Математический турнир «Школково-баттл»

Категория «ЕГЭ», 13 мая 2018 года

Ответом к задачам 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ справа от номера соответствующего задачи, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак “минус” или запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

Задача 1.1 (1 балл)

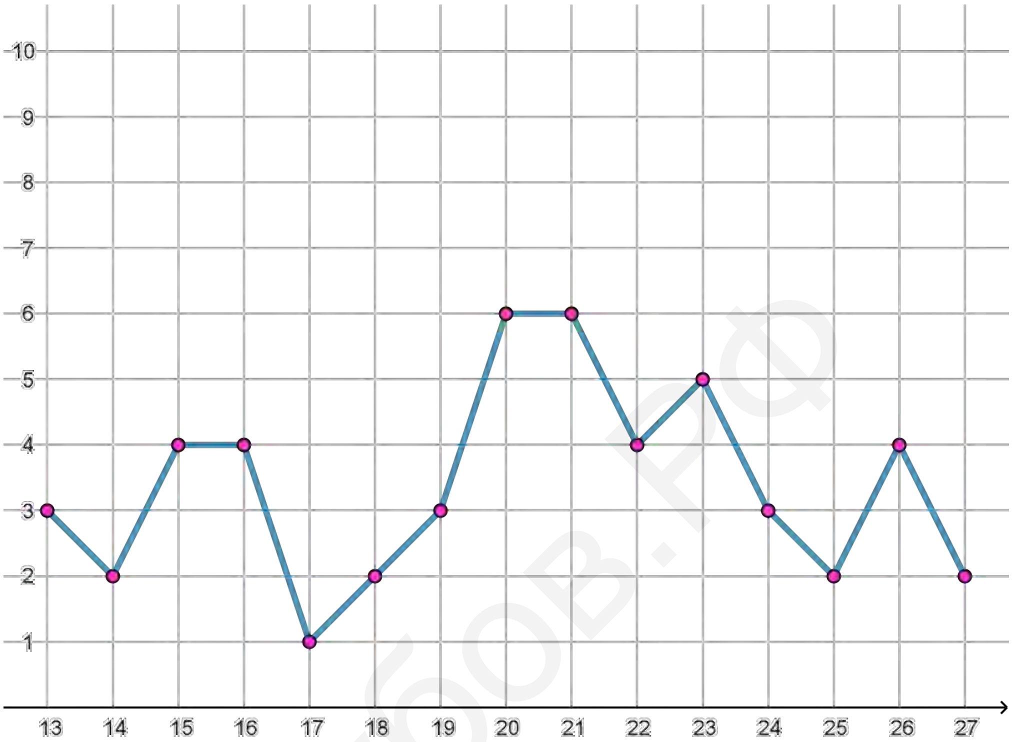
45 иногородних и 8 иностранных студентов необходимо расселить по комнатам общежития. В каждой комнате может жить не более четырех человек. Определите наименьшее количество комнат, необходимое для расселения студентов, если в каждой комнате должен проживать хотя бы один иногородний студент.

Задача 1.2 (1,5 балла)

На первый курс мехмата объявлен набор, ограниченный 467 студентами. Планируется укомплектовать два потока отделения математики и два потока отделения механики. На первом потоке отделения математики должно обучаться ровно 29% от общего числа студентов первого курса. На втором потоке отделения математики – ровно 113 студентов. Какое наибольшее число студентов может обучаться на втором потоке отделения механики, если на первом потоке отделения механики должно обучаться ровно 22% от общего числа студентов первого курса?

