; 4.

398. 4; 5.

399. -7; -6; 0; 1.

400. 1; 3; 5.

401. 7.

402. -5; 2.

403. -8; 4.

404. $-\frac{1}{12}$; $\frac{1}{2}$.

405. $-\frac{1}{24}$; $\frac{1}{4}$.

406. 3.

407. -5; -3.

408. -4.

409. -3; 1.

410. -2; -1; 0.

411. -1; $-0,5$; 2; 4.

412. -3; 2.

413. -1; 2; 4.

414. $a=-1$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3\pm\sqrt{7}}{2}$.

415. 0,5; 2; -3.

416. -3; 2.

417. Нет.

418. Преобразуем левую часть уравнения:

$$x^4 - 4x^2 + 4 - (5x^3 + 7x) = (x^2 - 2)^2 - x(5x^2 + 7).$$

Чтобы данное уравнение имело хотя бы один отрицательный корень, необходимо $(x^2-2)^2 = x(5x^2+7)$, где $x < 0$ быть не может.

419. Преобразуем левую часть уравнения: $(x^2 - 3)^2 - x(4x^2 + 3)$. Должно быть справедливо равенство $(x^2 - 3)^2 = x(4x^2 + 3)$. При $x < 0$ левая часть — отрицательна, а правая — положительна, чего быть не может.

420. $(x^8 - 2x^4 + 1) + (x^6 - 2x^4 + x^2) = (x^4 - 1)^2 + (x^3 - x)^2$. Так как каждое из двух слагаемых полученной суммы неотрицательно, то утверждение доказано.

421. $n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2 - 4)(n^2 - 1) = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$. Мы получили произведение пяти последовательных натуральных чисел, которое всегда кратно 120, т. к. $120 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$.

422. Составить систему уравнений для заданных числовых значений. Получаем $a(x_1^3 - x_2^3) + b(x_1^2 - x_2^2) + c(x_1 - x_2) = A - B$. Для целых a, b, c, x_1, x_2, A, B выражение $A - B$ всегда кратно $x_1 - x_2$. Подставив $x_1 = 62$, $x_2 = 19$, $A = 2$, $B = 1$, получим, что $A - B$ не делится на $x_1 - x_2$.

423. Нет.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

МОДУЛИ

Элективный курс «Модули» рассчитан на 12 часов. Этот курс может быть предложен учащимся 8 или 9 класса в рамках предпрофильной подготовки.

Целью данного курса является изучение различных методов решения уравнений и неравенств с модулями, а также построение графиков функций и графиков уравнений с модулями.

Содержание курса:

	Тема	*Часы*
1	Определение модуля, его геометрический смысл	1
2	Основные свойства модуля	1
3	Решение уравнений с модулями	3
4	Решение неравенств с модулями	3
5	Построение графиков функций с модулями	2
6	Построение графиков уравнений с модулями	2

ПАРАМЕТРЫ

Элективный курс «Параметры» рассчитан на 12 часов. Этот курс может быть предложен учащимся 8 или 9 класса в рамках предпрофильной подготовки.

Целью данного курса является изучение свойств линейных и квадратных уравнений и неравенств с параметрами. Рассматриваются методы решения простейших параметрических уравнений и неравенств.

Содержание курса:

	Тема	*Часы*
1	Параметры в уравнениях	1
2	Решение линейных уравнений с параметрами	2
3	Решение квадратных уравнений с параметрами	3
4	Параметры в неравенствах	1
5	Решение линейных неравенств с параметрами	2
6	Решение квадратных неравенств с параметрами	3

МНОГОЧЛЕНЫ

Элективный курс «Многочлены» рассчитан на 12 часов. Этот курс может быть предложен учащимся 8 или 9 класса в рамках предпрофильной подготовки.

Целью данного курса является изучение свойств многочленов, рассматриваются действия с многочленами, различные методы решения уравнений с многочленами, изучается схема Горнера и теорема Безу.

Содержание курса:

	Тема	*Часы*
1	Стандартный вид многочлена, степень многочлена	1
2	Значение многочлена, схема Горнера	2
3	Целые корни многочлена	2
4	Рациональные корни многочлена	2
5	Деление многочленов	2
6	Теорема Безу, разложение многочленов на множители	3

Содержание

Модули 3

Параметры 20

Многочлены 41

Ответы 55

Методические указания 67