ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ НА ЕГЭ–2017

А.С. Зеленский, к.ф.-м.н., ст.н.с.,
МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва),
e-mail: asz1956@yandex.ru
И.И. Панфилов,
ГБОУ СОШ № 2086 (25) (Москва),
e-mail: panfilovi@list.ru
Е.А. Панфилова,
ГБОУ СОШ № 1018 (Москва),
e-mail: panfilena77@mail.ru

A.S. Zelenskiy, Ph.D., senior research ass,
Lomonosov MSU (Moscow),
e-mail: asz1956@yandex.ru
I.I. Panfilov,
GOU School 2086 (25) (Moscow),
e-mail: panfilovi@list.ru
E.A. Panfilova,
GOU School 1018 (Moscow),
e-mail: panfilena77@mail.ru

Ключевые слова: ЕГЭ, задачи с параметром, различные способы решения.

Keywords: EGE, tasks with a parameter, different ways of solving.

Аннотация: анализируются особенности прошедшего ЕГЭ и, в частности, рассматриваются задачи 18 из вариантов ЕГЭ 2017 года. Приводятся различные способы их решения и рекомендации для учителей и учащихся. Даётся подборка задач, которая может стать основой для серии школьных уроков по подготовке к решению задач с параметрами.

Annotation: the features of the last EGE are analyzed and, in particular, the tasks with a parameter from the variants of exams-2017 are considered. Various ways to solve them and recommendations for teachers and students are given. A selection of tasks that can become the basis for a series of school lessons on preparing for solving problems with parameters is given.

Обнадёживающие тенденции ЕГЭ-2017

Очень часто программа работы школьных учителей математики в выпускном классе определяется не столько регламентирующими материалами вышестоящих инстанций, сколько содержанием предстоящего Единого государственного экзамена. Обычно учителя экономят время на тех разделах, в которых не видят прямой «пользы» для ЕГЭ, и, наоборот, подробнее останавливаются на тех тематических заданиях, которые максимально приближены к задачам экзамена. Этот прагматичный подход современной школы общеизвестен, и его-то как раз и относят к одному из главных недостатков ЕГЭ, так как говорить о полноценном математическом образовании в этих условиях нельзя – его уровень неуклонно снижается, что бы ни говорили руководители различного ранга в своих речах и отчётах.

Эту тенденцию переломить не удаётся и вряд ли удастся (пока существует ЕГЭ в его нынешней форме), а значит, на составителей экзаменационных заданий ложится большая ответственность, так как выходит, что именно они определяют вектор математического развития школьников. И когда, например, мы с горечью отмечаем, что школьная геометрия неуклонно деградирует, то одна из причин этого – уровень геометрических задач в ЕГЭ. Мы имеем в виду не простые задачи из первой части, а задачи 14 и 16. Эти задачи в предыдущие годы из-за сложности, на порядок более высокой по сравнению с другими задачами варианта, отнимали столько сил у школьников, что многие из них уже не смогли справиться с вполне приемлемыми следующими задачами. Когда у ученика (среднего уровня и выше) не получается пробиться через пункт а) задачи 14, которую он при подготовке всегда решал, это парализует его действия и в части б) этой задачи. Если к этому добавляются проблемы с пунктом а) задачи 16 (который он также почти всегда решал и на этот пункт очень рассчитывал), то эмоционально этот учащийся оказывается крайне истощенным, что в результате сказывается на качестве решения всего варианта. В этой ситуации в выигрышном положении оказывались те, кто при подготовке к ЕГЭ полностью игнорировал геометрию и рассчитывал только на успехи в алгебре. Их «правоту» неявно подтвердил и И.А. Ященко, когда, выступая на семинаре в МГУ перед учителями, сказал, что в 2015 г. планиметрическую задачу решил примерно 1 человек из 500...