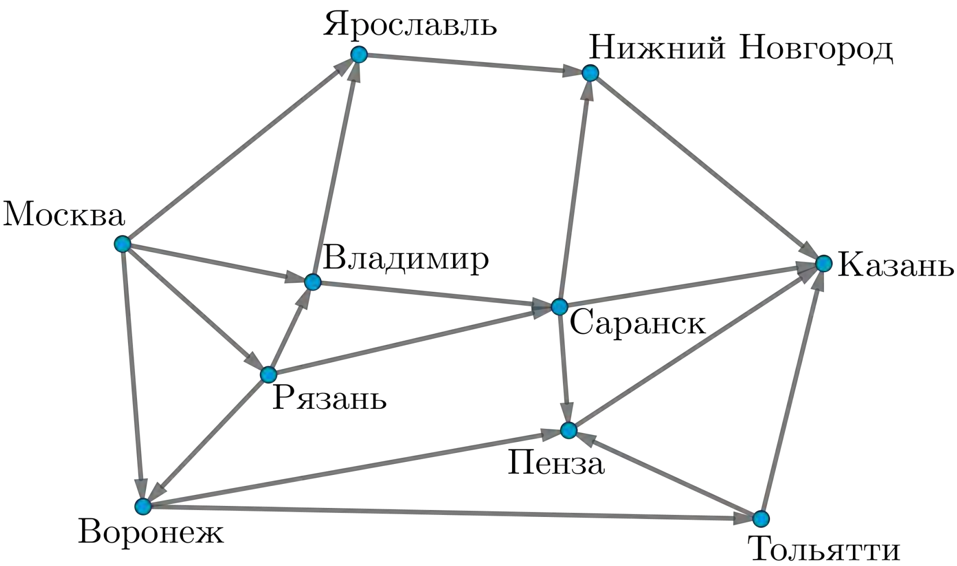
Задача 2.1 (1 балл)

На рисунке жирными точками показана средняя продолжительность разговоров по мобильному телефону в городе Бендеры с 13 по 27 июня. По горизонтали указывается день месяца, по вертикали – средняя продолжительность разговоров в соответствующий день в минутах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа в период с 13 по 27 июня средняя продолжительность разговоров в день впервые составила 3 минуты.



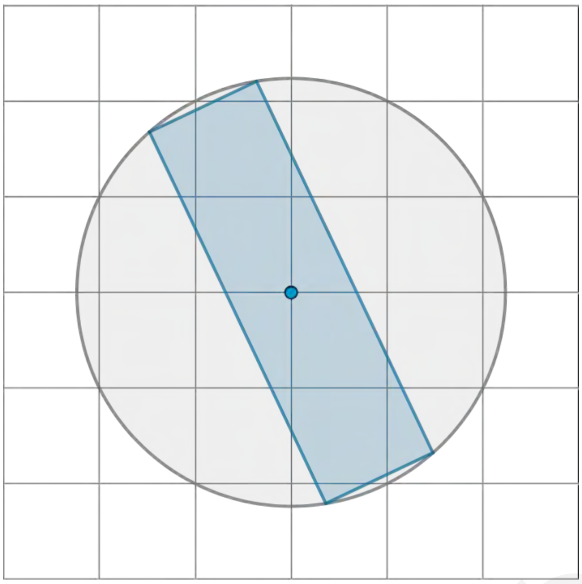
Задача 2.2 (1,5 балла)

На рисунке изображена схема дорог, связывающих некоторые города России. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных способов добраться из Москвы в Казань?



