

1. (2 балла) Что больше: $\frac{1}{50} + \frac{1}{51} + \dots + \frac{1}{150}$ или $\frac{2}{150} + \frac{2}{151} + \dots + \frac{2}{250}$?

Ответ: Первая сумма больше.

Решение: Перепишем вторую сумму как $\frac{1}{75} + \frac{1}{75,5} + \dots + \frac{1}{125}$. У неё одинаковое количество слагаемых с первой суммой, причём среднее слагаемое $\frac{1}{100}$ общее.

Сравним пары слагаемых $\frac{1}{100-k} + \frac{1}{100+k} = \frac{1}{100^2-k^2}$ и $\frac{1}{100-\frac{k}{2}} + \frac{1}{100+\frac{k}{2}} = \frac{1}{100^2-\frac{k^2}{4}}$. Первая пара слагаемых очевидно больше, значит, первая сумма больше.

2. (2 балла) На доске записали дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$, а также все остальные дроби, получающиеся из неё перестановкой чисел a, b, c, d , кроме имеющих тождественно нулевой знаменатель. Могло ли так получиться, что среди выписанных дробей ровно 7 различных?

Ответ: Да.

Решение: Например, возьмём числа 2, 1, 0, 0. Всего 4 числа, из которых два одинаковых, можно расставить 12 способами. Два из них имеют нулевой знаменатель, т.е. не рассматриваются. Осталось 10.

Два варианта нашей дроби нулевые. Ещё есть дроби $\frac{2x}{1}, \frac{2}{x}, \frac{2x}{x} = \frac{2}{1}$ и ещё столько же обратных к ним.

3. (2 балла) Один двоечник написал следующие неверные формулы синуса и косинуса суммы: $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$ и $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha + \cos \beta$. В свое оправдание он сказал, что при некоторых α и β его формулы всё же верны. Найдите все такие пары (α, β) .

Ответ: $\alpha = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ и $\beta = \mp \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$.

Решение:

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha + \cos \beta \end{cases}$$

Из первого равенства следует, что $2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Отсюда

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\alpha + \beta}{2} = \pm \frac{\alpha - \beta}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

В первом случае $\cos \alpha = \cos \beta$. Таким образом, формула “косинуса суммы” превращается в $1 = 2 \cos \alpha$, откуда $\alpha = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ и, соответственно, $\beta = \mp \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$.

Во втором случае мы получаем либо $\beta = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ или $\alpha = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Тогда второе равенство превращается в $\cos \alpha = 1 + \cos \alpha$ или аналогичное равенство для β , что невозможно. Значит, остаётся только первый случай.

4. (3 балла) На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 10 см. Эта окружность пересекает стороны AB и BC в точках X и Y соответственно. Найдите $AX \cdot AB + CY \cdot BC$.

Ответ: 400

Решение: Пусть точка M — середина стороны AC , она же центр окружности. Тогда $AB \cdot BX = BC \cdot BY = (BM + 10)(BM - 10)$. Тогда $BX = \frac{BM^2 - 100}{AB} = \frac{2AB^2 + 2BC^2 - 400 - 400}{4AB}$. Соответственно, $AX = AB - \frac{2AB^2 + 2BC^2 - 800}{4AB} = \frac{2AB^2 - 2BC^2 + 800}{4AB}$. аналогично $CY = \frac{2BC^2 - 2AB^2 + 800}{4BC}$. Тогда $AX \cdot AB + CY \cdot BC = \frac{1600}{4} = 400$.

5. (3 балла) Вписанная окружность четырёхугольника $ABCD$ касается сторон AB, BC, CD и AD в точках E, F, G и H соответственно. Прямые EH и GH пересекают прямую BC в точках K и L соответственно. Оказалось, что $BK = BF$. Докажите, что $CL = CF$.

Доказательство: $BK = BF = BE$, следовательно треугольник KFE прямоугольный с прямым углом $\angle KEF$. Но $\angle KEF = \angle HEF$. Значит, $\angle HEF$ прямой, но $\angle HEF + \angle HGF = 180^\circ$, следовательно, $\angle HGF$ тоже прямой, и смежный к нему $\angle LGF$ тоже.

