9 класс
1 вариант

1. (2 балла) Согласно нормативам Международной Федерации Рофлинга, поле для рофлинга состоит из двух площадок, одна из которых квадратная, а вторая имеет ту же ширину, а длину — от 20 до 25 метров включительно. При этом все размеры должны составлять целое число метров, а общая площадь поля должна находится в диапазоне от 200 до 240 квадратных метров (включительно). Найдите наибольший и наименьший возможные размеры квадратной площадки.

Ответ: Сторона квадрата 7 или 8. Площадь 49 или 64.

Решение:

Обозначим сторону квадрата за x. При минимальной длине прямоугольника и максимальной площади поля мы находим максимальное x и наоборот, при максимальной длине прямоугольника и минимальной площади поля мы находим минимальное x

Решаем уравнение $x^2 + 20x = 240$, получаем $x = -10 + \sqrt{340}$. Это число находится между 8 и 9.

Решаем уравнение $x^2 + 25x = 200$, получаем $x = \dfrac{-25 + \sqrt{1425}}{2}$. Это число находится между 6 и 7.

Нам нужны именно большие корни этих уравнений, так как меньшие отрицательны.

Отсюда получаем, что x может находиться среди чисел от 7 до 8 включительно.

2. (2 балла) В карьере находилась куча из 20160000 песчинок. Грузовик за один рейс увозил из карьера количество песчинок, составляющее какую-то степень числа 8 (в том числе, возможно $8^0 = 1$). Мог ли он увезти из карьера всю кучу песка ровно за 1000 рейсов?

Ответ: Нет.

Решение: Заметим, что 8 в любой степени всегда даёт остаток 1 при делении на 7. Поскольку 20160000 делится на 7, это значит, что для вывоза всей кучи нужно количество поездок, кратное 7, а 1000 на 7 не делится.

3. (3 балла) На доске написано число 2017. Петя и Вася играют в следующую игру: за один ход можно вычесть из написанного на доске числа любой его натуральный делитель, кроме него самого, и записать результат этого вычитания на доске вместо исходного числа. Начинает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: Вася

Решение: Невозможно сделать ход только если на доске написана единица. При этом из нечётного числа всегда получается чётное. Вася, получив чётное число, всегда может вычесть 1 и снова получить нечётное. Таким образом, Вася всегда может получать от Пети чётные числа, и отдавать ему нечётные, а Петя наоборот (потому что у него не будет другой возможности). В конце концов Вася получит в результате своего вычитания 1 и Петя не сможет сделать ход.

4. (3 балла) Даны три приведённых квадратных трёхчлена с неотрицательными дискриминантами. Корень из дискриминанта каждого из них является корнем двух оставшихся трёхчленов. Докажите, что какие-то два их этих трёхчленов равны.

Доказательство: Обозначим наши корни из дискриминантов за d_1, d_2, d_3 и пусть, для начала, $d_1 < d_2 < d_3$.

Поскольку разность между корнями трёхчлена — это корень из дискриминанта, разделённый на модуль старшего коэффициента, для трёхчлена с дискриминантом d_2^2 получаем $d_2 = d_3 - d_1$. Аналогично $d_3 = d_2 - d_1$. Но $d_2 < d_3$, а $d_3 - d_1 > d_2 - d_1$. Получаем противоречие, значит, какие-то два дискриминанта совпадают.

Пусть теперь у двух трёхчленов корень из дискриминанта d_1, а у третьего $d_2 \neq d_1$. Тогда каждый из трёхчленов с коэффициентом d_1 имеет корни d_1 и d_2. Значит, учитывая равенство старших коэффициентов, эти трёхчлены равны.

Если же у нас три трёхчлена с одинаковым дискриминантом d^2, то число d по условию является их общим корнем, а второй корень отличается на d. Но чисел, которые отличаются от d на d всего два, это $2d$ и 0, значит, как минимум два трёхчлена совпадают.

5. (3 балла) Докажите, что уравнение $53^x - 16^y = 91$ не имеет решения в натуральных числах.

