Тема: Повторение.

Подготовка к ЕГЭ (задание №18)

Задание №18.

№1. **Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left(x^2-4x\right)^2+a\left|4x-x^2\right|-2a-4=0$ имеет или семь или восемь решений.**

Решение:

Пусть $t=\left|4x-x^2\right|=\left|x^2-4x\right|$, тогда $t^2=\left|x^2-4x\right|^2=\left(x^2-4x\right)^2$.

Исходное уравнение примет вид квадратного $t^2+a\cdot t-2a-4=0$.

Найдем его дискриминант: $D=a^2-4\left(-2a-4\right)=a^2+8a+16=\left(a+4\right)^2$, $\left(a+4\right)^2\geq 0$ при всех значениях a и его корни $t_1=\dfrac{-a+\left(a+4\right)}{2}=2$ или $t_2=\dfrac{-a-\left(a+4\right)}{2}=-a-2$.

При $a=-4$ $D=0$, значит $t_1=t_2=2$. Вернемся к замене

$$\left|x^2-4x\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-4x=2\\x^2-4x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-4x-2=0\\x^2-4x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_{1,2}=2\pm\sqrt{6}\\x_{3,4}=2\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$$

Всего исходное уравнение имеет четыре корня при $a=-4$.

При $a\neq-4$ уравнение в заменах имеет два различных корня $t_1=2$ и $t_2=-a-2$.

Ранее мы определили, что при $t=2$ исходное уравнение имеет четыре корня, значит, возвращаясь ко второй замене, $t=-a-2$, исходное уравнение должно иметь или три или четыре корня, чтобы всего оно имело или семь или восемь решений.

$$\left|x^2-4x\right|=-a-2\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-a-2\geq 0\\\left[\begin{array}{l}x^2-4x=-a-2\\x^2-4x=a+2\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a\leq-2\\\left[\begin{array}{l}x^2-4x+a+2=0\ \ (1)\\x^2-4x-a-2=0\ \ (2)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Уравнение (1) имеет один или два корня при $\dfrac{D}{4}=4-\left(a+2\right)=2-a\geq 0,\ \ a\leq 2$.

Уравнение (2) имеет один или два корня при $\dfrac{D}{4}=4-\left(-a-2\right)=a+6\geq 0,\ \ a\geq-6$.

Найдем значения a, при которых корни уравнений совпадают. Решим систему уравнений (1) и (2).

$$\left\{\begin{array}{l}x^2-4x+a+2=0\\x^2-4x-a-2=0\end{array}\right.\ -$$

$$2a+4=0$$

$$a=-2$$

$$x^2-4x=0,\quad x=0,\ \ x=4$$

При $a=-2$ исходное уравнение имеет шесть решений.

$\left\{\begin{array}{l}a\leq-2\\a\leq 2\\a\geq-6\\a\neq-2\end{array}\right.\Leftrightarrow a\in\left[-6;-2\right)$. Исключим из этого промежутка $a=-4$, получим $a\in\left[-6;-4\right)\cup\left(-4;-2\right)$.

Ягубов.РФ

Ответ: $a\in[-6;-4)\cup(-4;-2)$.

№2. **Найти все значения параметра α из интервала $(0;\pi)$, при каждом из которых система**

$$\begin{cases} x^2+y^2-4(x+y)\sin\alpha+8\sin^2\alpha=2\sin\alpha-1 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\sin\alpha+4\sin^2\alpha \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение:

Пусть $a=\sin\alpha$, тогда система примет вид $\begin{cases} x^2+y^2-4(x+y)a+8a^2=2a-1 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2a+4a^2 \end{cases}$.

Заметим, что при замене переменной x на y система уравнений не меняет свой вид, значит она симметрична относительно входящих в нее переменных. Тогда, если пара $(x;y)$ является решением, то $(y;x)$ тоже решение. Следовательно, единственное решение может иметь вид $(x;x)$, где $x\neq 0$. Тогда

$$\begin{cases} x^2+x^2-4a(x+x)+8a^2=2a-1 \\ \dfrac{x}{x}+\dfrac{x}{x}=2a+4a^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x^2-8ax+8a^2-2a+1=0 \\ a=\dfrac{1}{2},\ a=-1 \end{cases}.$$

При $a=-1$ первое уравнение системы примет вид $2x^2+8x+11=0$ и оно не имеет решений.