Рассмотрим окружность с центром в точке C и радиусом $CF = CG$. Она вторично пересекает прямую BC в точке L' и $CL' = CF = CG$. Но, поскольку $\angle L'GF$ также прямой, L и L' это одна и та же точка, тогда $CL = CF$, что и требовалось.

6. (3 балла) Последовательность задана следующими соотношениями: $x_1 = 5, x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Докажите, что $x_n > \pi$

Доказательство: Докажем по индукции неравенство $\pi < x_n < 2\pi$. База $n = 1$, $\pi < 5 < 2\pi$.

Переход от n к $n + 1$. Пусть $\pi < x_n < 2\pi$, тогда $\sin x_n < 0$, и следовательно, $x_{n+1} < x_n < 2\pi$. С другой стороны, $\sin x_n = -\sin(x_n - \pi) > -(x_n - \pi)$, так как для положительных углов выполняется неравенство $\sin \alpha < \alpha$. Значит, $x_{n+1} = x_n + \sin x_n > x_n - (x_n - \pi) = \pi$, что и требовалось доказать.

Замечание: на самом деле можно также доказать, что число π является пределом последовательности x_n .

7. (4 балла) Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен 1. Все три коэффициента в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию из трёх элементов с разностью q . Найдите все возможные значения q , если известно, что это рациональное число и разность корней $f(x)$ равна q .

Ответ: Решений нет.

Решение: Коэффициенты трёхчлена имеют следующий вид: a, aq, aq^2 в некотором порядке. Корни можно представить как b и $b + q$.

Первый случай: $a = 1$, два других коэффициента: q и q^2 .

Подслучай 1.1: $2b + q = -q \Rightarrow b = -q$. Далее, $b(b + q) = q^2 \Rightarrow q \cdot 2q = q^2$ откуда $q = 0$, что невозможно из определения геометрической прогрессии.

Подслучай 1.2: $2b + q = -q^2 \Rightarrow b = \frac{-q^2 - q}{2}$. Далее, $b(b + q) = q \Rightarrow q^2(q + 1)(q - 1) = 4q$ откуда снова $q = 0$, что невозможно из определения геометрической прогрессии. Другие рациональные корни этого уравнения могут быть только числами $\pm 1, \pm \frac{1}{5}$, легко убедиться, что они не подходят.

Второй случай: $aq = 1$, два других коэффициента: $\frac{1}{q}$ и q .

Подслучай 2.1: $2b + q = -\frac{1}{q} \Rightarrow b = \frac{1}{2}(-\frac{1}{q} - q) = -\frac{1+q^2}{2q}$. Далее, $b(b + q) = q \Rightarrow (1 + q^2)(1 - q^2) = 4q^3$. Рациональные корни этого уравнения могут быть только числами ± 1 , легко убедиться, что они не подходят.

Подслучай 2.2: $2b + q = -q \Rightarrow b = -q$. Далее, $b(b + q) = \frac{1}{q} \Rightarrow 0 = \frac{1}{q}$ — нет решений

Третий случай: $aq^2 = 1$, два других коэффициента: $\frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}$

Подслучай 3.1: $2b + q = -\frac{1}{q} \Rightarrow b = \frac{1}{2}(-q - \frac{1}{q}) = -\frac{1+q^2}{2q}$. Далее, $b(b + q) = \frac{1}{q^2} \Rightarrow (1 + q^2)(1 - q^2) = 4 \Rightarrow 5 - q^4 = 0$. Рациональных корней нет.

Подслучай 3.2: $2b + q = -\frac{1}{q^2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}(-q - \frac{1}{q^2}) = -\frac{1+q^3}{2q^2}$. Далее, $b(b + q) = \frac{1}{q} \Rightarrow (1 + q^3)(1 - q^3) = 4 * q^3$ Рациональные корни этого уравнения могут быть только числами ± 1 .

Таким образом все случаи разобраны, рациональных решений нет.

8. (5 баллов) Таблица 10×10 заполнена нулями. За одну операцию в таблице находится минимальное число (если таких несколько — выбирается любое) и к нему, а также ко всем числам, стоящим в соседних с ним по стороне или углу клетках, добавляется единица. Какое наибольшее число может оказаться в одной из клеток таблицы через 80 операций?

