8 класс

1 вариант

1. (2 балла) Существует ли натуральное четырёхзначное натуральное число с суммой цифр 21, которое делится на 14?

Ответ: Да, например 6384.

2. (2 балла) Мальчики собирали яблоки. Каждый собрал либо 10 яблок, либо 10% от общего количества собранных яблок, причём были и те, и другие. Какое наименьшее количество мальчиков могло быть?

Ответ: 6

Решение: Пример: один мальчик собрал 10 яблок, остальные по 2, всего 20.

Оценка: докажем, что меньшего количества мальчиков быть не могло. Мы знаем, что 10% от общего количества яблок — целое число, обозначим его за k. Пусть n человек собрали по десять яблок, m человек по 10%, тогда $10n = (10-m)k$, то есть $10n$ делится на $10-m$. При $m = 1$ или $m = 3$ получаем, что $10n$ делится на 9 или 7 соответственно, значит n делится на 9 или 7, то есть слишком большое. При $m = 2$ или $m = 4$ получаем, что $10n$ делится на 8 или 6 соответственно, значит n делится на 4 или 3, и $m + n \geqslant 6$. При $m \geqslant 5$ общее количество мальчиков хотя бы на 1 больше, то есть, опять же, хотя бы 6.

3. (3 балла) Решите систему уравнений: $\begin{cases} xy = 6(x+y) \\ xz = 4(x+z) \\ yz = 2(y+z) \end{cases}$

Ответ: $x = y = z = 0$ или $x = -24$, $y = \frac{24}{5}$, $y = \frac{24}{7}$

Решение: Легко убедиться, что если одна из переменных равна 0, то остальные тоже равны 0. В противном случае, систему можно преобразовать в

$$\begin{cases} \frac{1}{6} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \\ \frac{1}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{y} \end{cases}$$

Складывая два первых уравнения и вычитая последнее, получаем $\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{2}{x}$, откуда $-\frac{1}{12} = \frac{2}{x}$, то есть $x = -24$. Аналогично находим остальные неизвестные.

4. (3 балла) Даны три квадратных уравнения со старшим коэффициентом 3 и различными неотрицательными дискриминантами. Может ли дискриминант каждого из них являться корнем двух оставшихся уравнений?

Ответ: Нет.

Решение: Действительно, обозначим наши дискриминанты за d_1, d_2, d_3 и пусть $d_1 < d_2 < d_3$.

Поскольку разность между корнями уравнения — это корень из дискриминанта, разделённый на старший коэффициент, для уравнения с дискриминантов d_2 получаем $\dfrac{\sqrt{d_2}}{3} = d_3 - d_1$. Аналогично $\dfrac{\sqrt{d_3}}{3} = d_2 - d_1$. Но $\dfrac{\sqrt{d_2}}{3} < \dfrac{\sqrt{d_3}}{3}$, а $d_3 - d_1 > d_2 - d_1$. Получаем противоречие, значит, таких уравнений не существует.

5. (3 балла) Дан ребус: МИМИМИ + НЯНЯНЯ = ОЛАЛАОЙ. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Найдите МИ + НЯ.

Ответ: 119

Решение: Ребус можно переписать как ОЛАЛАОЙ =(МИ + НЯ)$\cdot$10101. Во-первых, это значит, что последняя цифра МИ + НЯ — это Й. Во-вторых, если МИ + НЯ $<$ 100, результат будет четырёхзначным. Пусть МИ + НЯ = 1ZЙ, где Z — какая-то цифра.

Тогда ОЛАЛАОЙ = 1ZЙ0000 + 1ZЙ00 + 1ZЙ. Если Й $<$ 9, то шестая и четвёртая цифры этого числа должны совпадать, но они не совпадают. Значит, Й = 9. Следовательно, И + Я = 9. Цифра Z — это на самом деле О, то есть 1. Получается, МИ + НЯ = 119

Пример существует: $848484 + 353535 = 1202019$.

6. (3 балла) Четырёхугольник разбит на 1000 треугольников. В каком наибольшем количестве различных точек могут находиться вершины этих треугольников?

