8 класс
1 вариант

1. (2 балла) Мальчик Вася пытался вспомнить распределительный закон умножения и написал формулу: $a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$. Потом он подставил в эту формулу три ненулевых числа и обнаружил, что получилось верное равенство. Найдите сумму этих чисел.

Ответ: 1

Решение: Раскроем скобки в правой части: $a+bc = a^2+ac+ab+bc$, откуда $a(a+b+c-1) = 0$. Так как $a \neq 0$, мы получаем $a + b + c = 1$.

2. (2 балла) Числа p и q – различные ненулевые корни квадратного уравнения $x^2-ax+b = 0$, а числа a и b – различные ненулевые корни квадратного уравнения $x^2 - px - q = 0$. Чему могут быть равны эти числа?

Ответ: $a = 1$, $b = -2$, $p = -1$, $q = 2$.

Применив к обоим уравнениям теорему Виета, составим систему уравнений:

Решение:

$$\begin{cases} p + q = a \\ a + b = p \\ pq = b \\ ab = -q \end{cases}.$$

Сложив два первых уравнения, после сокращения получаем: $b+q = 0$, т.е. $b = -q$. Подставив $-q$ вместо b в третье и четвёртое уравнения и сократив на $q \neq 0$, получаем, что $p = -1$ и $a = 1$.

Теперь из первых двух уравнений находим $q = 2$ и $b = -2$.

3. (2 балла) Петя, Вася и Тёма играют в игру. Первым ходит Петя, затем Вася, потом Тёма, затем снова Петя и т.д. Изначально на доске было написано число $123456789\ldots123456789$ (последовательность 123456789 повторяется 2015 раз). Своим ходом каждый игрок может стереть одну из цифр написанного на доске числа и прибавить её к получившемуся числу. Игра заканчивается, когда на доске остаётся одна цифра. Петя выигрывает, если это цифра 1, 4 или 7, Вася – если 2, 5 или 8, в остальных случаях выигрывает Тёма. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Тёма.

Решение: Заметим, что исходное число делится на три: его сумма цифра равна $45 \cdot 2015$.

Разрешённые ходы не меняют делимости на 3. В самом деле, число $a \cdot 10^{k+1} + b \cdot 10^k + c$ превращается в $a \cdot 10^k + b + c$. Разность этих чисел составляет $9a \cdot 10^k + (10^k - 1)b$, что делится на 3.

Таким образом, в конце получается одна из цифр, делящихся на 3, то есть выигрывает Тёма.

4. (3 балла) Шестиугольник $ABCDEF$ и точка M внутри него таковы, что четырёхугольники $ABCM$, $CDEM$ и $EFAM$ – параллелограммы. Докажите, что треугольники BDF и ACE равны.

Решение: Поскольку $ABCM$ и $CDEM$ параллелограммы, стороны AB, CM и DE параллельны и равны. Значит, $ABDE$ тоже параллелограмм, откуда $BD = AE$.

Аналогично получаем равенство остальных сторон. Следовательно, треугольники равны по третьему признаку.

5. (3 балла) В треугольник ABC вписан квадрат $KLMN$ со стороной 1: точки K и L лежат на стороне AC, точки M и N – на сторонах AB и BC соответственно. Площадь квадрата равна половине площади треугольника. Найдите длину высоты BH треугольника ABC.

Ответ: 2.

Решение 1:
$AC \cdot BH = 2S_{ABC} = 4S_{KLMN} = 4$.

Точки A, L, K, C лежат на прямой именно в таком порядке. Кроме того, треугольник ABC очевидно остроугольный. Из условия следует, что

$$S_{AML}+S_{CKN}+S_{BMN}=S_{KLMN}.$$

$$\frac{AL\cdot 1}{2}+\frac{CK\cdot 1}{2}+\frac{(BH-1)\cdot 1}{2}=1.$$

$$AL+CK+BH-1=2.$$

$$AC-1+BH-1=2$$

$$AC+BH=4=AC\cdot BH=2+\frac{AC\cdot BH}{2}.$$

$$2AC+2BH=AC+BH+4$$

$$(AC-2)(BH-2)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} AC=2 \\ BH=2 \end{array}\right..$$

Если из равенств этой системы выполняется только одно, то $AC\cdot BH$ получится либо больше, либо меньше 4, что невозможно. Значит, $AC=BH=2$.

Решение 2:

Точки A, L, K, C лежат на прямой именно в таком порядке. Кроме того, треугольник ABC очевидно остроугольный.

На луче LK возьмём такую точку X, что $AL=LX$. Тогда треугольники AML и XML равны. Аналогично на луче KL возьмём такую точку Y, что $CK=KX$. Тогда треугольники CKN и YNL равны. Пусть Z – точка пересечения MX и NY. Треугольник MNZ равен треугольнику MNB по стороне MN и прилежащим к ней углам.