В итоге после таких экзаменов многие из школьников и даже учителей постепенно отвернулись от планиметрии. Да и на стереометрию, которую освоить намного тяжелее, чем, например, логарифмы, многие махнули рукой. И только надежда на то, что задачи по геометрии как-то изменят, не позволила некоторым учителям полностью скатиться на путь геометрического нигилизма и формального (чаще всего ускоренного) изложения этого раздела математики.

Экзамен 2017 года показал наличие обнадёживающей тенденции. Пункт а) в геометрических задачах был «решаемым», что давало возможность школьникам заработать дополнительные баллы даже без правильного решения второго пункта. Более того, в этом году и задача 14, и задача 16 были составлены так, что учащийся мог не справиться с первым пунктом, но, используя информацию из него, мог произвести расчёты в пункте б). В этом случае за счёт геометрии ему удавалось улучшить свой результат (раньше это тоже было, но сложность задачи в реальности эту возможность блокировала). При сохранении такой тенденции есть шанс, что в старших классах учителя опять, наряду со стереометрией, будут уделять внимание и планиметрии, повышая, тем самым, общий математический уровень школьников. Этому же способствовало бы и давно, на наш взгляд, назревшее повышение оценки за стереометрическую задачу с 2-х до 3-х баллов.

Ещё одна особенность экзамена 2017 года: раньше в разных вариантах школьникам предлагались похожие задачи, отличающиеся, по сути, только числами. Сейчас впервые были предложены разные задачи. Несмотря на то, что эти задачи порой были не вполне равнозначны по трудности, этот подход нам представляется позитивным. Это важно, опять же, с точки зрения будущего. Ведь не секрет, что часть учителей думают так: вот вчера и сегодня была задача такого-то типа (например, в экономическом блоке задача на дифференцированный платеж), значит, завтра этой задачи точно не будет, зачем на неё тратить много времени, лучше позубрить что-нибудь другое, чего уже давно не было. Это сужает и без того уже серьёзно сокращённый объём изучаемого материала, снижая математическую эрудицию школьника до уровня «натасканности» на определённые типы задач.

По нашему мнению, положительной является также тенденция, которую составители вариантов ЕГЭ демонстрируют в номинации «Задача с параметром» (задача 18). Мы хотели бы остановиться подробнее именно на этих задачах, показав заинтересованным учителям подходы к их изложению в классе, а также их связь с основным алгебраическим материалом, изучаемым в средней школе.

Задача с параметром на ЕГЭ-2017

Задачи с параметром на ЕГЭ стали подбираться так, что они являются непосредственным продолжением, обобщением и углублением соответствующих алгебраических задач, которые изучаются в средней школе. Причём усложнение в решении этих задач не является чрезмерным, как это было в предыдущие годы [1–3], а потому задачи оказываются вполне приемлемыми для освоения многими интересующимися математикой школьниками, а также вполне доступными для изложения их учителями на занятиях.

Перед тем, как рассмотреть задачи из ЕГЭ-2017, напомним задачу 2016 года – она, на наш взгляд, концептуально совпадает с задачами этого года.

Задача 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$ имеет ровно три различных корня.

Решение. Сразу же замечаем, что исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2+ax+1\geq 0 \\ 3x^2+2ax+1=(x^2+ax+1)^2. \end{cases}$$

Обратим внимание на первое неравенство системы – это условие возведения в квадрат иррационального уравнения, не допускающее появления посторонних корней. Именно оно является важнейшим условием равносильного преобразования, а не ОДЗ, как некоторые (даже, увы, многие!) ошибочно считают. Таким образом, акцент в начале решения сделан не на умении работать с параметрами, а на умении грамотно решать иррациональные уравнения.

Удивительно, но главное уже сделано! Далее нужно правильно возвести в квадрат правую часть уравнения. При осуществлении этой процедуры, конечно, выиграли те, кто хоть раз в жизни встречался с формулой возведения в квадрат трёхчлена. Остальные, а таких было большинство, перемножали и, в зависимости от способности аккуратно выполнять арифметические операции, дошли или не дошли до уравнения $3x^2+2ax+1=x^4+a^2x^2+1+2ax^3+2x^2+2ax \Leftrightarrow x^2(x^2+2ax+a^2-1)=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2((x+a)^2-1)=0$. Получаются корни: 0 и $x+a=\pm 1$.