Ответ: 20.

Решение: Назовём n -ой фазой несколько подряд идущих операций, который применяются к числам, равным n . Если таких операций не было, будем говорить, что данная фаза состоит из нуля операций. Начинается всё с нулевой фазы.

В течении одной фазы никакое число не может увеличиться больше, чем на 4. Действительно, если мы увеличили само число, то ни к нему, ни к его соседям не может быть применена наша операция в течение этой фазы ни до, не после, поскольку число, увеличенное на один в некоторой фазе, не может оказаться минимальным в течении той же самой фазы. Среди соседей числа можно выбрать не больше 4 не соседних между собой, значит, действительно мы можем увеличить число не больше, чем на 4 за одну фазу.

Рассмотрим первые, четвёртые, седьмые и десятые клетки в первой, четвёртой, седьмой и десятой строках таблицы, всего 16 штук. Заметим, что никакая операция не затрагивает две из них. Значит, чтобы сменилось n фаз, надо совершить хотя бы $16n$ операций. (**Важно!** Мы не можем утверждать, что одна фаза длится хотя бы 16 операций, так как некоторые из наших чисел могли быть увеличены на предыдущих фазах)

Значит, у нас прошло не более 5 фаз и в каждой никакое число не могло увеличиться более, чем на 4. Следовательно, за 80 операций никакое число не могло стать больше, чем 20.

Пример строится следующим образом: рассмотрим вторые, четвёртые, седьмые и десятые клетки во второй, четвёртой, седьмой и десятой строках таблицы, всего 16 штук. Будем применять операции только к ним. Операции, применённые к одной из этих клеток, не затрагивают остальные 15, и при этом после применения операций ко всем 16 клеткам все числа в таблице увеличиваются хотя бы на 1. При этом число в третьей клетке третьей строки будет каждую фазу увеличиваться на 4.

Разумеется, пример не единственный.

1. (2 балла) Что больше: $\frac{1}{25} + \frac{1}{26} + \dots + \frac{1}{75}$ или $\frac{2}{75} + \frac{2}{76} + \dots + \frac{2}{125}$?

Ответ: Первая сумма больше.

Решение: Перепишем вторую сумму как $\frac{1}{37,5} + \frac{1}{38} + \dots + \frac{1}{62,5}$. У неё одинаковое количество слагаемых с первой суммой, причём среднее слагаемое $\frac{1}{50}$ общее.

Сравним пары слагаемых $\frac{1}{50-k} + \frac{1}{50+k} = \frac{1}{50^2-k^2}$ и $\frac{1}{50-\frac{k}{2}} + \frac{1}{50+\frac{k}{2}} = \frac{1}{50^2-\frac{k^2}{4}}$. Первая пара слагаемых очевидно больше, значит, первая сумма меньше.

2. (2 балла) На доске записали дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$, а также все остальные дроби, получающиеся из неё перестановкой чисел a, b, c, d , кроме имеющих тождественно нулевой знаменатель. Могло ли так получиться, что среди выписанных дробей ровно 5 различных?

Ответ: Да.

Решение: Например, возьмём числа 2, 2, 1, 1. Всего 4 числа, из которых две пары одинаковых, можно расставить 6 способами, но среди них два совпадают.

Наши дроби это $\frac{2x+2}{x+1}, \frac{2x+1}{2x+1} = \frac{x+2}{x+2}, \frac{x+1}{2x+2}, \frac{1x+2}{2x+1}, \frac{2x+1}{x+2}$.

3. (2 балла) Один двоечник написал следующие неверные формулы синуса и косинуса разности: $\sin(\alpha-\beta) = \sin \alpha - \sin \beta$ и $\cos(\alpha-\beta) = \cos \alpha - \cos \beta$. В свое оправдание он сказал, что при некоторых α и β его формулы всё же верны. Найдите все такие пары (α, β) .

Ответ: $\alpha = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $\beta = \mp \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$.

Решение:

$$\begin{cases} \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha - \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha - \cos \beta \end{cases}$$

Из первого равенства следует, что $2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

Отсюда

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\alpha + \beta}{2} = \pm \frac{\alpha - \beta}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

В первом случае $\cos \alpha = \cos \beta$. Таким образом, формула “косинуса суммы” превращается в $1 = 0$, что невозможно.