При $a=\dfrac{1}{2}$ первое уравнение системы примет вид $x^2-2x+1=0,\ x=1$. Проверкой, подставив в систему $a=\dfrac{1}{2}$, установим, что пара решений $(1;1)$ действительно является единственной.

$$\begin{cases} x^2+y^2-2(x+y)+2=0 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2 \end{cases},\quad \begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=0 \\ (x-y)^2=0 \end{cases},\quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Вернемся к замене $a=\sin\alpha$ и решим уравнение $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ при $\alpha\in(0;\pi)$. Получим, что $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ и $\alpha=\dfrac{5\pi}{6}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{6}$ *и* $\dfrac{5\pi}{6}$.

Ягубов.РФ

№3. **Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система**

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(2y-x)a=1+2a-4a^2 \\ x^2+y^2+4(x-y)a=4+4a-7a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение:

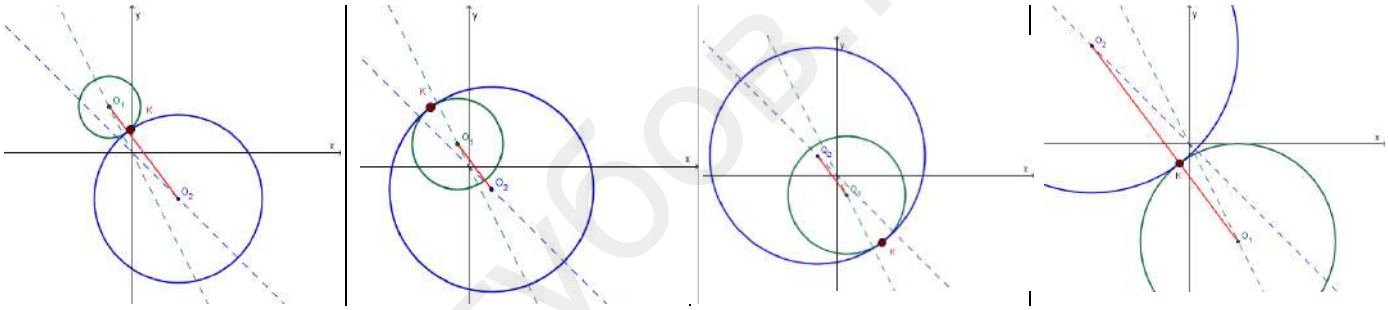
Сгруппируем слагаемые в левой части уравнений таким образом, чтобы выделились полные квадраты относительно переменных x и y.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y+2a)^2=(a+1)^2 \\ (x+2a)^2+(y-2a)^2=(a+2)^2 \end{cases}.$$

Если $a=-1$, то система примет вид $\begin{cases} (x+1)^2+(y-2)^2=0 \\ (x-2)^2+(y+2)^2=1 \end{cases}$ и она решений не имеет.

Если $a=-2$, то система примет вид $\begin{cases} (x+2)^2+(y-4)^2=1 \\ (x-4)^2+(y+4)^2=0 \end{cases}$ и она решений не имеет.

Если $a\neq -1,\ a\neq -2$, то каждое уравнение системы есть уравнение окружности. Тогда система имеет единственное решение в случае внутреннего или внешнего касания окружностей.



Расстояние O_1O_1 между центрами $O_1(a,-2a)$ и $O_2(-2a,2a)$ равно

$O_1O_2=\sqrt{(a-(-2a))^2+(-2a-2a)^2}=\sqrt{9a^2+16a^2}=5|a|$, а радиусы $R_1=|a+1|$ и $R_2=|a+2|$.

Внешнее касание окружностей происходит, когда $O_1O_2=R_1+R_2$ и $5|a|=|a+1|+|a+2|$, $a=1$ и $a=-\frac{3}{7}$.

Внутреннее касание окружностей происходит, когда $O_1O_2=|R_1-R_2|$ и $5|a|=||a+1|-|a+2||$, $a=\pm\frac{1}{5}$.