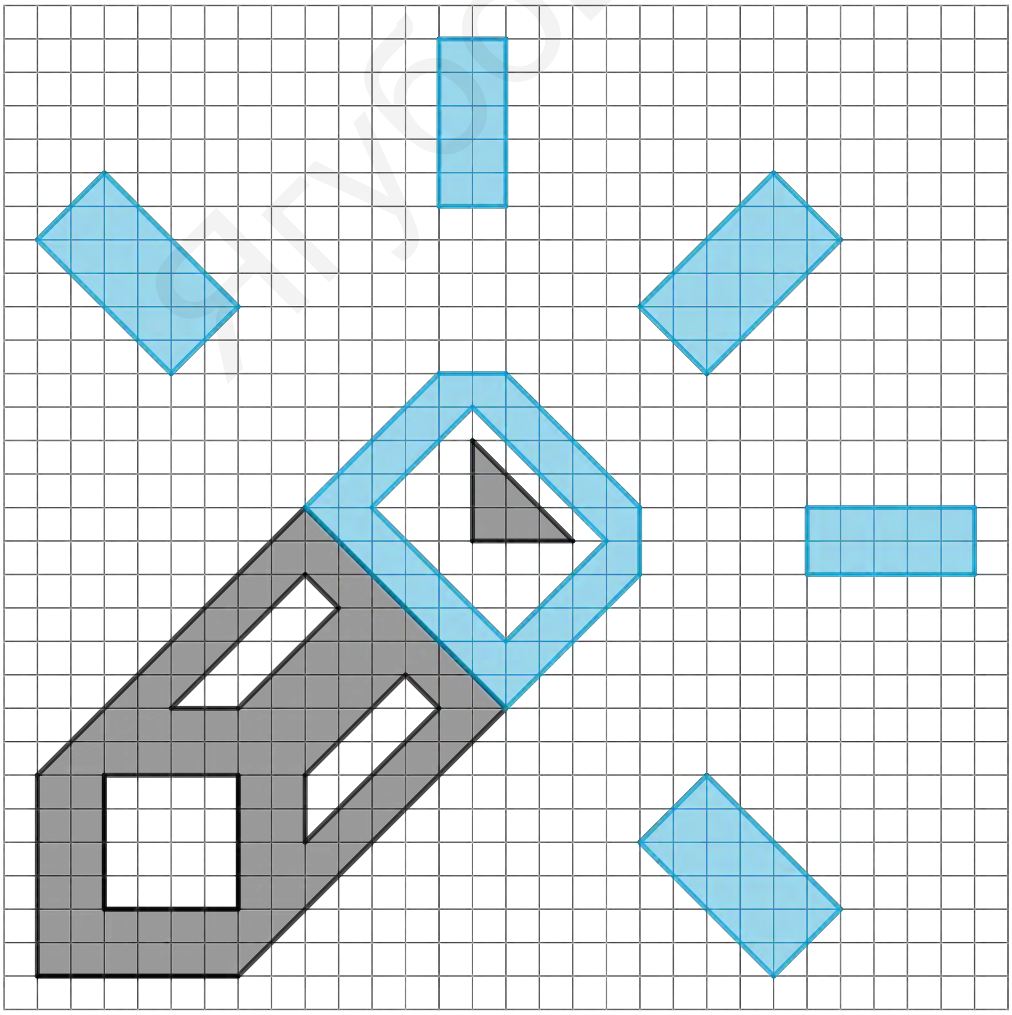
Задача 3.1 (1 балл)

Найдите диагональ прямоугольника, вписанного в окружность, если размер клетки равен $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$:



Задача 3.2 (1,5 балла)

На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен логотип "Школково". Вершины всех многоугольников находятся в узлах решетки.



Найдите разность площадей синей и черной частей логотипа.

Задача 4.1 (1 балл)

В городе N в 2017 году после проведения ЕГЭ выяснилось, что на 100 сдавших ЕГЭ по математике пришлось 28 несдавших. Найдите вероятность того, что случайно выбранный выпускник 2017 года города N не сдал ЕГЭ по математике. Результат округлите до десятых.

Задача 4.2 (1,5 балла)

На листе бумаги написали слово “Школково” и разрезали его по буквам (то есть на 8 частей, на каждой из которых написана одна из букв слова “Школково”). Случайным образом достаются 6 букв. Определите вероятность того, что из этих букв можно хотя бы один раз составить слово “шок”. В случае необходимости результат округлите до сотых.