Доказательство: 53^2 даёт остаток 79 при делении на 91, а 53^2 — остаток 1. 16^2 даёт остаток 74 при делении на 91, а 16^3 — остаток 1. После этого степени зацикливаются.

Значит, равенство возможно только когда x и y делятся на 3, то есть когда в левой части стоит разность кубов. Но разность кубов $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, а второй множитель в этой формуле будет хотя бы $53^2 + 53 \cdot 16 + 16^2 > 91$. Значит, решений действительно нет.

Замечание: задачу также можно решить рассмотрением остатков при делении на делители 91, то есть 13 и 7, однако одного делителя недостаточно, надо рассматривать оба.

6. (3 балла) Окружность пересекает стороны треугольника ABC в шести точках: AB в точках C_1 и C_2, AC в точках B_1 и B_2, BC в точках A_1 и A_2, причём $AC_1 = BC_2 = \frac{1}{4}AB$, $CA_2 = BA_1 = \frac{1}{4}BC$, $AB_2 = CB_1 = \frac{1}{4}AC$. Докажите, что треугольник равносторонний.

Доказательство: У отрезков на одной прямой C_1C_2 и AB — общая середина, значит и серединный перпендикуляр у них тоже общий. Рассуждая аналогично для других сторон треугольника, получаем, что центр окружности, о которой говорится в задаче, и центр описанной окружности треугольника совпадают.

Пусть это точка O, а точка M — середина стороны AB. Тогда по теореме Пифагора $OC_1^2 = MC1^2 + OM^2 = \frac{AB^2}{16} + OM^2$, а $OA^2 = AM^2 + OM^2 = \frac{AB^2}{4} + OM^2$. Вычитая эти равенства, получаем, что разность квадратов радиусов двух окружностей составляет $\frac{3AB^2}{16}$. Аналогично можно получить, что она составляет $\frac{3BC^2}{16}$ и $\frac{3A^2}{16}$, поэтому треугольник равносторонний.

7. (4 балла) Дан треугольник ABC, в котором $AB = 2$, $BC = 8$, $AC = 8$. Из точки B провели биссектрису, которая пересекла описанную окружность этого треугольника в точке D. Найдите, чем равно DI, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

Ответ: $\frac{16}{3}$.

Решение: Согласно лемме о трезубце, $DI = AD$, а по теореме синусов в треугольнике ADB, $AD = \frac{AB \sin \angle ABD}{\sin \angle ADB} = \frac{AB}{\sin \angle ACB} \sin \angle \frac{ABC}{2}$. Выражая $\frac{AB}{\sin \angle ACB}$ через теорему синусов в треугольнике ABC, получаем $AD = \frac{AC}{\sin \angle ABC} \sin \angle \frac{ABC}{2} = \frac{AC}{2 \cos \angle \frac{ABC}{2}} = \frac{AC}{\sqrt{2 \cos(\angle ABC) + 2}} = \frac{8}{\sqrt{2 \cdot \frac{1}{8} + 2}} = \frac{8}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{16}{3}$.

8. (4 балла) На рыцарском турнире каждый рыцарь подарил каждой своей знакомой даме столько цветов, сколько у неё знакомых рыцарей, кроме него. После этого каждый два рыцаря устроили столько поединков, сколько у них общих знакомых дам. Чего было больше: подаренных цветов или устроенных поедников и во сколько раз?

Ответ: Цветов больше в два раза.

Решение: Для каждой тройки, состоящей из дамы и двух её знакомых рыцарей, произойдёт один поединок. Что касается цветов, то первый рыцарь подарит даме один цветок за знакомство со вторым, а второй за знакомство с первым, то есть их будет два.

9 класс
2 вариант

1. (2 балла) Согласно нормативам Международной Федерации Краббинга, поле для краббинга состоит из двух площадок, одна из которых квадратная, а вторая имеет ту же ширину, а длину — от 25 до 30 метров включительно. При этом все размеры должны составлять целое число метров, а общая площадь поля должна находится в диапазоне от 250 до 300 квадратных метров (включительно). Найдите наибольший и наименьший возможные размеры квадратной площадки.