Ответ: $-\frac{3}{7};\ -\frac{1}{5};\ \frac{1}{5};\ 1.$

Ягубов.рф

№7. **Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(x-3a+1)^2+(y+2a)^2=a-1\\4x+3y=a+1\end{cases}$ имеет более одного решения.**

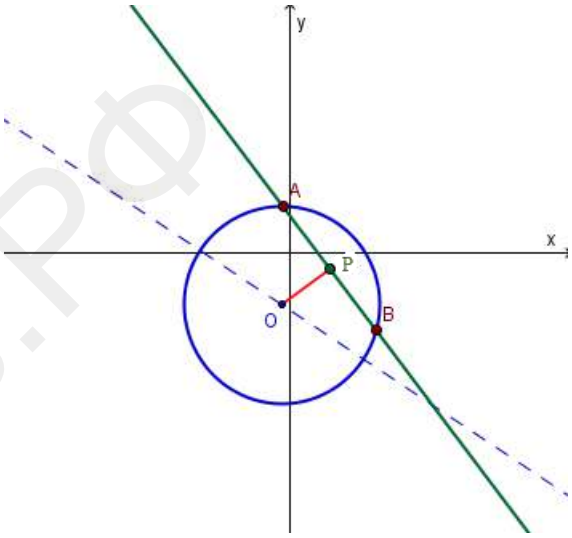
Решение:

Левая часть первого уравнения системы неотрицательна, значит, чтобы система имела решения, надо чтобы $a-1\ge 0$.

Пусть $a=1$. Тогда имеем систему $\begin{cases}(x-2)^2+(y+2)^2=0\\4x+3y=2\end{cases}$.

Первое уравнение имеет решением пару $(2,-2)$, которая также удовлетворяет второму уравнению системы, поэтому при $a=1$ система имеет единственное решение.

Пусть $a>1$. Решения первого уравнения системы лежат на окружности с центром в точке $(3a-1,-2a)$ и радиусом $\sqrt{a-1}$. Решения второго уравнения - точки прямой $4x+3y=a+1$. Следовательно, система имеет более одного решения тогда и только тогда, когда расстояние от центра окружности $(3a-1,-2a)$ до прямой $4x+3y=a+1$ меньше радиуса $\sqrt{a-1}$ данной окружности. Используем формулу расстояния от точки $M(x_M,y_M)$ до прямой $Ax+By+C=0$:



$$\rho(M;Ax+By+C=0)=\frac{|A\cdot x_M+B\cdot y_M+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Получаем систему

$$\begin{cases}\dfrac{|4(3a-1)+3(-2a)-a-1|}{\sqrt{4^2+3^2}}<\sqrt{a-1},\\ a>1\end{cases}\quad\begin{cases}|5a-5|<5\sqrt{a-1},\\ a>1\end{cases},\quad 1<a<2.$$

Ответ: $1<a<2$.

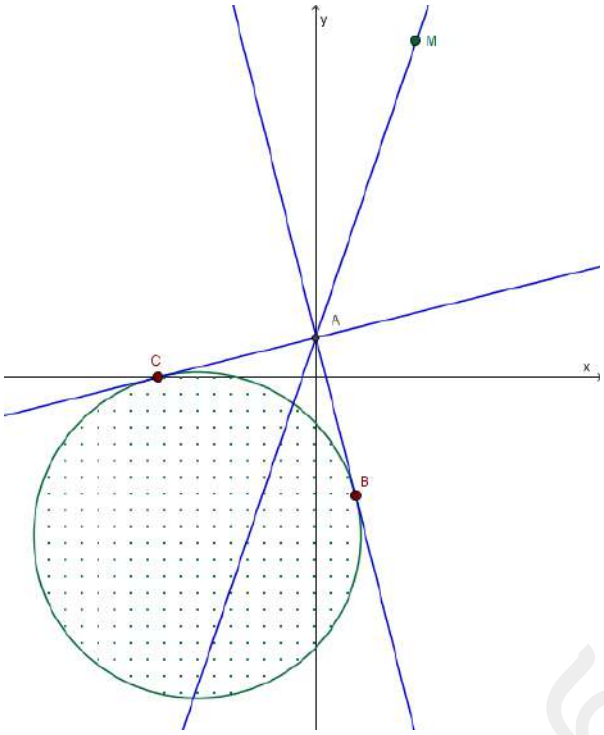
Ягубов.рф

№6. **Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система**

$$\begin{cases}\left((x+3)^2+(y+4)^2-17\right)\left((2x-5)^2+(2y-17)^2\right)\le 0\\ -ax+y=1\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение:



Рассмотрим первое неравенство системы $\left((x+3)^2+(y+4)^2-17\right)\left((2x-5)^2+(2y-17)^2\right)\le 0$.