Получаем равенство:

$$S_{KLMN}=S_{AML}+S_{CKN}+S_{BMN}=S_{XML}+S_{YKN}+S_{MNZ}=S_{KLMN}\pm S_{XYZ},$$

где знак $\pm$ зависит от того, лежит точка Z внутри треугольника ABC или снаружи. Значит, эта площадь должна быть равна 0, т.е. точка Z лежит на AC. Отсюда высота треугольника ZMN, опущенная из на MN, равна стороне квадрата. Но эта высота равна высоте треугольника BMN, опущенная из на MN. Если к этой высоте прибавить сторону квадрата, получится высота BH, откуда $BH=2$.

6. (3 балла) Реки Штука и Турка в некоторой точке сливаются в реку Штукатурка. Города A и B находятся на реках Штука и Турка соответственно, причём город A в два раза дальше от точки слияния, чем город B. Пароход на путь из A в B по этим рекам тратит столько же времени, сколько и на путь из B в A. Докажите, что скорости течений Штуки и Турки отличаются не более, чем в два раза.

Решение:

Обозначим расстояние от точки слияния рек до города B за S, собственную скорость парохода за x, скорости Штуки и Турки за u и v соответственно. Составим уравнение:

$$\frac{2S}{x+u}+\frac{S}{x-v}=\frac{S}{x+v}+\frac{2S}{x-u}.$$

Сокращая на S и перенося слагаемые, относящие к одному городу в одну часть, получаем:

$$\frac{1}{x-v}-\frac{1}{x+v}=\frac{2}{x-u}-\frac{2}{x+u}$$

$$\frac{2v}{x^2-v^2} = \frac{4u}{x^2-u^2}$$

$$v(x^2-u^2) = 2u(x^2-v^2)$$

Вырыжаем отсюда x^2:
$x^2 = \frac{uv(u-2v}{v-2u}$.
Так как числа x^2 и uv положительные, $u-2v$ и $v-2u$ должны быть одного знака. Но оба положительными они быть не могут, так как это бы значило, что $u > 2v > 4u$. Значит, они оба отрицательные, из чего очевидно следует утверждение задачи.

7. (5 баллов) В клетках таблицы 5×13 расставлены числа 0, 1 и 2, так, что в любом квадрате 2×2 есть все три различных числа. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 92

Решение:
Пример:

2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Оценка:
Рассмотрим левый верхний квадрат 2×2 прямоугольника 5×13. В нём есть как минимум две не-двойки, и как минимум одна из них находится на стороне или в углу прямоугольника. Назовём эту клетку *отмеченной.* Рассмотрев остальные углы прямоугольника, получим всего не менее четырёх отмеченных клеток, т.е. клеток на границе прямоугольника, в которых написаны не тройки.

Левый верхний и правый нижний прямоугольники 4×12 не содержат общих отмеченных клеток, значит в каком-то из них содержится не более двух отмеченных клеток. Этот прямоугольник разбивается на квадраты 2×2, сумма чисел в каждом из которых не более 5. Значит, всего в этом прямоугольнике общая сумма чисел не более 60.

Вне этого прямоугольника 4×12 осталось 17 клеток, из которых не менее двух отмеченных. Сумма чисел в этих клетках не более $15 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 32$. Итого получаем общую сумму не более 92.

8. (5 баллов) Аня и Коля собирали яблоки. Оказалось, что Аня собрала столько же яблок, сколько Коля собрал процентов от общего числа собранных ими яблок, при этом Коля собрал нечётное число яблок. Сколько яблок собрали Аня и Коля вместе?

Ответ: 25, 300, 525, 1900, 9900.

Решение:

Все дополнительные переменные, которые будут вводится по ходу решения, натуральные.

Обозначим количество яблок, собранных Колей, за k, количество яблок, собранных Аней, за a, а общее количество собранных яблок, за n. Аня собрала столько же яблок, сколько Коля собрал процентов от общего числа собранных ими яблок, значит, $a = \frac{k}{n} \cdot 100$, откуда $100k = an$

Пусть a чётное число. Тогда подставив в полученное равенство $n = a + k$, получаем $100k = a(a+k)$. Пусть $d = \text{НОД}(a,k)$, тогда $k = dx$ и $a = dy$, где x и y взаимно просты. Получаем равенство $100dx = dy(dx+dy)$, сократив которое на d имеем $100x = dy(x+y)$. Так как x, y и $x+y$ взаимно просты, и $dy(x+y)$ делится на x, получаем, что d делится на x.

При этом из нечётности числа k и чётности a (и, следовательно, y) следует, что числа d, x и $x+y$ нечётны. Поскольку $dy(x+y)$ делится на 4, y делится на 4, т.е. $y = 4z$.

Получаем $100x = 4dz(x + 4z)$, откуда $25x = dz(x + 4z)$. Так как $\frac{25}{z(x+4z)} = \frac{d}{x}$ целое число, получаем, что 25 делится на $z(x + 4z)$. При этом $x + 4z > z$.

1) $z = 1$, $x + 4z = 5$. Тогда $x = 1$, $d = \frac{25x}{z(x+4z)} = 5$. Значит, $k = dx = 5$, $a = dy = 4dz = 20$, откуда $n = 25$.