Осталось только финишировать: эти три корня будут тремя корнями исходного уравнения тогда и только тогда, когда все они удовлетворяют неравенству $x^2+ax+1\geq 0$ и не равны между собой. Это уже дело техники – пересекаем решения полученных трёх неравенств и из этого множества исключаем случаи совпадения корней: $1\geq 0$; $a\geq -2$; $a\leq 2$; $-a+1\neq 0$; $-a-1\neq 0$.

Ответ: $a\in[-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2]$.

Как мы видим, в решении всё просто, нет никаких особых «фокусов», не нужно, чтобы где-то экзаменуемого «осенило». Но нужны аккуратность в выкладках и – главное – чёткая логика рассуждений. Поэтому неподготовленный ученик эту задачу никак не осилит, успеха здесь достигнет только математически грамотный школьник.

Примерно этим же характеризуются и задачи 2017 года (задачи 2–5 этой статьи).

Задача 2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x-2}\cdot\ln(x^2-4x+5-a^2)=0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 2]$.

Решение. *Способ* 1. В самом начале отметим основные особенности, которые содержит это уравнение. Левая его часть представляет из себя произведение двух множителей, каждый из которых имеет свои собственные ограничения помимо тех, которые диктуются условиями задачи. В задачах с параметром эти ограничения желательно учитывать сразу, выписывая соответствующие решения, а не откладывать эту процедуру на потом, как часто делают ученики, пересекая полученные решения с ОДЗ перед тем, как написать ответ. Если научиться фиксировать ограничения сразу, то их уже не забудешь проверить (а ведь это одна из главных бед учащихся!), да и путаницы в конце будет существенно меньше.

Каждый из множителей имеет очевидные корни, которые, являясь нулями собственной функции, уже учитывают часть ограничений, накладываемых этой функцией на всю задачу:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{3x-2}=0,\\ x^2-4x+5-a^2>0\\ 0\le x\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}\ln(x^2-4x+5-a^2)=0\\ 3x-2\ge 0,\\ 0\le x\le 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\ a^2<x^2-4x+5\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-4x+5-a^2=1\\ \dfrac{2}{3}\le x\le 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\ a^2<\dfrac{25}{9}\end{cases}\\ \begin{cases}(x-2)^2=a^2\\ \dfrac{2}{3}\le x\le 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\ -\dfrac{5}{3}<a<\dfrac{5}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x-2=\pm a\\ \dfrac{2}{3}\le x\le 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{2}{3}, a\in\left(-\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3}\right)\\ x_2=2+a, a\in\left[-\dfrac{4}{3};0\right]\\ x_3=2-a, a\in\left[0;\dfrac{4}{3}\right].\end{array}\right.$$

Каждое из полученных решений реализуется при определённых значениях a, а это значит, что при каких-то a возможно получение нескольких решений исходного уравнения. Эту информацию удобно изобразить на числовой прямой (рис. 1). Тогда восприятие результатов будет более чётким. Ведь по рисунку сразу видно, что единственное решение возможно только в промежутках изменения параметра $a\in\left(-\dfrac{5}{3};-\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(\dfrac{4}{3};\dfrac{5}{3}\right)$.

В остальных областях решений либо нет вообще (при $a\in\left(-\infty;-\dfrac{5}{3}\right]\cup\left[\dfrac{5}{3};+\infty\right)$), либо их больше одного: x_1 и x_2 при $a\in\left[-\dfrac{4}{3};0\right)$; x_1 и x_3 при $a\in\left(0;\dfrac{4}{3}\right]$; x_1, x_2 и x_3 при $a=0$.

