III. Задания отборочного этапа олимпиады 2015-16 года

Задания первого отборочного этапа

11 класс

Задача 1. (1 балл)

1. Дана функция $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}x}$. Найдите $\underbrace{f(f(\ldots(-\sqrt{3}-2)\ldots))}_{2015\ раз}$.

Ответ: 1

2. Дана функция $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}x+1}$. Найдите $\underbrace{f(f(\ldots(\sqrt{3})\ldots))}_{2017\ раз}$.

Ответ: 0

3. Дана функция $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}x-1}{x+\sqrt{3}}$. Найдите $\underbrace{f(f(\ldots(1)\ldots))}_{2013\ раз}$.

Ответ: -1

__Примеры записи ответов:__
1/4
0,25
10

Задача 2. (2 балла)

1. На доске было написано число от 0 до 2 включительно. Каждый из тридцати учеников класса подходил к доске, стирал написанное там на данный момент число *x* и писал вместо него $\cos\frac{\pi}{2}x$. При каком начальном значении числа итоговый результат будет максимальным? Если ответов несколько, укажите их в произвольном порядке через точку с запятой.

Ответ: 1

2. На доске было написано число от нуля до двух включительно. Каждый из тридцати учеников класса подходил к доске, стирал написанное там на данный момент число *x* и писал вместо него $\cos\frac{\pi}{2}x$. При каком начальном значении числа итоговый результат будет минимальным? Если ответов несколько, укажите их в произвольном порядке через точку с запятой.

Ответ: 0; 2 | 2; 0

3. На доске было написано число от 0 до 1 включительно. Каждый из двадцати пяти учеников класса подходил к доске, стирал написанное там на данный момент число *x* и писал вместо него $\frac{1}{2}\cos\pi x$. При каком начальном значении числа итоговый результат будет максимальным? Если ответов несколько, укажите их в произвольном порядке через точку с запятой.

Ответ: 0; 1 || 1; 0

Примеры записи ответов:
1/4
0,25; 0,5

Задача 3. (2 балла)

1. Многочлен $P(x)$ третьей степени, а также его первая, вторая и третья производные принимают при $x = 6$ значение 1. Найдите P(0).

Ответ: -23

2. Многочлен $P(x)$ третьей степени, а также его первая, вторая и третья производные принимают при $x = 3$ значение 1. Найдите P(0).

Ответ: -2

3. Многочлен $P(x)$ третьей степени, а также его первая, вторая и третья производные принимают при $x = -3$ значение 1. Найдите P(0).

Ответ: 13

Примеры записи ответов:
1/4
0,25
-10

Задача 4. (3 балла)

1. В пространстве даны 34 различных вектора с натуральными координатами, начинающиеся в точке (0; 0; 0). Какое наименьшее значение может принимать сумма всех их координат?

Ответ: 203

2. В пространстве даны 36 различных векторов с натуральными координатами, начинающиеся в точке (0; 0; 0). Какое наименьшее значение может принимать сумма всех их координат?

Ответ: 218

3. В пространстве даны 37 различных векторов с целыми неотрицательными координатами, начинающиеся в точке (0; 0; 0). Какое наименьшее значение может принимать сумма всех их координат?

Ответ: 115

Примеры записи ответов:
239
Ответ: [-1;7]

Задача 5. (3 балла)

1. Даны равенства $\log_a b + \log_b c + \log_c a = \log_b a + \log_c b + \log_a c = 3{,}5$. Найдите $\log_a b$. Если ответов несколько, укажите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 1/2; 1; 2 | 0,5; 1; 2

2. Даны равенства $\log_a b + \log_b c + \log_c a = \log_b a + \log_c b + \log_a c = -1{,}5$. Найдите $\log_a b$. Если ответов несколько, укажите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: -2; -1/2; 1 | -2; -0,5; 1

3. Даны равенства $\log_a b + \log_b c + \log_c a = \log_b a + \log_c b + \log_a c = -1$. Найдите $\log_a b$. Если ответов несколько, укажите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: -1; 1

<u>Примеры записи ответов:</u>
1/4
0,25; 0,5

Задача 6. (3 балла)

1. Даны четыре сферы радиуса $\frac{\sqrt{6}}{2}-1$, попарно касающиеся друг друга внешним образом. Найдите радиус сферы, которой они все касаются внутренним образом.

Ответ: 0,5 | 1/2

2. Даны четыре сферы радиуса $\sqrt{6}+2$, попарно касающиеся друг друга внешним образом. Найдите радиус сферы, которой они все также касаются внешним образом.

Ответ: 1

3. Четыре сферы радиуса r попарно касаются друг друга внешним образом. Сфера радиуса $\sqrt{6}+2$ касается их всех внутренним образом. Найдите r.

Ответ: 2

<u>Примеры записи ответов:</u>
1/4
0,25
10

Задача 7. (3 балла)

1. При каких значениях параметров a и b (a не равно b) множество значений функции $a\sqrt{(a-x)(x-b)}-b$ совпадает с областью её определения? В ответе укажите все возможные значения числа a в произвольном порядке через точку с запятой.