2) $z = 1$, $x + 4z = 25$. Тогда $x = 21$, $d = \frac{25x}{z(x+4z)} = 21$. Значит, $k = dx = 21^2 = 441$, $a = dy = 4dz = 84$, откуда $n = 525$.

Пусть теперь a нечётное число (а n, соответственно, чётное). Тогда подставив в полученное равенство $a = n - k$, получаем $100k = n(n - k)$. Пусть $d = \text{НОД}(n, k)$, тогда $k = dx$ и $n = dy$, где x и y взаимно просты. Получаем равенство $100dx = dy(dy - dx)$, сократив которое на d имеем $100x = dy(y - x)$. Так как x, y и $y - x$ взаимно просты, и $dy(y - x)$ делится на x, получаем, что d делится на x.

При этом из нечётности чисел k и a следует, что числа d, x и $y - x$ также нечётны. Поскольку $dy(x + y)$ делится на 4, y делится на 4, т.е. $y = 4z$.

Получаем $100x = 4dz(4z - x)$, откуда $25x = dz(4z - x)$. Так как $\frac{25}{z(4z-x)} = \frac{d}{x}$ целое число, получаем, что 25 делится на $z(4z - x)$. Таким образом, числа z и $4z - x$ дают в произведении 1, 5 или 25 и при этом взаимно просты. Значит, одно из них единица, а второе делитель 25.

1) $z = 1$, $4z - x = 1$. Тогда $x = 3$, $d = \frac{25x}{z(4z-x)} = 75$. Значит, $k = dx = 225$, $n = dy = 4dz = 300$.

2) $z = 1$; $4z - x = 5$ или $4z - x = 25$ – эти случаи невозможны, так как получается, что $4z - x > 4z = 4$.

3) $z = 5$, $4z - x = 1$. Тогда $x = 19$, $d = \frac{25x}{z(4z-x)} = 95$. Значит, $k = dx = 19 \cdot 95 = 1805$, $n = dy = 4dz = 1900$.

4) $z = 25$, $4z - x = 1$. Тогда $x = 99$, $d = \frac{25x}{z(4z-x)} = 99$. Значит, $k = dx = 99^2 = 9801$, $n = dy = 4dz = 9900$.

8 класс
2 вариант

1. (2 балла) Мальчик Петя пытался вспомнить распределительный закон умножения и написал формулу: $(a \times b) + c = (a + c) \times (b + c)$. После этого он подставил в эту формулу три ненулевых числа и обнаружил, что получилось верное равенство. Найдите сумму этих чисел.

Ответ: 1

2. (2 балла) Числа p и q – различные ненулевые корни квадратного уравнения $x^2+ax-b=0$, а числа a и b – различные ненулевые корни квадратного уравнения $x^2+px-q=0$. Чему могут быть равны эти числа?

Ответ: $a=-1$, $b=2$, $p=-1$, $q=2$.

3. (2 балла) Полина, Василиса и Таня играют в игру. Первой ходит Полина, затем Василиса, потом Таня, затем снова Полина и т.д. Изначально на доске было написано число $123456789\ldots123456789$ (последовательность 123456789 повторяется 2014 раз). Своим ходом каждая девочка может стереть одну из цифр написанного на доске числа и прибавить её к получившемуся числу. Игра заканчивается, когда на доске остаётся одна цифра. Полина выигрывает, если это цифра 1, 4 или 7, Василиса – если 2, 5 или 8, в остальных случаях выигрывает Таня. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Таня.

4. (3 балла) Шестиугольник $ABCDEF$ и точка O внутри него таковы, что четырёхугольники $BCDO$, $DEFO$ и $FABO$ – параллелограммы. Докажите, что треугольники BDF и ACE равны.

5. (3 балла) В треугольник ABC вписан квадрат $MNPQ$ со стороной 2: точки M и N лежат на стороне BC, точки P и Q – на сторонах AB и AC соответственно. Площадь квадрата равна половине площади треугольника. Найдите длину высоты AH треугольника ABC.

Ответ: 4.

6. (3 балла) Реки Бура и Тинка в некоторой точке сливаются в реку Буратинка. Города A и B находятся на реках Бура и Тинка соответствнно, причём город B в три раза дальше от точки слияния, чем город A. Катер на путь из A в B по этим рекам тратит столько же времени, сколько и на путь из B в A. Докажите, что скорости течений Буры и Тинки отличаются не более, чем в три раза.

7. (5 баллов) В клетках таблицы 5×11 расставлены числа 0, 1 и 2, так, что в любом квадрате 2×2 есть все три различных числа. Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 32

8. (5 баллов) Петя и Вася собирали грибы. Оказалось, что Петя собрал столько же грибов, сколько Вася собрал процентов от общего числа собранных ими грибов. При этом Вася собрал нечётное число грибов. Сколько грибов собрали Петя и Вася вместе?

Ответ: 25, 300, 525, 1900, 9900.