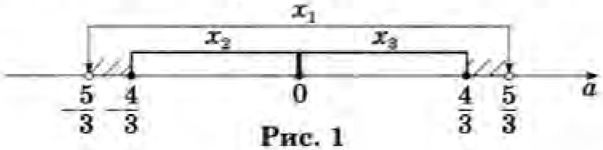

Рис. 1

Однако в нашем анализе необходимо также предусмотреть случаи, при которых некоторые из этих решений могут совпадать, что может скорректировать ответ к задаче. Так, приравняв выражения для первых двух решений $\frac{2}{3} = 2 + a$, мы получим условие их совпадения: $x_1 = x_2$ при $a = -\frac{4}{3}$. Аналогично $x_1 = x_3$ при $a = \frac{4}{3}$, а $x_2 = x_3$ при $a = 0$. В результате, мы получаем, что при $a = \pm\frac{4}{3}$ наше уравнение также имеет только одно решение, тогда как при $a = 0$ их будет два.

Ответ: $a \in \left(-\frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Способ 2. Для любителей геометрических иллюстраций можно привести ещё один из возможных вариантов окончания решения (рис. 2): в плоскости переменная-параметр (xOa) строятся отрезки трёх прямых: $x = \frac{2}{3}$, $a = 2 - x$ и $a = x - 2$, удовлетворяющие всем ограничениям задачи. Тогда анализ, проведённый на рисунке 1, можно заменить определением на рисунке 2 области изменения переменной a, при которой прямая $a = \text{const}$ пересекается с заданными отрезками ровно 1 раз.

Стоит также отметить, что использование «графического» способа решения при решении задач ЕГЭ-2017 было, конечно, возможно, но, как правило, не давало явного выигрыша по сравнению с аналитическим способом решения. Решения задач 3–5 это подтверждают.

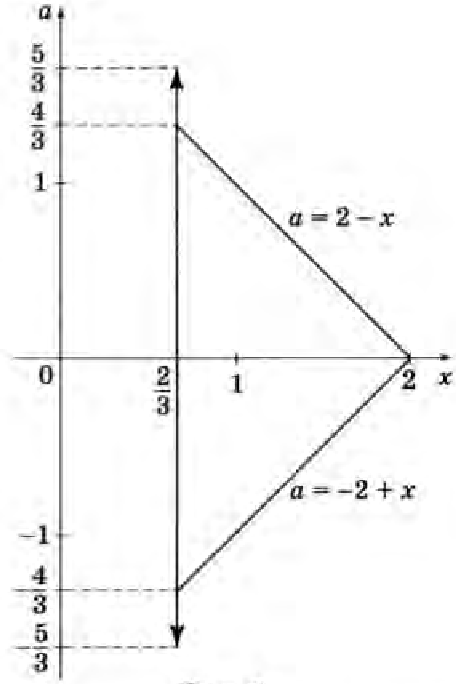

Рис. 2

Способ 3. Можно было бы рассуждать и так: $x = \frac{2}{3}$, очевидно, является корнем уравнения, принадлежащим исследуемому отрезку, при условии положительности аргумента логарифма при этом значении x, то есть при $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{8}{3} + 5 - a^2 > 0$, или $a \in \left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$. Чтобы он был единственным, надо чтобы два других возможных корня либо с ним совпадали (а это, как мы уже видели, реализуется при $a = \pm\frac{4}{3}$), либо блокировались другими ограничениями задачи. В нашем случае, это условия: $x < \frac{2}{3}$ или $x > 2$. То есть

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2 - a < \frac{2}{3} \\ 2 - a > 2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2 + a < \frac{2}{3} \\ 2 + a > 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a > \frac{4}{3} \\ a < 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a < -\frac{4}{3} \\ a > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right).$$

Пересекая это множество с промежутком $a \in \left(-\frac{5}{3};\frac{5}{3}\right)$ и добавив к ним $a = \pm\frac{4}{3}$, получим те значения параметра, при которых единственным корнем будет $x = \frac{2}{3}$. Это как раз тот промежуток, который, как мы уже знаем, является ответом в задаче. Здесь нет никакого противоречия, так как любой из двух оставшихся корней $x = 2 \pm a$ в области, где невозможен корень $x = \frac{2}{3}$, то есть при $a \in \left(-\infty;-\frac{5}{3}\right] \cup \left[\frac{5}{3};+\infty\right)$, также не существует, так как не удовлетворяет условию $x \in \left[\frac{2}{3};2\right]$.