Ответ: -2; 2 | 2; -2

2. При каких значениях параметров a и b (a не равно b) множество значений функции $a\sqrt{(b-x)(x-a)}+b$ совпадает с областью её определения? В ответе укажите все возможные значения числа a в произвольном порядке через точку с запятой.

Ответ: -2; 2 | 2; -2

3. При каких значениях параметров a и b (a не равно b) множество значений функции $a(\sqrt{(a-x)(x-b)}-b)$ совпадает с областью её определения? В ответе укажите все возможные значения числа b в произвольном порядке через точку с запятой.

Ответ: 0; -1 | -1; 0

Примеры записи ответов:
1/4
0,25; 0,5

Задача 8. (4 балла)

1. При каких значениях параметра a неравенство $(a^2-8a+12)|x|+(-a+8)\sqrt{x^2-1}>0$ не имеет решений? Ответ записать в виде промежутка. Если множество ответов состоит из нескольких промежутков, перечислить их через точку с запятой.

Ответ: [4;5]

2. При каких значениях параметра a неравенство $(a^2-a-6)|x|+(-a-9)\sqrt{x^2-4}>0$ не имеет решений? Ответ записать в виде промежутка. Если множество ответов состоит из нескольких промежутков, перечислить их через точку с запятой.

Ответ: [-2;3]

3. При каких значениях параметра a неравенство $(a^2-6a-7)|x|+(-a-19)\sqrt{x^2-9}>0$ не имеет решений? Ответ записать в виде промежутка. Если множество ответов состоит из нескольких промежутков, перечислить их через точку с запятой.
Ответ: [-1;7]

Примеры записи ответов:
[1; 2)
[0; 1]; (2; 3)

Задача 9. (4 балла)

1. В городе Джентльвилле живут 15 джентльменов, любые двое из которых либо дружат, либо враждуют. В какой-то момент каждый джентльмен попросил каждого из своих друзей послать открытку ненависти каждому из своих врагов (джентльмен А просит джентльмена В послать открытку всем врагам джентльмена В). Каждый из джентльменов выполнил все просьбы, при этом он посылал каждому из своих врагов такое количество открыток, сколько раз его об этом просили.

Какое наибольшее количество открыток могло быть послано?

Ответ: 734.

2. В городе Джентльтауне живут 11 джентльменов, любые двое из которых либо дружат, либо враждуют. В какой-то момент каждый джентльмен попросил каждого из своих друзей послать открытку ненависти каждому из своих врагов (джентльмен A просит джентльмена B послать открытку всем врагам джентльмена B). Каждый из джентльменов выполнил все просьбы, при этом он посылал каждому из своих врагов такое количество открыток, сколько раз его об этом просили. Какое наибольшее количество открыток могло быть послано?

Ответ: 274.

3. В городе Джентль-сити живут 19 джентльменов, любые двое из которых либо дружат, либо враждуют. В какой-то момент каждый джентльмен попросил каждого из своих друзей послать открытку ненависти каждому из своих врагов (джентльмен A просит джентльмена B послать открытку всем врагам джентльмена B). Каждый из джентльменов выполнил все просьбы, при этом он посылал каждому из своих врагов такое количество открыток, сколько раз его об этом просили. Какое наибольшее количество открыток могло быть послано?

Ответ: 1538.

<u>Примеры записи ответов:</u>
100

Задача 10. (5 баллов)

1. ABCD — трапеция с основаниями $AD = 16$ и BC = 8. O — одна из точек пересечения окружностей, построенных на боковых сторонах трапеции как на диаметрах и эта точка лежит внутри трапеции. Треугольник BCM построен на стороне BC во внешнюю относительно трапеции сторону и подобен треугольнику ADO (вершины треугольников перечислены в том порядке, в котором они соответствуют друг другу). Прямая OM пересекает основания BC и AD в точках K и L соответственно. Известно, что $OK = 5$, $OL = 6$. Найдите наибольшее из возможных значений длины отрезка BK.

Ответ: 5

2. ABCD — трапеция с основаниями $AD = 14$ и BC = 9. O — одна из точек пересечения окружностей, построенных на боковых сторонах трапеции как на диаметрах и эта точка лежит внутри трапеции. Треугольник BCM построен на стороне BC во внешнюю относительно трапеции сторону и подобен треугольнику ADO (вершины треугольников перечислены в том порядке, в котором они соответствуют друг другу). Прямая OM пересекает основания BC и AD в точках K и L соответственно. Известно, что $OK = 4$, $OL = 7$. Найдите наибольшее из возможных значений длины отрезка BK.

Ответ: 6

3. ABCD — трапеция с основаниями $AD = 15$ и BC = 10. O — одна из точек пересечения окружностей, построенных на боковых сторонах трапеции как на диаметрах и эта точка лежит внутри трапеции. Треугольник BCM построен на стороне BC во внешнюю относительно трапеции сторону и подобен треугольнику ADO (вершины треугольников перечислены в том порядке, в котором они соответствуют друг другу).

котором они соответствуют друг другу). Прямая OM пересекает основания BC и AD в точках K и L соответственно. Известно, что $OK = 4$, $OL = 9$. Найдите наименьшее из возможных значений длины отрезка BK.

Ответ: 4

Примеры записи ответов:
1/4
0,25
10