Ответ: Сторона квадрата 7 или 8. Площадь 49 или 64.

Решение:

Обозначим сторону квадрата за x. При минимальной длине прямоугольника и максимальной площади поля мы находим максимальное x и наоборот, при максимальной длине прямоугольника и минимальной площади поля мы находим минимальное x

Решаем уравнение $x^2 - 30x = 250$, получаем $x = -15 + \sqrt{475}$. Это число находится между 6 и 7.

Решаем уравнение $x^2 - 25x = 300$, получаем $x = \dfrac{-25 + \sqrt{1825}}{2}$. Это число находится между 8 и 9.

Нам нужны именно большие корни этих уравнений, так как меньшие отрицательны.

Отсюда получаем, что целое x может находиться среди чисел от 7 до 8 включительно.

2. (2 балла) В карьере находилась куча из 20160000 песчинок. Грузовик за один рейс увозил из карьера количество песчинок, составляющее какую-то степень числа 9 (в том числе, возможно $9^0 = 1$). Мог ли он увести из карьера всю кучу песка ровно за 2000 рейсов?

Ответ: Да.

Решение: $20160000 = 2240000 \cdot 9 = 248888 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 = 27654 \cdot 9^3 + 2 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 = = 3072 \cdot 9^4 + 6 \cdot 9^3 + 2 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 = 341 \cdot 9^5 + 3 \cdot 9^4 + 6 \cdot 9^3 + 2 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 = = 37 \cdot 9^6 + 8 \cdot 9^5 + 3 \cdot 9^4 + 6 \cdot 9^3 + 2 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 = 4 \cdot 9^7 + 1 \cdot 9^6 + 8 \cdot 9^5 + 3 \cdot 9^4 + 6 \cdot 9^3 + 2 \cdot 9^2 + 8 \cdot 9 =$.

Это означает, что мы нашли способ увезти весь песок за 32 поездки. Если одну из них заменить на 9, в которые вывозятся в 9 раз меньше песка, количество поездок увелится на 8. Проделав такую операции 246 раз мы из 32 поездок получим 2000. Очевидно, что эту операцию прибавления 8 поездок всегда можно произвести, так как это нельзя сделать только в том случае, когда в каждой поездки уже вывозится ровно одна песчинка, то есть поездок $20160000 > 2000$.

3. (3 балла) На доске написано число 2016. Петя и Вася играют в следующую игру: за один ход можно вычесть из написанного на доске числа любой его натуральный делитель, кроме него самого, и записать результат этого вычитания на доске вместо исходного числа. Начинает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ: Петя

Решение: Невозможно сделать ход только если на доске написана единица. При этом из нечётного числа всегда получается чётное. Петя, получив чётное число, всегда может вычесть 1 и снова получить нечётное. Таким образом, Петя всегда может получать от Васи чётные числа, и отдавать ему нечётные, а Вася наоборот (потому что у него не будет другой возможности). В конце концов Петя получит в результате своего вычитания 1 и Вася не сможет сделать ход.

4. (3 балла) Даны три квадратных трёхчлена со старшими коэффициентами -1 с неотрицательными дискриминантами. Корень из дискриминанта каждого из них является корнем двух оставшихся трёхчленов. Докажите, что какие-то два их этих трёхчленов равны.

Доказательство: Обозначим наши корни из дискриминантов за d_1, d_2, d_3 и пусть, для начала, $d_1 < d_2 < d_3$.

Поскольку разность между корнями трёхчлена — это корень из дискриминанта, разделённый на модуль старшего коэффициента, для трёхчлена с дискриминантом d_2^2 получаем $d_2 = d_3 - d_1$. Аналогично $d_3 = d_2 - d_1$. Но $d_2 < d_3$, а $d_3 - d_1 > d_2 - d_1$. Получаем противоречие, значит, какие-то два дискриминанта совпадают.

Пусть теперь у двух трёхчленов корень из дискриминанта d_1, а у третьего $d_2 \neq d_1$. Тогда каждый из трёхчленов с коэффициентом d_1 имеет корни d_1 и d_2. Значит, учитывая равенство старших коэффициентов, эти трёхчлены равны.