Задача 5.1 (1 балл)

Решите уравнение

$$\sqrt{x-5} = x-7.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Задача 5.2 (1,5 балла)

Решите уравнение

$$x^{\lg^3 x - \lg x^5} = 0,0001.$$

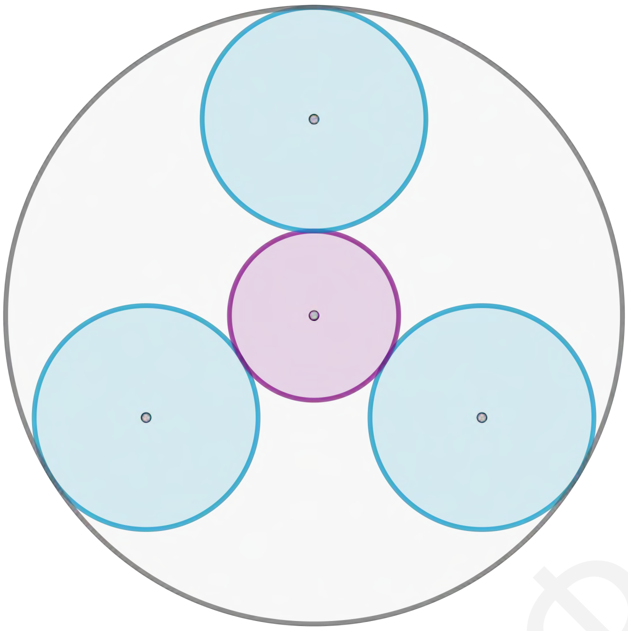
Если уравнение имеет несколько корней, в ответе укажите их сумму.

Задача 6.1 (1 балл)

На диагоналях AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC отмечены точки M и N соответственно.
Известно, что $AM : MC = DN : NB = 2 : 3$. Найдите длину отрезка MN, если $AD = 18$, $BC = 7$.

Задача 6.2 (1,5 балла)

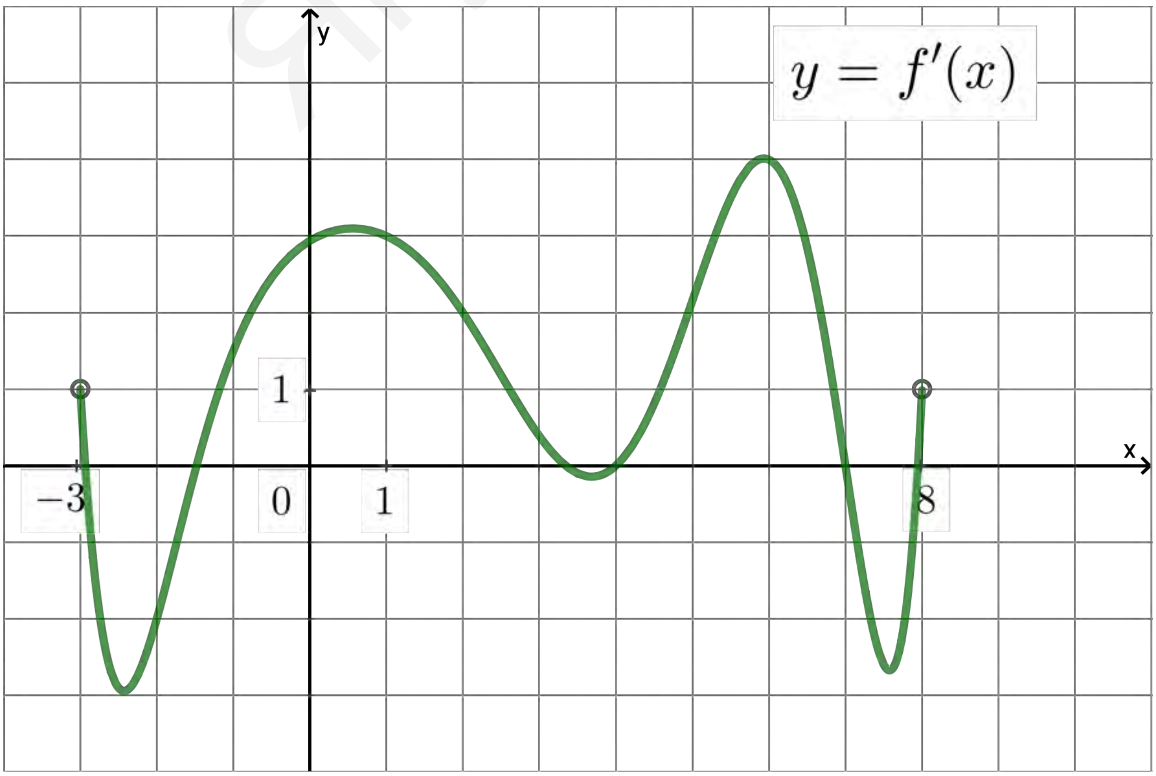
На рисунке изображен чертеж заготовки для спиннера в форме круга радиусом $7 + 4\sqrt{3}$.