Ответ: 1002

Решение: Сумма углов четырёхугольника $360°$, тысячи треугольников — $180000°$. Откуда взялись лишние $1796400°$? Каждая внутренняя вершина, в которой сходятся только углы треугольников, добавляет $360°$. Каждая вершина на стороне исходного треугольника или на стороне одного из треугольников разбиения добавляет $180°$. Для достижения максимума необходимо, чтобы были точки только второго типа и их было $179640 : 180 = 998$. Пример строится последовательным добавлением новых точек на границы исходного четырёхугольника и построенных ранее треугольников.

Добавляя три вершины исходного четырёхугольника, получаем ответ 1002.

7. (4 балла) Дан прямоугольный треугольник ABC, у которого угол A равен 60 градусам, а гипотенуза AB равна $4+4\sqrt{3}$. Через вершину B провели прямую p параллельную AC. На прямой p поставили точки D и E таким образом, что $AB = BD$, $BC = BE$. F — точка пересечения прямых AD и CE. Найдите, чему может быть равен периметр треугольника DEF.

Ответы:

$$4\sqrt{2}+2\sqrt{6}+18+10\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3}+2+2\sqrt{2}$$

$$18+10\sqrt{3}+4\sqrt{6}+6\sqrt{2}$$

$$2+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$$

Решение: Сначала вычислим стороны треугольника ABC: сторона AC лежит напротив угла $30°$, значит, равна половине гипотенузы, то есть $2+2\sqrt{3}$. Теперь по теореме Пифагора вычислим $BC = \sqrt{(4+4\sqrt{3})^2-(2+2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16+32\sqrt{3}+48-4-8\sqrt{3}-12} = \sqrt{36+24\sqrt{3}+12} = 6+2\sqrt{3}$.

Треугольник CBE прямоугольный равнобедренный с прямым углом B, следовательно, прямая CE пересекает p под углом $45°$. Треугольник ABD равнобедренный с углом при вершине B равным $120°$ или $60°$ в зависимости от расположения точки D. Значит, прямая AD пересекает p под углом $60°$ или $30°$.

В зависимости от расположения точек D и E на прямой p треугольник DEF имеет углы 30, 45 и 105; 30, 135 и 15; 60, 45 и 75; 120, 45 и 15 градусов.

Рассмотрим высоту FH в треугольнике DEF. Из величины угла E следует, что $EH = FH$.

В прямоугольном треугольнике с углами $60°$ и $30°$ катеты отличаются в $\sqrt{3}$ раз, а треугольник DFH именно такой. Значит, в первых двух вариантах $DH = \sqrt{3}FH$, а в оставшихся двух $DH = \dfrac{FH}{\sqrt{3}}$. Таким образом, $DE = |DH \pm EH|$ (знак минус появляется в тупоугольном треугольнике DEF с тупым углом при вершине D или E), то есть когда точки DE лежат по одну сторону от B) и, следовательно, $DE = FH|\sqrt{3}\pm 1|$ или $DE = FH\left|1 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|$. Выразим отсюда FH через DE. Сторона $EF = \sqrt{2}$ как гипотенуза в прямоугольном равнобедренном треугольнике EFH, а в прямоугольном треугольнике DFH гипотенуза вдвое больше меньшего катета.

Посчитаем теперь искомый периметр в каждом случае отдельно.

Углы 30, 45 и 105 градусов. Точки DE лежат по разные стороны от точки B и $DE = BD+BE = AB+BC = 6\sqrt{3}+10$. $FH = \dfrac{DE}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{6\sqrt{3}+10}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{1}{2}(6\sqrt{3}+10)(\sqrt{3}-1) = 4+2\sqrt{3}$, тогда $EF = 4\sqrt{2}+2\sqrt{6}$ и $DF = 2FH = 8+4\sqrt{3}$. Получаем периметр, равный $4\sqrt{2}+2\sqrt{6}+18+10\sqrt{3}$.

Углы 30, 135 и 15 градусов. Точки DE лежат по одну сторону от точки B и $DE = BD-BE = AB-BC = 2\sqrt{3}-2$. $FH = \dfrac{DE}{\sqrt{3}-1} = 2$, тогда $EF = 2\sqrt{2}$ и $DF = 2FH = 4$. Получаем периметр, равный $2\sqrt{3}+2+2\sqrt{2}$.