Во втором случае мы получаем либо $\beta = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ или $\alpha = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Тогда второе равенство превращается в $\cos \alpha = \cos \alpha - 1$, что невозможно, или $\cos \beta = 1 - \cos \beta$, откуда $\beta = \mp \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$.

4. (3 балла) На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность радиуса 20 см. Эта окружность пересекает стороны AB и AC в точках X и Y соответственно. Найдите $BX \cdot AB + CY \cdot AC$.

Ответ: 1600

Решение: Пусть точка M — середина стороны BC , она же центр окружности. Тогда $AB \cdot AX = AC \cdot AY = (AM + 20)(AM - 20)$. Тогда $AX = \frac{AM^2 - 400}{AB} = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - 1600 - 1600}{4AB}$. Соответственно, $BX = AB - \frac{2AB^2 + 2AC^2 - 3200}{4AB} = \frac{2AB^2 - 2AC^2 + 3200}{4AB}$. аналогично $CY = \frac{2AC^2 - 2AB^2 + 3200}{4AC}$. Тогда $BX \cdot AB + CY \cdot AC = \frac{6400}{4} = 1600$.

5. (3 балла) Вписанная окружность четырёхугольника $ABCD$ касается сторон AB, BC, CD и AD в точках E, F, G и H соответственно. Прямые EF и EH пересекают прямую CD в точках Q и P соответственно. Оказалось, что $CQ = CG$. Докажите, что $DP = DH$.

Доказательство: $Q = CG = CF$, следовательно треугольник GFQ прямоугольный с прямым углом $\angle GFQ$. Но $\angle GFQ = \angle GFE$. Значит, $\angle GFE$ прямой, но $\angle GFE + \angle GHE = 180^\circ$, следовательно, $\angle GHE$ тоже прямой, и смежный к нему $\angle GHP$ тоже.

Рассмотрим окружность с центром в точке D и радиусом $DH = DG$. Она вторично пересекает прямую CD в точке P' и $DP' = DH = DG$. Но, поскольку $\angle P'HG$ также прямой, P и P' это одна и та же точка, тогда $DP = DH$, что и требовалось.

6. (3 балла) Последовательность задана следующими соотношениями: $x_1 = 7, x_{n+1} = x_n + \sin x_n$. Докажите, что $x_n < 3\pi$

Доказательство: Докажем по индукции неравенство $2\pi < x_n < 3\pi$. База $n = 1, 2\pi < 7 < 3\pi$.

Переход от n к $n + 1$. Пусть $2\pi < x_n < 3\pi$, тогда $\sin x_n > 0$, и следовательно, $x_{n+1} > x_n > 2\pi$. С другой стороны, $\sin x_n = \sin(3\pi - x_n) < (3\pi - x_n)$, так как для положительных углов выполняется неравенство $\sin \alpha < \alpha$. Значит, $x_{n+1} = x_n + \sin x_n < x_n + (3\pi - x_n) = 3\pi$, что и требовалось доказать.

Замечание: на самом деле можно также доказать, что число 3π является пределом последовательности x_n .

7. (4 балла) Старший коэффициент квадратного трёхчлена $f(x)$ равен 1. Все три коэффициента в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию из трёх элементов с разностью d . Найдите все возможные значения d , если известно, что это рациональное число и корни $f(x)$ отличаются друг от друга в d раз.

Ответ: $-1, -\frac{1}{2}$.

Решение: Коэффициенты трёхчлена имеют следующий вид: $a, a + d, a + 2d$ в каком-то порядке. Корни трёхчлена можно представить как b и bd .

Первый случай: $a = 1$, два других коэффициента: $1 + d$ и $1 + 2d$.

Подслучай 1.1: $b + bd = -1 - d$, значит, $b = -1$ или $d = -1$. Если $b = -1$, пишем также равенство на свободный член: $b^2d = 1 + 2d \Rightarrow d = 1 + 2d \Rightarrow d = -1$.

Подслучай 1.2: $b + bd = -1 - 2d \Rightarrow b = -\frac{1 + 2d}{1 + d}$. Далее, $b^2d = 1 + d \Rightarrow d(1 + 2d)^2 = (1 + d)^3 \Rightarrow 3d^3 + d^2 - 2d - 1 = 0$.