Голубые круги равны, сиреневый круг касается их внешним образом. Подберите радиус сиреневого круга так, чтобы голубые круги попарно касались друг друга.

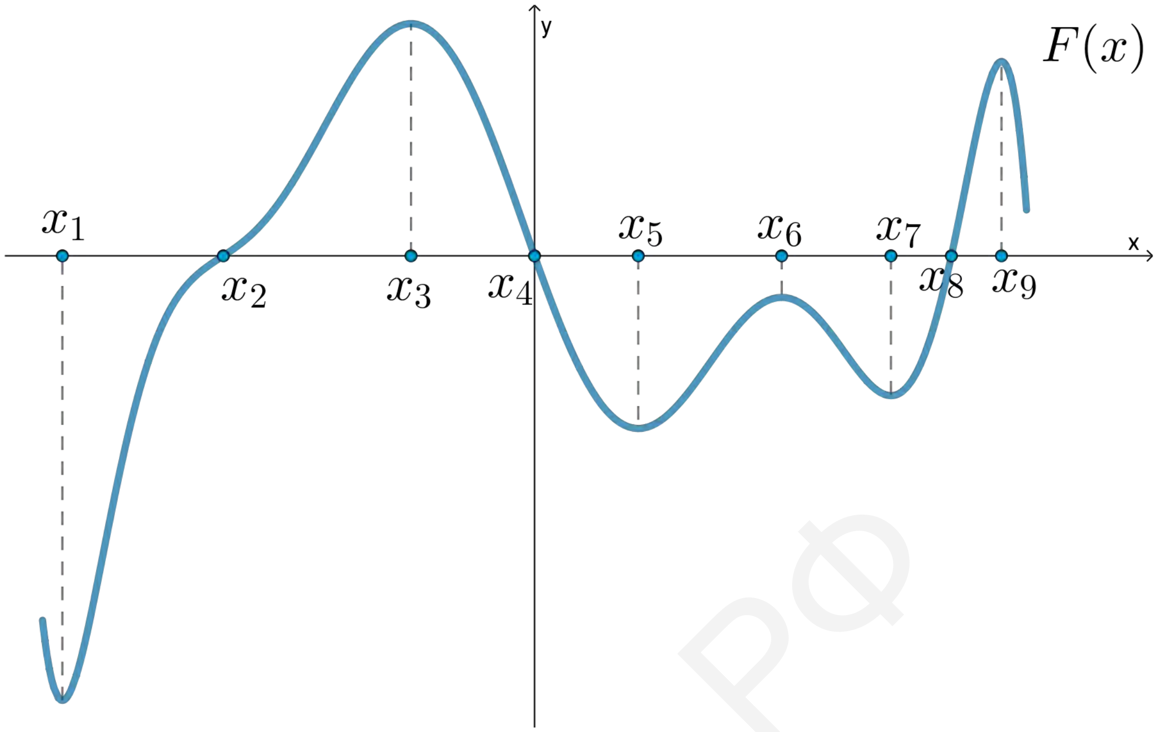
Задача 7.1 (1 балл)

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 8)$. Определите по графику количество точек минимума функции $f(x)$ на промежутке $(-3; 5]$.