Углы 60, 45 и 75; градусов. Точки DE лежат по разные стороны от точки B и $DE = BD+BE = AB+BC = 6\sqrt{3}+10$. $FH = \dfrac{DE}{\frac{\sqrt{3}}{3}+1} = \sqrt{3}\cdot\dfrac{DE}{\sqrt{3}+1} = 4\sqrt{3}+6$, тогда $EF = 4\sqrt{6}+6\sqrt{2}$ и $DF = \dfrac{2}{\sqrt{3}}FH = 8+4\sqrt{3}$. Получаем периметр, равный $18+10\sqrt{3}+4\sqrt{6}+6\sqrt{2}$.

Углы 120, 45 и 15 градусов. Точки DE лежат по одну сторону от точки B и $DE = BD-BE = AB-BC = 2\sqrt{3}-2$. $FH = \dfrac{DE}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}\cdot\dfrac{DE}{\sqrt{3}-1} = 2\sqrt{3}$, тогда $EF = 2\sqrt{6}$, и $DF = \dfrac{2}{\sqrt{3}}FH = 4$. Получаем периметр, равный $2+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.

8. (5 баллов) На острове Глазном живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Кроме того, все жители острова либо синеглазые, либо кареглазые. Однажды встретились 100 жителей острова, после чего каждый сказал каждому одну из двух фраз: "Ты лжец" или "Ты синеглазый", причём фраз "Ты лжец" было больше половины. Какое количество кареглазых могло быть на острове? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: Ответ от 46 до 54.

Решение: Заметим, что на встрече не могло быть кареглазых рыцарей и синеглазых лжецов, так как первым не может сказать указанную фразу ни один рыцарь, а вторым — ни один лжец. Значит, островитяне на встрече делятся на синеглазых рыцарей и кареглазых лжецов. Но тогда фразу "Ты лжец" говорили друг другу люди с разным цветом глаз, а фразу "Ты синеглазый" — с одинаковым.

Пусть синеглазых рыцарей $50+k$, а кареглазых лжецов $50-k$. Мы можем ввести такие обозначения, так как сумма этих чисел 100. При этом k целое, но не обязательно натуральное число.

Тогда общее количество фраз "Ты лжец" составляет $2(50+k)(50-k) = 2\cdot 50^2 - 2k^2$. Мы знаем, что количество этих фраз больше половины, то есть больше, чем $100\cdot 99/2 = 4950$. Итак, $5000-2k^2 > 4950$, откуда $2k^2 < 50$, то есть $|k| < 5$. Значит, количество лжецов отличается от 50 не более чем на 4, то есть находится в диапазоне от 46 до 54, причём все ситуации, очевидно, возможны.

8 класс

2 вариант

1. (2 балла) Существует ли натуральное четырёхзначное натуральное число с суммой цифр 14, которое делится на 14?

Ответ: Да, например 6314.

2. (2 балла) Мальчики собирали яблоки. Каждый собрал либо 20 яблок, либо 20% от общего количества собранных яблок, причём были и те, и другие. Какое наименьшее количество мальчиков могло быть?

Ответ: 2

Решение: Пример: один мальчик собрал 5 яблок, второй 20.

Оценка: по условию ребят хотя бы двое.

3. (3 балла) Решите систему уравнений: $\begin{cases} xy = 5(x+y) \\ xz = 4(x+z) \\ yz = 2(y+z) \end{cases}$

Ответ: $x = y = z = 0$ или $x = -40$, $y = \frac{40}{9}$, $y = \frac{40}{11}$

Решение: Легко убедиться, что если одна из переменных равна 0, то остальные тоже равны 0. В противном случае, систему можно преобразовать в

$$\begin{cases} \frac{1}{5} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \\ \frac{1}{4} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \\ \frac{1}{2} = \frac{1}{z} + \frac{1}{y} \end{cases}$$

Складывая два первых уравнения и вычитая последнее, получаем $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{2}{x}$, откуда $-\frac{1}{20} = \frac{2}{x}$, то есть $x = -40$. Аналогично находим остальные неизвестные.

4. (3 балла) Даны три квадратных уравнения со старшим коэффициентом 2 и различными неотрицательными дискриминантами. Может ли дискриминант каждого из них являться корнем двух оставшихся уравнений?

Ответ: Нет.

Решение: Действительно, обозначим наши дискриминанты за d_1, d_2, d_3 и пусть $d_1 < d_2 < d_3$.