Рациональные корни этого уравнения могут быть только числами $\pm 1, \pm \frac{1}{3}$, легко убедиться, что они не подходят.

Второй случай: $a + d = 1$, два других коэффициента: $1 - d, 1 + d$

Подслучай 2.1: $b + bd = -1 + d \Rightarrow b = -\frac{1 - d}{1 + d}$. Далее, $b^2d = 1 + d \Rightarrow d(1 - d)^2 = (1 + d)^3 \Rightarrow 5d^2 + 2d + 1 = 0$.

Рациональные корни этого уравнения могут быть только числами $\pm 1, \pm \frac{1}{5}$, легко убедиться, что они не подходят.

Подслучай 2.2: $b + bd = -1 - d$, значит, $b = -1$ или $d = -1$. Если $b = -1$, пишем также равенство на свободный член: $b^2d = 1 - d \Rightarrow d = \frac{1}{2}$.

Третий случай: $a + 2d = 1$, два других коэффициента: $1 - 2d, 1 - d$.

Подслучай 3.1: $b + bd = -1 + 2d \Rightarrow b = -\frac{1 - 2d}{1 + d}$. Далее, $b^2d = 1 - d \Rightarrow d(1 - 2d)^2 = (1 - d) * (1 + d)^2 \Rightarrow 5d^3 - 3 * d^2 - 1 = 0$. Рациональные корни этого уравнения могут быть только числами $\pm 1, \pm \frac{1}{5}$, легко убедиться, что они не подходят.

Подслучай 3.2: $b + bd = -1 + d \Rightarrow b = \frac{1 - d}{1 + d}$. Далее, $b^2d = 1 - 2d \Rightarrow d(1 - d)^2 = (1 - 2d)(1 + d)^2 \Rightarrow 3d^3 + d^2 + d - 1 = 0$

Рациональные корни этого уравнения могут быть только числами $\pm 1, \pm \frac{1}{5}$, легко убедиться, что они не подходят.

8. (5 баллов) Таблица 7×7 заполнена нулями. За одну операцию в таблице находится минимальное число (если таких несколько — выбирается любое) и к нему, а также ко всем числам, стоящим в соседних с ним по стороне или углу клетках, добавляется единица. Какое наибольшее число может оказаться в одной из клеток таблицы через 90 операций?

Ответ: 40.

Решение: Назовём n -ой фазой несколько подряд идущих операций, который применяются к числам, равным n . Если таких операций не было, будем говорить, что данная фаза состоит из нуля операций. Начинается всё с нулевой фазы.

В течении одной фазы никакое число не может увеличиться больше, чем на 4. Действительно, если мы увеличили само число, то ни к нему, ни к его соседям не может быть применена наша операция в течение этой фазы ни до, ни после, поскольку число, увеличенное на один в некоторой фазе, не может оказаться минимальным в течении той же самой фазы. Среди соседей числа можно выбрать не больше 4 не соседних между собой, значит, действительно мы можем увеличить число не больше, чем на 4 за одну фазу.

Рассмотрим первые, четвёртые и седьмые клетки в первой, четвёртой и седьмой строках таблицы, всего 9 штук. Заметим, что никакая операция не затрагивает две из них. Значит, чтобы сменилось n фаз, надо совершить хотя бы $9n$ операций. (**Важно!** Мы не можем утверждать, что одна фаза длится хотя бы 9 операций, так как некоторые из наших чисел могли быть увеличены на предыдущих фазах)

Значит, у нас прошло не более 10 фаз и в каждой никакое число не могло увеличиться более, чем на 4. Следовательно, за 90 операций никакое число не могло стать больше, чем 40.

Пример строится следующим образом: рассмотрим вторые, четвёртые и шестые клетки во второй, четвёртой и шестой строках таблицы, всего 9 штук. Будем применять операции только к ним. Операции, применённые к одной из этих клеток, не затрагивают остальные 8, и при этом после применения операций ко всем 9 клеткам все числа в таблице увеличиваются хотя бы на 1. При этом число в третьей клетке третьей строки будет каждую фазу увеличиваться на 4.

Разумеется, пример не единственный.