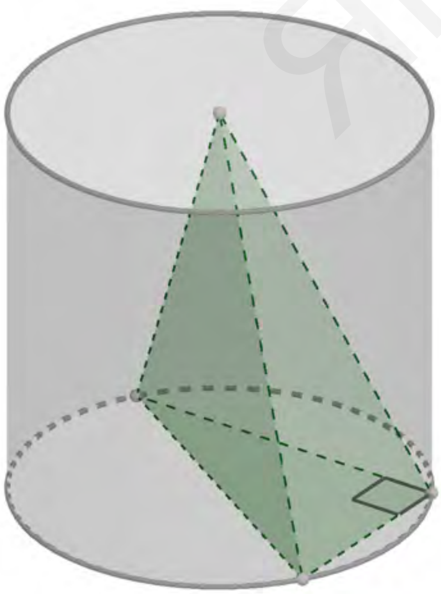
Задача 7.2 (1,5 балла)

На рисунке изображен график функции $F(x)$ – одной из первообразных функции $f(x)$, и отмечены девять точек $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. Определите количество промежутков, на которых производная функции



$f(x)$ отрицательна, если известно, что функция $f(x)$ на каждом промежутке знакопостоянства имеет ровно один экстремум.

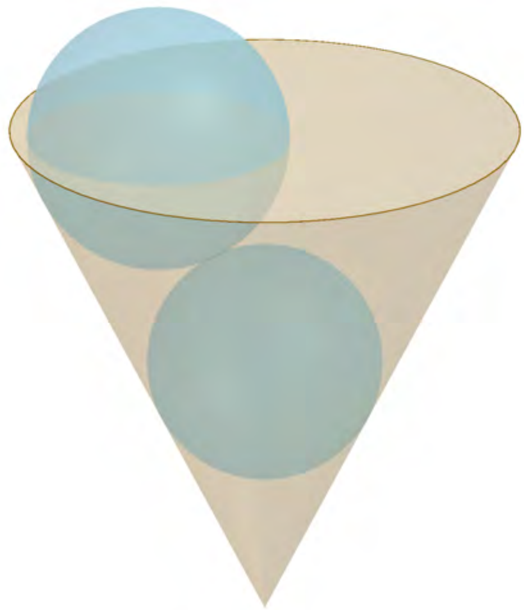
Задача 8.1 (1 балл)



В прямой цилиндр вписана треугольная пирамида, основанием которой является прямоугольный треугольник. Вершина пирамиды совпадает с центром верхнего основания цилиндра, а основание пирамиды вписано в нижнее основание цилиндра. Площадь боковой поверхности цилиндра равна 10π. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через гипотенузу основания пирамиды и ось цилиндра.

Задача 8.2 (1,5 балла)

Рожок в форме конуса поочередно наполнили двумя одинаковыми шариками мороженого так, как показано на рисунке (шарики касаются друг друга и стенок рожка).



Оказалось, что центр второго шарика лежит в плоскости основания конуса-рожка. Оставшееся в рожке место заполнили шоколадным топингом. Определите объем топинга, если известно, что $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$, где α – угол между образующей и осью конуса-рожка, а объем каждого шарика мороженного равен 120 см^3. Ответ дайте в кубических сантиметрах.

Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ в соответствии с инструкцией.

Часть 2

Задача 9.1 (1 балл)

Найдите значение выражения

$$-\sin(2\alpha - 7\pi) + 6\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right),$$

если $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Задача 9.2 (1,5 балла)

Известно, что $a + b = 1$. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{a}{b^3 - 1} - \frac{b}{a^3 - 1}\right) \cdot \frac{a^2b^2 + 3}{b - a}$$

Задача 10.1 (1 балл)

Расстояние от наблюдателя до линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ км – радиус Земли, h – высота наблюдателя над уровнем моря (в км). Во сколько раз увеличилась высота точки наблюдения, если расстояние до линии горизонта в результате двух наблюдений изменилось с $1,5$ км до $3,75$ км?