Поскольку разность между корнями уравнения — это корень из дискриминанта, разделённый на старший коэффициент, для уравнения с дискриминантов d_2 получаем $\dfrac{\sqrt{d_2}}{2} = d_3 - d_1$. Аналогично $\dfrac{\sqrt{d_3}}{2} = d_2 - d_1$. Но $\dfrac{\sqrt{d_2}}{2} < \dfrac{\sqrt{d_3}}{2}$, а $d_3 - d_1 > d_2 - d_1$. Получаем противоречие, значит, таких уравнений не существует.

5. (3 балла) Дан ребус: ЛЯЛЯЛЯ + ФУФУФУ = ГГЫГЫЫР. Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Найдите ЛЯ + ФУ.

Ответ: 109

Решение: Ребус можно переписать как ГГЫГЫЫР = (ЛЯ + ФУ) $\cdot$ 10101. Во-первых, это значит, что последняя цифра ЛЯ + ФУ — это Р. Во-вторых, если ЛЯ + ФУ < 100, результат будет четырёхзначным. Пусть ЛЯ + ФУ = $1Z$Р, где Z — какая-то цифра.

Тогда ОЛАЛАОЙ = $1Z$Р0000+$1Z$Р00+$1Z$Р. Если Р < 9, то шестая и четвёртая цифры этого числа должны совпадать, но они не совпадают. Значит, Р = 9 и четвёртая цифра (Г) больше шестой (Ы) на единицу из-за образовавшегося переноса из пятого разряда в четвёртый.

Следовательно, Я + У = 9. Цифра Z — это на самом деле Ы, то есть Г $-1 = 0$. Получается, ЛЯ + ФУ = 109.

Пример существует, действительно $757575 + 343434 = 1101009$.

6. (3 балла) Четырёхугольник разбит на 1000 треугольников. В каком наименьшем количестве различных точек могут находиться вершины этих треугольников?

Ответ: 503

Решение: Сумма углов четырёхугольника 360°, тысячи треугольников — 180000°. Откуда взялись лишние 1796400°? Каждая внутренняя вершина, в которой сходятся только углы треугольников, добавляет 360°. Каждая вершина на стороне исходного треугольника или на стороне одного из треугольников разбиения добавляет 180°. Для достижения минимума необходимо, чтобы были точки только первого типа и их было $179640 : 360 = 499$. Пример строится последовательным добавлением новых точек внутрь (не на границу) уже имеющихся треугольников.

Добавляя четыре вершины исходного четырёхугольника, получаем ответ 503.

7. (4 балла) Дан прямоугольный треугольник ABC, у которого угол A равен 60 градусам, а гипотенуза AB равна $2+2\sqrt{3}$. Через вершину B провели прямую p параллельную AC. На прямой p поставили точки D и E таким образом, что $AB = BD$, $BC = BE$. F — точка пересечения прямых AD и CE. Найдите, чему может быть равен периметр треугольника DEF.

Ответы:

$$2\sqrt{2} + \sqrt{6} + 9 + 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2}$$

$$9 + 5\sqrt{3} + 2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}$$

$$1+\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

Решение: Сначала вычислим стороны треугольника ABC: сторона AC лежит напротив угла $30°$, значит, равна половине гипотенузы, то есть $1+\sqrt{3}$. Теперь по теореме Пифагора вычислим $BC=\sqrt{(2+2\sqrt{3})^2-(1+1\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+8\sqrt{3}+12-1}$ $\sqrt{9+6\sqrt{3}+3}=6+2\sqrt{3}$.

Треугольник CBE прямоугольный равнобедренный с прямым углом B, следовательно, прямая CE пересекает p под углом $45°$. Треугольник ABD равнобедренный с углом при вершине B равным $120°$ или $60°$ в зависимости от расположения точки D. Значит, прямая AD пересекает p под углом $60°$ или $30°$.

В зависимости от расположения точек D и E на прямой p треугольник DEF имеет углы 30, 45 и 105; 30, 135 и 15; 60, 45 и 75; 120, 45 и 15 градусов.

Рассмотрим высоту FH в треугольнике DEF. Из величины угла E следует, что $EH=FH$.

