

Задания первого отборочного этапа

11 класс

Задача 1. (2 балла)

1. Три высоты тетраэдра больше радиуса его вписанной сферы в три, четыре и шесть раз соответственно. Во сколько раз четвёртая высота больше радиуса вписанной сферы?

Ответ: 4

2. Три высоты тетраэдра больше радиуса его вписанной сферы в три, три и шесть раз соответственно. Во сколько раз четвёртая высота больше радиуса вписанной сферы?

Ответ: 6

3. Три высоты тетраэдра больше радиуса его вписанной сферы в три, четыре и четыре раза соответственно. Во сколько раз четвёртая высота больше радиуса вписанной сферы?

Ответ: 6

Примеры записи ответов:

14

1/4

Задача 2. (2 балла)

1. Калькулятор АЧ-2016 может выполнять две операции: извлечение квадратного корня и взятие тангенса. Изначально в калькулятор было введено число 3^{-1024} . За какое наименьшее число операций из него можно получить число, большее 1?

Ответ: 14

2. Калькулятор АЧ-2016 может выполнять две операции: извлечение квадратного корня и взятие арксинуса. Изначально в калькулятор было введено число 2^{-512} . За какое наименьшее число операций из него можно получить число, большее 1?

Ответ: 13

3. Калькулятор АЧ-2016 может выполнять две операции: извлечение кубического корня и взятие тангенса. Изначально в калькулятор было введено число 2^{-243} . За какое наименьшее число операций из него можно получить число, большее 1?

Ответ: 7

Примеры записи ответов:

10

Задача 3. (2 балла)

1. При каком наибольшем a множество значений функции $\sqrt{a(\sqrt{3} \sin \pi x + \cos \pi x)}$ целиком

содержится в области её определения?

Ответ: 25/72

2. При каком наибольшем a множество значений функции $\sqrt{a(\sin \pi x + \sqrt{3} \cos \pi x)}$ целиком содержится в области её определения?

Ответ: 2/9

3. При каком наибольшем a множество значений функции $\sqrt{\sqrt{2}a(\sin \pi x + \cos \pi x)}$ целиком содержится в области её определения?

Ответ: $9/32 \parallel 0,28125$

Задача 4. (3 балла)

1. Кубический многочлен $p(x)$ со старшим коэффициентом 1 таков, что $p'(0) = p(-1)$, $p'(1) = p(0)$, $p'(2) = p(1)$. Найдите свободный член в многочлене $p(x)$.

Ответ: 20

2. Кубический многочлен $p(x)$ со старшим коэффициентом 1 таков, что $p'(-2) = p(-1)$, $p'(-1) = p(0)$, $p'(0) = p(1)$. Найдите свободный член в многочлене $p(x)$.

Ответ: -4

3. Кубический многочлен $p(x)$ со старшим коэффициентом 1 таков, что $p'(1) = p(0)$, $p'(2) = p(1)$, $p'(3) = p(2)$. Найдите коэффициент при x в многочлене $p(x)$.

Ответ: 8

Задача 5. (3 балла)

1. В стране есть 11 городов, некоторые из которых соединены почтовыми рейсами. Чтобы письмо дошло из одного города в другой, на него нужно наклеить столько марок, сколько рейсов для это требуется (используется маршрут, требующий наименьшего количества рейсов). Известно, что даже если два города не соединены рейсом, послать письмо из одного в другой всегда возможно.

Под Новый Год мэры всех городов послали друг другу поздравительные письма. Какое наибольшее количество марок могло им всем потребоваться?

Ответ: 440

2. В стране есть 10 городов, некоторые из которых соединены почтовыми рейсами. Чтобы письмо дошло из одного города в другой, на него нужно наклеить столько марок, сколько рейсов для это требуется (используется маршрут, требующий наименьшего количества рейсов). Известно, что даже если два города не соединены рейсом, послать письмо из одного в другой всегда возможно.

Под Новый Год мэры всех городов послали друг другу поздравительные письма. Какое наибольшее количество марок могло им всем потребоваться?

Ответ: 330

3. В стране есть 9 городов, некоторые из которых соединены почтовыми рейсами. Чтобы письмо дошло из одного города в другой, на него нужно наклеить столько марок, сколько рейсов для это требуется (используется маршрут, требующий наименьшего количества рейсов). Известно, что даже если два города не соединены рейсом, послать письмо из одного в другой всегда возможно.

Под Новый Год мэры всех городов послали друг другу поздравительные письма. Какое наибольшее количество марок могло им всем потребоваться?

Ответ: 240

Примеры записи ответов:

1000

Задача 6. (3 балла)

1. Коля взял дробно-линейную функцию $\frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c, d — различные по абсолютной величине числа, и сложил её со всеми оставшимися 23 функциями, которые получаются из неё перестановкой чисел a, b, c, d . Найдите корень суммы всех этих функций, не зависящий от чисел a, b, c, d .