Оно равносильно совокупности условий $\left[\begin{array}{l}(x+3)^2+(y+4)^2-17\le 0\\ (2x-5)^2+(2y-17)^2=0\end{array}\right.$.

Первое неравенство совокупности задает на координатной плоскости круг с центром $(-3;-4)$ и радиусом $\sqrt{17}$, а второе уравнение – точку с координатами $M(2,5;8,5)$.

Единственное решение исходная система будет иметь тогда и только тогда, когда прямая $y=ax+1$ касается круга, но не проходит через точку M, или проходит через точку M, но не имеет общих точек с кругом.

Составим систему: $\begin{cases}(x+3)^2+(y+4)^2=17\\ y=1+ax\end{cases}$.

$$(x+3)^2+(5+ax)^2=17$$
$$(1+a^2)x^2+(6+10a)x+17=0.$$

Чтобы найти значения a, при которых прямая касается круга, приравняем дискриминант уравнения к нулю: $\frac{D}{4}=(3+5a)^2-17(1+a^2)=0;\ \ 4a^2+15a-4=0,\ \ a=0,25$ или $a=-4$.

Через точку M прямая $y=ax+1$ проходит, только если $8,5=1+2,5a$, т.е. $a=3$. Следовательно, $a=0,25$ и $a=-4$ удовлетворяют условию задачи.

Теперь пусть прямая $y=1+3x$ проходит через точку M. Проверим, пересекает ли она круг. Достаточно найти знак дискриминанта D при $a=3$.

$\frac{D}{4}=8a^2+30a-8=72+90-8>0$. Следовательно, прямая $y=1+3x$ имеет с кругом общие точки. В этом случае данная система имеет бесконечно много решений.

Ответ: 0,25 или -4.

ЯГУБОВ.РФ

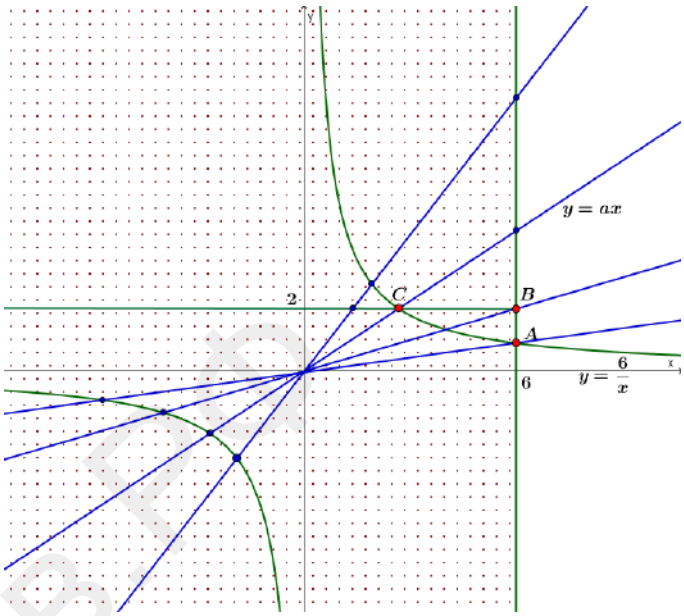
№4. **Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений**

$$\begin{cases}\left(xy^2-2xy-6y+12\right)\sqrt{6-x}=0\\ y=ax\end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение:

$$\begin{cases}\left(y-2\right)\left(xy-6\right)\sqrt{6-x}=0\\ y=ax\end{cases},\quad \begin{cases}y=2,\ y=\dfrac{6}{x},\ x=6\\ x\le 6,\\ y=ax\end{cases}$$



Число решений исходной системы равно числу точек пересечения линий графиков $y=2,\ y=\dfrac{6}{x},\ x=6$ с прямой $y=ax$ при условии, что $x\le 6$.

При $a<0$ - два решения; $a=0$ - одно решение.

Прямая $y=ax$ проходит через точку

$A:\begin{cases}x=6\\ y=\dfrac{6}{x}\end{cases}\Rightarrow A\left(6;1\right)$. При $1=6a,\ a=\dfrac{1}{6}$ - два решения; $0<a<\dfrac{1}{6}$ - два решения.