Этот способ решения задачи требует большей квалификации учащегося по сравнению с двумя предыдущими. Здесь возникает много различных случаев, и поэтому зачастую школьники не учитывают какие-то нюансы. Однако ознакомить учащихся с ним небесполезно, так как есть задачи, в которых его использование даёт заметный выигрыш по сравнению с другими способами.

Задача 3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x-a}\cdot\sin x = \sqrt{x-a}\cdot\cos x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; \pi]$.

Решение. Наличие общего множителя в уравнении опять приводит к тому, что оно распадается на два достаточно простых уравнения. И задача школьника состоит в том, чтобы грамотно учесть ограничения, при которых эти корни существуют, не забыв про случай их возможного совпадения.

$$\sqrt{x-a}\cdot(\sin x - \cos x) = 0,\quad x \in [0;\pi] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x-a} = 0 \\ 0 \le x \le \pi \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ x - a \ge 0 \\ 0 \le x \le \pi \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = a \\ 0 \le a \le \pi \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = \frac{\pi}{4} \\ a \le \frac{\pi}{4}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отметив на оси a (рис. 3) соответствующие области существования каждого из этих решений и учитывая случай их очевидного совпадения при $a = \frac{\pi}{4}$, сразу же можно выписать ответ.

Ответ: $a \in (-\infty;0) \cup \left[\frac{\pi}{4};\pi\right]$.

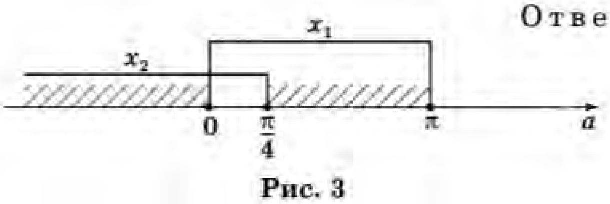

Рис. 3

Отметим особо, что во избежание возможных ошибок полезно лишний раз пройтись по граничным точкам записанных в ответе промежутков, чтобы убедиться в их правильности. Так, при $a = 0$ уравнение имеет два решения, принадлежащие заданному отрезку. Это $x=0$ и $x=\frac{\pi}{4}$, поэтому это значение a в ответ не включено. При $a=\frac{\pi}{4}$ корень один $x=\frac{\pi}{4}$, при $a=\pi$ корень также единственный $x=\pi$. Эти значения параметра a мы в ответ включаем.

Для некоторых учащихся вместо рисунка 3 более наглядным является следующий табличный способ представления результатов решения, в котором уже учтен анализ граничных точек.

$a \in (-\infty; 0)$	$a=0$	$a \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$	$a=\frac{\pi}{4}$	$a \in \left(\frac{\pi}{4}; \pi\right)$	$a=\pi$	$a \in (\pi; +\infty)$
$x=\frac{\pi}{4}$	$x_1=0$, $x_2=\frac{\pi}{4}$	$x_1=a$, $x_2=\frac{\pi}{4}$	$x=a=\frac{\pi}{4}$	$x=a$	$x=a=\pi$	Нет решений

Как и в случае с рисунком 3, задача при таком подходе решается во всей области возможного изменения параметра a.

Задача 4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2+(x-1)\cdot\sqrt{3x-a}=x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

Решение. С помощью несложных алгебраических преобразований наше уравнение раскладывается на множители $(x-1)\cdot(x+\sqrt{3x-a})=0$ и снова распадается на два простых уравнения.