Ответ: -1

2. Аня взяла дробно-линейную функцию $\frac{ax-b}{cx-d}$, где a, b, c, d — различные по абсолютной величине числа, и сложила её со всеми оставшимися 23 функциями, которые получаются из неё перестановкой чисел a, b, c, d . Найдите корень суммы всех этих функций, не зависящий от чисел a, b, c, d .

Ответ: 1

3. Дима взял дробно-линейную функцию $\frac{ax+2b}{cx+2d}$, где a, b, c, d — положительные числа, и сложил её со всеми оставшимися 23 функциями, которые получаются из неё перестановкой чисел a, b, c, d . Найдите корень суммы всех этих функций, не зависящий от чисел a, b, c, d .

Ответ: -1

Примеры записи ответов:

14

1/4

-1,4

Задача 7. (3 балла)

1. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами 15 и 12 соответственно пересекаются в точках А и В. Точка Х лежит на луче АВ и такова, что $O_1X = 41$, $AX = 52$. Найдите расстояние между центрами окружностей.

Ответ: 9

2. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами 10 и 6 соответственно пересекаются в точках А и В. Точка Х лежит на луче ВА и такова, что $O_1X = 17$, $AX = 9$. Найдите расстояние между центрами окружностей.

Ответ: 8

3. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами 5 и 13 соответственно пересекаются в точках А и В. Точка Х лежит на луче АВ и такова, что $O_2X = 37$, $XВ = 30$. Найдите расстояние между центрами окружностей.

Ответ: 12

Задача 8. (3 балла)

1. Функция $f(x)$ такова, что $f(2x)=6 - f(x)/2$. Найдите площадь подграфика функции $f(1 - x + 2|x|)$ на участке от -1 до 3.

Ответ: 16

2. Функция $f(x)$ такова, что $f(3x)=8 - f(x)/3$. Найдите площадь подграфика функции $f(1 - 3,5x + 4,5|x|)$ на участке от -1 до 8.

Ответ: 54

3. Функция $f(x)$ такова, что $f(4x)=7,5 - f(x)/4$. Найдите площадь подграфика функции $f(1 - 7x + 8|x|)$ на участке от -1 до 15.

Ответ: 96

Задача 9. (4 балла)

1. Найдите последнюю цифру целой части числа $(\sqrt{15} + \sqrt{13})^{2012}$.

Ответ: 7

2. Найдите последнюю цифру целой части числа $(\sqrt{22} + \sqrt{20})^{2002}$.

Ответ: 3

3. Найдите последнюю цифру целой части числа $(\sqrt{37} + \sqrt{35})^{2016}$.

Ответ: 1

Примеры записи ответов:

0

Задача 10. (4 балла)

1. Правильный додекаэдр (12-гранник с 20 вершинами) вписан в сферу радиуса 1. Из одной из вершин додекаэдра провели векторы ко всем остальным и посчитали скалярные произведения для каждой пары различных векторов, всего 171 штука. Чему равна сумма этих скалярных произведений?

Ответ: 180

2. Правильный икосаэдр (20-гранник с 12 вершинами) вписан в сферу радиуса 1. Из одной из вершин икосаэдра провели векторы ко всем остальным и посчитали скалярные произведения для каждой пары различных векторов, всего 55 штук. Чему равна сумма этих скалярных произведений?

Ответ: 60

3. Куб описан вокруг сферы радиуса 1. Из одного из центров граней куба проведены векторы ко всем остальным центрам граней и вершинам. У получившихся векторов посчитали скалярные произведения для каждой пары различных векторов, всего 78 штук. Чему равна сумма этих скалярных произведений?

Ответ: 76

10 класс

Задача 1. (2 балла)

1. Для функции $f(x)$ выполняется условие $f(f(f(x))) + 2 f(f(x)) + 4 f(x) + 8x = 0$. Найдите $f(f(f(f(3))))$.

Ответ: 48

3. Для функции $f(x)$ выполняется условие $f(f(f(x))) - 2 f(f(x)) + 4 f(x) - 8x = 0$. Найдите $f(f(f(f(5))))$.

Ответ: 80

3. Для функции $f(x)$ выполняется условие $f(f(f(x))) + 3 f(f(x)) + 9 f(x) + 27x = 0$. Найдите $f(f(f(f(2))))$.

Ответ: 162

Примеры записи ответов:

14

1/4

-0,25

Задача 2. (2 балла)

1. В квадратном трёхчлене поменяли местами первый и второй коэффициенты, после чего результат сложили с исходным трёхчленом. Получился третий квадратный трёхчлен, у которого оказался единственный корень. Чему он может быть равен? Если правильных ответов несколько, перечислите их через запятую или точку с запятой.

Ответ: $-1/2$ || $-0,5$

2. В квадратном трёхчлене поменяли местами первый коэффициент и свободный член, после чего результат сложили с исходным трёхчленом. Получился третий квадратный трёхчлен, у которого оказался единственный корень. Чему он может быть равен? Если правильных