Задача 10.2 (1,5 балла)

Юный математик и по совместительству любитель котиков решил придумать формулу, с помощью которой можно оценить привлекательность любого кота. Для этой формулы он использовал такие параметры, как нормальную массу кота $m_{\text{н}}$ кг (которую обычно определяют ветеринары, используя породу, возраст, а также другие критерии), текущую массу m кг данного кота, коэффициент Fl пушистости кота и коэффициент Mur мурчания кота, и получил следующую формулу для коэффициента K привлекательности кота, выраженного в процентах:

$$K = \left(\mathrm{Mur} + \frac{0,4}{1 + 28\left(\dfrac{m - m_{\text{н}}}{m_{\text{н}}} - 0,25\right)^2} + \mathrm{Fl} \right) \cdot 100\%$$

Определите с помощью данной формулы, какую наименьшую массу m, кратную 100 граммам, должен иметь кот, если его $m_{\text{н}} = 5,2$ кг, $\mathrm{Fl} = 0,22$, $\mathrm{Mur} = 0,23$, чтобы коэффициент привлекательности этого кота был не менее 80%. Результат выразите в килограммах.

Задача 11.1 (1 балл)

В двух магазинах в январе продавались одинаковые холодильники по одной и той же цене. В феврале цена на этот холодильник в первом магазине увеличилась на 10%, а во втором – уменьшилась на 10%. В апреле цены менялись с точностью до наоборот: в первом магазине цена уменьшилась на 10%, а во втором – увеличилась на 10%. Определите цену холодильника в апреле в первом магазине, если во втором магазине в апреле холодильник стоил $19\,800$ рублей.

Задача 11.2 (1,5 балла)

Бегун участвует в забеге формата туда-обратно по трассе, состоящей из участков трех типов: равнина, в гору и под гору. Скорости бегуна на однотипных участках трассы постоянны и равны соответственно 12 км/ч на равнине, 9 км/ч в гору и 18 км/ч под гору. Найдите расстояние, пройденное бегуном в ходе забега, если он стартовал в $11:15$ и финишировал в $12:24$ этого же дня. Ответ дайте в километрах.

Задача 12.1 (1 балл)

Найдите наименьшее значение функции $y = (x^2 - 4x + 4) \cdot e^{-x}$ на отрезке $[2; 3]$.

Задача 12.2 (1,5 балла)

Найдите значение a, при котором площадь криволинейной трапеции, образованной графиком функции $f(x) = a^4x^3 - a^3x^2 + a^2x - a + 1$ и прямыми $x = 0, x = 1, y = 0$, минимальна.

Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ в соответствии с инструкцией.

Задачи 13 – 19 требуют подробного решения и ответа. Запишите сначала номер выполняемой задачи, а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте четко и разборчиво.

Задача 13.1 (2 балла)

а) Решите уравнение

$$\frac{1-2\sin x-\sin 2x+\cos x}{\lg(-\cos x)}=0$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{13\pi}{4};\frac{20\pi}{3}\right]$

Задача 13.2 (3 балла)

а) Решите уравнение

$$\sqrt{2}\left(x^3+\frac{1}{x^3}+7x+\frac{7}{x^2}\right)=49+7x^2+\frac{7}{x}+x+\frac{2}{x}$$

б) Укажите наибольший корень данного уравнения.

Задача 14.1 (2 балла)

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S на ребре AD отмечена точка N, на ребре SC отмечена точка K, причем $AN:AD=SK:KC=1:3$. Плоскость α проходит через точки K и N.

а) Докажите, что, если сечение пирамиды плоскостью α — трапеция $MNLK$, то $BM:MC=1:2$ (M лежит на BC).

б) Найдите площадь сечения $MNLK$, если боковое ребро пирамиды равно 76, а сторона основания пирамиды равна 24.

Задача 14.2 (3 балла)

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, K – такая точка на отрезке A_1C_1, что $A_1C_1:KC_1=4:1$. Диагонали куба пересекаются в точке Q.

а) Докажите, что прямые BK и CQ скрещиваются.

б) Найдите расстояние между прямыми BK и CQ, если ребро куба равно $\sqrt{74}$.