Одно из них имеет корень $x=1$, который является решением задачи при $3x-a\geq 0$, то есть при $a\leq 3$. Правая часть второго уравнения $\sqrt{3x-a}=-x$ на исследуемом промежутке $[0; 1]$ будет отрицательной при всех $x>0$. Единственно возможное решение этого уравнения $x=0$, очевидно, реализуется при $a=0$.

Значит, наше исходное уравнение при этом значении параметра будет иметь уже два решения и должно быть исключено из ответа.

Видим, что совпадения корней ни при каких значениях параметра a не происходит. Остаётся выписать ответ.

Ответ: $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 3]$.

Задача 5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\operatorname{tg}(\pi x)\cdot\ln(2x+a)=\ln(2x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

Решение. Как и в предыдущих задачах имеем два случая:

$$\text{А. } \begin{cases}\operatorname{tg}(\pi x)=1\\ 2x+a>0\\ 0\leq x\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\pi x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}\\ x>-\frac{a}{2}\\ 0\leq x\leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}>-\frac{a}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{4}\\ a>-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Б. $\begin{cases} \ln(2x+a)=0 \\ \pi x \ne \dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in \boldsymbol{Z} \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+a=1 \\ x\ne \dfrac{1}{2}+n, n\in \boldsymbol{Z} \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-a}{2} \\ x\ne \dfrac{1}{2} \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-a}{2} \\ a\ne 0 \\ -1\le a\le 1. \end{cases}$

Корни $x=\dfrac{1}{4}$ и $x=\dfrac{1-a}{2}$ совпадают при $a=\dfrac{1}{2}$. Далее, для отбора нужных значений используем либо числовую ось a, либо таблицу (аналогично предыдущим задачам) и получаем, что исходное уравнение на отрезке $[0;\ 1]$ имеет ровно один корень при $-1\le a\le -\dfrac{1}{2}$, $a=0$, $a=\dfrac{1}{2}$, $a>1$.

Ответ: $a\in\left[-1;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left\{0;\dfrac{1}{2}\right\}\cup(1;+\infty)$.

Говоря о задачах 2017 года, следует упомянуть и задачи, которые были на экзамене в 1-й волне ЕГЭ (задача 6) и в резервный день основной волны (задача 7). Они были немного другие, но в целом подтверждают наметившиеся тенденции.

Задача 6. Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax\ge 2 \\ \sqrt{x-1}>a \\ 3x\le 2a+11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3;\ 4]$.

Решение. Так как $x\in[3;\ 4]$, то из первого неравенства вытекает, что a должно быть положительным. Тогда система в условии задачи равносильна системе:

$$\begin{cases} x\ge \dfrac{2}{a} \\ x>a^2+1 \\ x\le \dfrac{2a+11}{3}. \end{cases}$$

Здесь большинство учащихся начинают рисовать графики в осях «$a-x$» (получаются гипербола, парабола и прямая) и далее пытаются добраться до ответа. Это, безусловно, можно сделать. Но часто сделать это не получается из-за многочисленных ошибок: как технических, так и логических.

Можно решить получившуюся систему неравенств аналитически – получается решение: $x\in\left[\dfrac{2}{a};\dfrac{2a+11}{3}\right]$ при $a\in\left[\dfrac{1}{2};1\right)$ и $x\in\left(a^2+1;\dfrac{2a+11}{3}\right]$ при $a\in[1;\ 2)$. При остальных значениях a решений нет. После этого нужно понять, как это решение пересекается с отрезком $x\in[3;\ 4]$.

Но если сразу «нацелиться» на вопрос задачи, то несложно понять, что решение системы нам и не требуется. Важно только то, что её решением при конкретном значении a будет или отрезок $x\in\left[\dfrac{2}{a};\dfrac{2a+11}{3}\right]$, или полуинтервал $x\in\left(a^2+1;\dfrac{2a+11}{3}\right]$.