Если же у нас три трёхчлена с одинаковым дискриминантом d^2, то число d по условию является их общим корнем, а второй корень отличается на d. Но чисел, которые отличаются от d на d всего два, это $2d$ и 0, значит, как минимум два трёхчлена совпадают.

5. (3 балла) Докажите, что уравнение $22^x - 79^y = 91$ не имеет решения в натуральных числах.

Доказательство: 22^2 даёт остаток 29 при делении на 91, а 22^3 — остаток 1. 79^2 даёт остаток 53 при делении на 91, а 79^3 — остаток 1. После этого степени зацикливаются.

Значит, равенство возможно только когда x и y делятся на 3, то есть когда в левой части стоит разность кубов. Но разность кубов $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, а второй множитель в этой формуле будет хотя бы $22^2 + 22 \cdot 79 + 79^2 > 91$. Значит, решений действительно нет.

Замечание: задачу также можно решить рассмотрением остатков при делении на делители 91, то есть 13 и 7, однако одного делителя недостаточно, надо рассматривать оба.

6. (3 балла) Окружность пересекает стороны треугольника ABC: AB в точках C_1 и C_2, AC в точках B_1 и B_2, причём $AC_1 = BC_2 = \frac{1}{5}AB$, $CB_2 = AB_1 = \frac{1}{5}AC$. Докажите, что треугольник равнобедренный.

Доказательство: У отрезков на одной прямой C_1C_2 и AB — общая середина, значит и серединный перпендикуляр у них тоже общий. Рассуждая аналогично для других сторон треугольника, получаем, что центр окружности, о которой говорится в задаче, и центр описанной окружности треугольника совпадают.

Пусть это точка O, а точка M — середина стороны AB. $MC_1 = AM - AC_1 = \dfrac{3AB}{10}$. Тогда по теореме Пифагора $OC_1^2 = MC1^2 + OM^2 = \dfrac{9AB^2}{100} + OM^2$, а $OA^2 = AM^2 + OM^2 = \dfrac{AB^2}{4} + OM^2$. Вычитая эти равенства, получаем, что разность квадратов радиусов двух окружностей составляет $\dfrac{16AB^2}{100}$. Аналогично можно получить, что она составляет $\dfrac{16A^2}{100}$, поэтому треугольник равнобедренный.

7. (4 балла) Дан треугольник ABC, в котором $AB = 4$, $BC = 4$, $AC = 1$. Из точки A провели биссектрису, которая пересекла описанную окружность этого треугольника в точке D. Найдите, чем равно DI, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC.

Ответ: $\dfrac{8}{3}$.

Решение: Согласно лемме о трезубце, $DI = CD$, а по теореме синусов в треугольнике ADC, $CD = \dfrac{AC\sin\angle CAD}{\sin\angle ADC} = \dfrac{AC}{\sin\angle ABC}\sin\angle\frac{CAB}{2}$. Выражая $\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$ через теорему синусов в треугольнике ABC, получаем $CD = \dfrac{BC}{\sin\angle CAB}\sin\angle\frac{CAB}{2} = \dfrac{BC}{2\cos\angle\frac{CAB}{2}} = \dfrac{BC}{\sqrt{2\cos\left(\angle CAB\right)+2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2\cdot\frac{1}{8}+2}} = \dfrac{4}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = \dfrac{8}{3}$.

8. (4 балла) В школе искусства занимались художники и фотографы. Некоторые из них были знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Каждый художник нарисовал парный портрет для каждых двух своих знакомых фотографов. Каждый фотограф сфотографировал каждого из своих знакомых художников по очереди вместе с каждым из его знакомых фотографов (естественно, кроме себя). Чего оказалось больше: картин или фотографий? Во сколько раз?

Ответ: Фотографий в два раза больше.

Решение: Для каждой тройки из художника A и двух фотографов B и C можно найти фотографию A и C, сделанную B, фотографию B и A, сделанную C и портрет B и C, написанный A. Получается, что фотографий в два раза больше.