При движении от точки A до точки $B\left(6;2\right)$ прямая $y=ax$ пересекает графики $y=2,\ y=\dfrac{6}{x},\ x=6$ в трех точках. Найдем значение углового коэффициента прямой $y=ax$, когда она проходит через точку $B\left(6;2\right)$:

$a=\dfrac{1}{3}$. Тогда при $\dfrac{1}{6}<a\le\dfrac{1}{3}$ система будет иметь три решения.

Прямая $y=ax$ проходит через точку $C\left(3;2\right)$ при $a=\dfrac{2}{3}$ и система имеет три решения.

При $\dfrac{1}{3}<a<\dfrac{2}{3}$ и $a>\dfrac{2}{3}$ - четыре решения.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{3}\right]\cup\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

Ягубов Р.

№5. **Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений**

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2-2xy-4y+8}{\sqrt{4-y}}=0 \\ y=ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение:

$$\begin{cases} \dfrac{(y-2)(xy-4)}{\sqrt{4-y}}=0 \\ y=ax \end{cases}, \quad \begin{cases} y=2,\ y=\dfrac{4}{x} \\ y<4 \\ y=ax \end{cases}$$

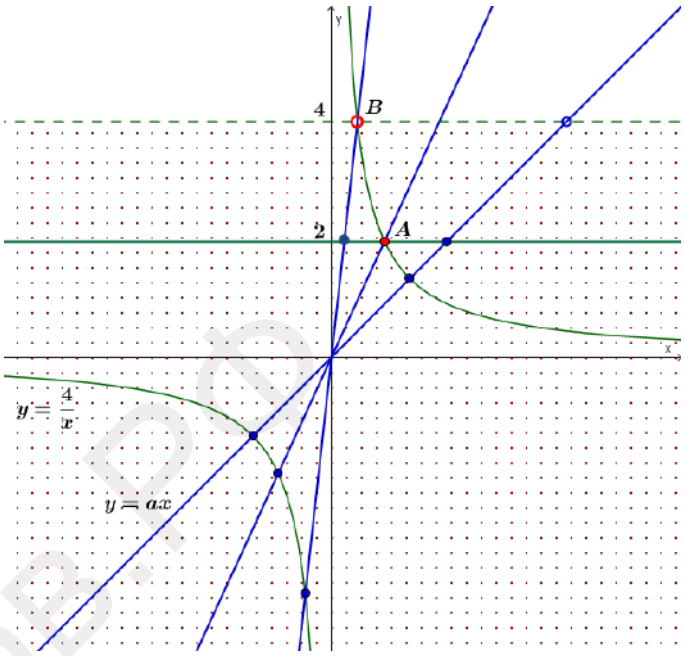
Число решений исходной системы равно числу точек пересечения линий графиков $y=2,\ y=\dfrac{4}{x}$ с прямой $y=ax$ при условии, что $y<4$.

При $a<0$ - одно решение; $a=0$ - нет решений.

Прямая $y=ax$ проходит через точку

$A:\begin{cases} y=2 \\ y=\dfrac{4}{x} \end{cases} \Rightarrow A(2;2)$. При $2=2a,\ a=1$ - два решения; $0<a<1$ - три решения.

Прямая проходит через точку $B(1;4)$ при $a=4$ - два решения; при $1<a<4$ - три решения; при $a>4$ - два решения.



Ответ: $(0;1)\cup(1;4)$.

Ягубов.рф

Тест *Задание №18.*

№1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\left(4x^2-8x\right)^2+2a\left|4x-2x^2\right|-a-1=0$ имеет или семь или восемь решений.

Ответ: $-5\le a<-2$ *и* $-2<a<-1$.

№2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}x^2+y^2-2\left(2y-x\right)a=1-2a-4a^2\\x^2+y^2-4\left(x-y\right)a=4-4a-7a^2\end{cases}$$

не имеет решений.

Ответ: $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{3}{7};\infty\right)$.

№3. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{xy^2-3xy-3y+9}{\sqrt{x+3}}=0\\y=ax\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $\left(0;\frac{1}{3}\right]\cup\{3\}$.

№4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\left(\left(x-3\right)^2+\left(y+4\right)^2-17\right)\left(\left(2x+7\right)^2+\left(2y-9\right)^2\right)\le 0\\ax+y=1\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: 0,25 или -4.

№5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\left(x+2a\right)^2+\left(y+3a+1\right)^2=a+1\\3x-4y=a-1\end{cases}$$

имеет более одного решения.

Ответ: $(-1;0)$.

Дубов.РФ