Так как при $a \geq \frac{1}{2}$ значение $\frac{2a+11}{3}$ больше или равно 4, то хотя бы одно решение на отрезке [3; 4] будет, если число 4 является решением системы, то есть:

$$\begin{cases} 4 \geq \frac{2}{a} \\ 4 > a^2 + 1 \\ 4 \leq \frac{2a+11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq a < \sqrt{3}.$$

Если же $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, то $\frac{2}{a} > 4$, $\frac{2a+11}{3} < 4$ – и система несовместна.

Ответ: $a \in \left[\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right)$.

Задача 7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x - x^2 - a^2}} = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке [4; 8].

Решение. Числитель должен быть равен 0, а знаменатель не равен нулю и определён. Получаем две возможности:

А. $$\begin{cases} x = a + 7 \\ 4 \leq x \leq 8 \\ 10x - x^2 - a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 7 \\ 4 \leq a + 7 \leq 8 \\ (a+7)^2 - 10(a+7) + a^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 7 \\ -3 \leq a \leq 1 \\ 2a^2 + 4a - 21 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 7 \\ a \in [-3; 1] \\ a \in \left(-\infty; \frac{-2-\sqrt{46}}{2}\right) \cup \left(\frac{-2+\sqrt{46}}{2}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 7 \\ a \in [-3; 1]. \end{cases}$$

Б. $$\begin{cases} x = 2 - a \\ 4 \leq x \leq 8 \\ 10x - x^2 - a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - a \\ 4 \leq 2 - a \leq 8 \\ (2-a)^2 - 10(2-a) + a^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - a \\ -6 \leq a \leq -2 \\ a^2 + 3a - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - a \\ -6 \leq a \leq -2 \\ \frac{-3-\sqrt{41}}{2} < a < \frac{-3+\sqrt{41}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - a \\ a \in \left(\frac{-3-\sqrt{41}}{2}; -2\right]. \end{cases}$$

Далее действуем так же, как и в задаче 2. Единственное решение $x = 2 - a$ будет при $a \in \left(-\frac{3+\sqrt{41}}{2}; -3\right)$. Решение $x = a + 7$ будет единственным, если $a \in (-2; 1]$.

Кроме того, два корня $x = a + 7$ и $x = 2 - a$ совпадают при $a = -\frac{5}{2}$. И в этом случае тоже получается единственное решение. Ну, а теперь выписываем ответ.

Ответ: $a \in \left(-\frac{3+\sqrt{41}}{2}; -3\right) \cup \left\{-\frac{5}{2}\right\} \cup (-2;1]$.

Ещё раз подчеркнем, что именно, на наш взгляд, является позитивным в задачах с параметрами, предложенных в этом году:

а) решение этих задач основано на обобщении алгоритмов решения задач из других классических разделов алгебры (рациональные и иррациональные уравнения, модули, логарифмы, тригонометрия и др.);

б) задачи не требуют особой математической изворотливости, но при этом несут в себе определенные логические сложности, не позволяющие неподготовленному школьнику освоить этот раздел простым натаскиванием;

в) задачи не требуют для своего решения неадекватно большого времени;

г) задачи вызывают реальный интерес у современных школьников.

Скажем также о том, что критерии оценивания задачи 18 на ЕГЭ также стали более чёткими. О проблемах, которые здесь существуют, говорилось и раньше [1–3]. Сейчас же критерии оценки вполне приемлемы. Единственно: несколько размыта граница между 1 и 2 баллами. Нынешние критерии требуют для выставления оценки 2 балла (из 4-х) полного и правильного разбора хотя бы одного случая. Но при некоторых способах решения (например, графическом) эти случаи отдельно не рассматриваются. И поэтому даже при незначительной ошибке в таком решении выставление оценки 2 балла становится невозможным, что, на наш взгляд, не совсем справедливо.

Задачи для самостоятельного решения

В заключение приведём подборку задач для самостоятельного решения (с ответами). Решение этих задач поможет школьникам повысить свой уровень, приобрести уверенность в своих силах и позволит рассчитывать на успех на ЕГЭ-2018. Большое количество разнообразных задач на эту тему для «продвинутых» учащихся имеется, например, в статьях [2–3] и в книге [4].