В прямоугольном треугольнике с углами $60°$ и $30°$ катеты отличаются в $\sqrt{3}$ раз, а треугольник DFH именно такой. Значит, в первых двух вариантах $DH=\sqrt{3}FH$, а в оставшихся двух $DH=\dfrac{FH}{\sqrt{3}}$. Таким образом, $DE=|DH\pm EH|$ (знак минус появляется в тупоугольном треугольнике DEF с тупым углом при вершине D или E), то есть когда точки DE лежат по одну сторону от B) и, следовательно, $DE=FH|\sqrt{3}\pm 1|$ или $DE=FH\left|1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right|$. Выразим отсюда FH через DE. Сторона $EF=\sqrt{2}$ как гипотенуза в прямоугольном равнобедренном треугольнике EFH, а в прямоугольном треугольнике DFH гипотенуза вдвое больше меньшего катета.

Посчитаем теперь искомый периметр в каждом случае отдельно.

Углы 30, 45 и 105 градусов. Точки DE лежат по разные стороны от точки B и $DE=BD+BE=AB+BC=3\sqrt{3}+5$. $FH=\dfrac{DE}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{3\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{1}{2}(3\sqrt{3}+5)(\sqrt{3}-1)=2+\sqrt{3}$, тогда $EF=2\sqrt{2}+\sqrt{6}$ и $DF=2FH=4+2\sqrt{3}$. Получаем периметр, равный $2\sqrt{2}+\sqrt{6}+9+5\sqrt{3}$.

Углы 30, 135 и 15 градусов. Точки DE лежат по одну сторону от точки B и $DE=BD-BE=AB-BC=\sqrt{3}-1$. $FH=\dfrac{DE}{\sqrt{3}-1}=1$, тогда $EF=\sqrt{2}$ и $DF=2FH=2$. Получаем периметр, равный $\sqrt{3}+1+\sqrt{2}$.

Углы 60, 45 и 75; градусов. Точки DE лежат по разные стороны от точки B и $DE=BD+BE=AB+BC=3\sqrt{3}+5$. $FH=\dfrac{DE}{\frac{\sqrt{3}}{3}+1}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{DE}{\sqrt{3}+1}=2\sqrt{3}+3$, тогда $EF=2\sqrt{6}+3\sqrt{2}$ и $DF=\dfrac{2}{\sqrt{3}}FH=4+2\sqrt{3}$. Получаем периметр, равный $9+5\sqrt{3}+2\sqrt{6}+3\sqrt{2}$.

Углы 120, 45 и 15 градусов. Точки DE лежат по одну сторону от точки B и $DE=BD-BE=AB-BC=\sqrt{3}-1$. $FH=\dfrac{DE}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{DE}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}$, тогда $EF=\sqrt{6}$, и $DF=\dfrac{2}{\sqrt{3}}FH=2$. Получаем периметр, равный $1+\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

8. (5 баллов) На острове Волосатом живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Кроме того, все жители острова либо блондины, либо брюнеты. Однажды встретились 200 жителей острова, после чего каждый сказал каждому одну из двух фраз: "Ты лжец" или "Ты блондин", причём фраз "Ты лжец" было больше половины. Какое количество блондинов могло быть на острове? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Ответ: Ответ от 93 до 107.

Решение: Заметим, что на встрече не могло быть кареглазых рыцарей и синеглазых лжецов, так как первым не может сказать указанную фразу ни один рыцарь, а вторым — ни один лжец. Значит, островитяне на встрече делятся на синеглазых рыцарей и кареглазых лжецов. Но тогда фразу "Ты лжец" говорили друг другу люди с разным цветом глаз, а фразу "Ты синеглазый" — с одинаковым.

Пусть синеглазых рыцарей $100+k$, а кареглазых лжецов $100-k$. Мы можем ввести такие обозначения, так как сумма этих чисел 200. При этом k целое, но не обязательно натуральное число.

Тогда общее количество фраз "Ты лжец" составляет $2(100+k)(100-k)=2\cdot 100^2-2k^2$. Мы знаем, что количество этих фраз больше половины, то есть больше, чем $200\cdot 199/2=19900$. Итак, $20000-2k^2>19900$, откуда $2k^2<100$, то есть $|k|<\sqrt{50}$. Значит, количество лжецов отличается от 100 не более чем на 7, то есть находится в диапазоне от 93 до 107 включительно, причём все ситуации, очевидно, возможны.