1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет единственное решение:

а) $(\sqrt{x}-1)(x-a)=0$; б) $(\sqrt{x}-a)\lg(4-x)=0$; в) $4^x-(a+3)2^x+4a-4=0$.

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет два различных корня:

а) $\dfrac{x^2-a^2}{x^2+2x+a+2}=0$; б) $(x+a)\lg(2-x)=0$; в) $|x^2-6x+8|=a$.

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{(x-a)(x-6)}{x+a}=0$ имеет единственное решение на промежутке $|x| \le 10$.

4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(x-a)(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})=0$ имеет единственное решение на промежутке $x \in [\pi; 2\pi]$.

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(x + a)\lg(\sin x) = 0$ имеет два различных корня на промежутке $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

6. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases}(\operatorname{ctg} x - 1)(x + a) = 0\\ -1 < x < 1\end{cases}$ имеет ровно одно решение.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4x^4 - 9x^2 + a^2} = 2x^2 - 3x + a$$

имеет ровно два различных корня.

8. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$36^x - (a + 5) \cdot 6^x = (3 + 2|a|) \cdot 6^x - (a + 5)(2|a| + 3)$$

имеет единственное решение.

9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(4x + a + 1 - \operatorname{tg} x)^2 = (4x + a - 1 + \operatorname{tg} x)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $[0; \pi]$.

10. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x - a} \cdot \sin x = -\sqrt{x - a} \cdot \cos x$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; \pi]$.

11. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x - 1} \cdot \ln(4x - a) = \sqrt{2x - 1} \cdot \ln(5x + a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

12. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x\sqrt{x - a} = \sqrt{4x^2 - (4a + 2)x + 2a}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

Ответы: 1. а) $(-\infty; 0) \cup \{1\}$; **б)** $(-\infty; 0) \cup \{\sqrt{3}\} \cup [2; +\infty)$; **в)** $(-\infty; 1] \cup \{5\}$. **2. а)** $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$; **б)** $(-2; -1) \cup (-1; +\infty)$; **в)** $\{0\} \cup (1; +\infty)$. **3.** $(-\infty; 10) \cup \{\pm 6; 0\} \cup (10; +\infty)$. **4.** $(-\infty; \pi) \cup \left\{\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right\} \cup (2\pi; +\infty)$. **5.** $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. **6.** $(-\infty; -1] \cup \left\{-\frac{\pi}{4}; 0\right\} \cup [1; +\infty)$. **7.** $\left\{0; \frac{9}{2}\right\}$. **8.** $(-\infty; -5] \cup \left\{-\frac{2}{3}; 2\right\}$. **9.** $(-\infty; -4\pi) \cup \{-2\pi; -\pi\} \cup (0; +\infty)$. **10.** $(-\infty; 0) \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$. **11.** $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{4}; 2\right)$. **12.** $(-\infty; 0) \cup \left[-\sqrt{2}; 1\right]$.

Литература

1. *Зеленский А.С.* Комментарии к задаче С5 из демонстрационного варианта ЕГЭ-2012 // Математика в школе. – 2012. – № 4. – С. 27–28.

2. *Зеленский А.С., Панфилов И.И.* Различные способы решения задачи С5 ЕГЭ: сравнительный анализ, ошибки и недочёты, оценивание // Математика в школе. – 2013. – № 8. – С. 15–23.

3. *Зеленский А.С., Панфилов И.И.* Задачи с параметром на ЕГЭ–2014: различные способы решения; ошибки и недочеты // Математика в школе. – 2014. – № 7. – С. 17–24.

4. *Козко А.И., Панфёров В. С., Сергеев И. Н., Чирский В.Г.* Задачи с параметрами, сложные и нестандартные задачи // М.: МЦНМО, 2016. – 232 с.