Задача 15.1 (2 балла)

Решите неравенство

$$\frac{12 \cdot x^{\log_{0,5} x} - 129}{0,25^{\log_2^2 x} - 4} \leqslant 32$$

Задача 15.2 (3 балла)

Решите неравенство

$$3^{x-1} \cdot \log_3 x^3 - 3 \cdot x^{\frac{x}{\log_3 x}} \geqslant 6 \log_3 \left(\frac{x}{27}\right)$$

Задача 16.1 (3 балла)

Две окружности с центрами A и D касаются внешним образом. Некоторая прямая касается первой окружности в точке B, а второй окружности в точке C. Третья окружность лежит внутри четырехугольника $ABCD$ и касается трех его сторон.

а) Докажите, что третья окружность не может касаться четвертой стороны четырехугольника.

б) Найдите наименьшее возможное расстояние от точек третьей окружности до четвертой стороны четырехугольника, если известно, что радиусы первой и второй окружностей равны соответственно 1 и 2.

Задача 16.2 (4,5 балла)

В треугольнике ABC проведены биссектрисы AK, BL, CM. Угол между биссектрисами AK и CM равен $30°$.

а) Докажите, что треугольник KLM прямоугольный.

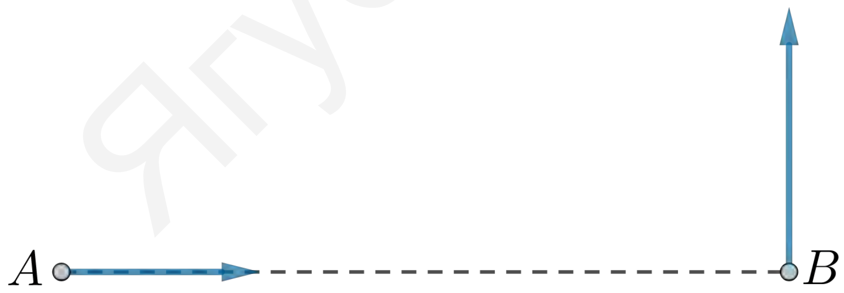
б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника KLM, если известно, что $AB = 3$, $BC = 5$.

Задача 17.1 (3 балла)

В январе 2016 года заемщик взял в банке кредит на некоторую сумму сроком на 4 года, причем выплачивать кредит он должен был так, чтобы сумма долга каждый год уменьшалась равномерно. Условия пользования таким кредитом были таковы:
– в феврале каждого года, начиная с 2016, банк начисляет на остаток долга $12,5\%$;
– в ноябре каждого года, начиная с 2016, заемщик обязан вносить в банк некоторый платеж в счет погашения долга.
Спустя два года пользования кредитом, в январе 2018 года, заемщик был вынужден перейти на аннуитетную систему выплат, то есть оставшуюся часть долга погасить двумя равными ежегодными платежами, вносимыми, как и прежде, в ноябре каждого года.
Какая сумма была взята заемщиком в кредит, если известно, что в итоге переплата составит 855 000 рублей?

Задача 17.2 (4,5 балла)

Гарри Поттер вылетает на метле из точки A и движется по прямой. Одновременно с этим из точки B, находящейся на расстоянии 1 км от точки A, перпендикулярно линии движения Гарри вылетает дементор, который также движется прямолинейно (см. рис). Известно, что ско-



рость движения Гарри Поттера равна 2 км/мин, а скорость движения дементора равна 1 км/мин. Гарри хочет поразить дементора заклинанием "Экспекто патронум". Дементор считается пораженным, если патронус находится с ним в одной точке. Гарри, пользуясь своими магическими навыками, может рассчитывать направление движения патронуса так, чтобы в какой-то момент времени патронус и дементор оказались в одной точке. Через какое наименьшее время после вылета Гарри дементор может быть поражен? Считать, что патронус движется прямолинейно со скоростью 2 км/мин.

Задача 18.1 (4 балла)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x-a}\cdot(x^3+ax)=2\sqrt{x-a}\cdot(x-2)(x+2)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[-1,5;3]$.

Задача 18.2 (6 баллов)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$a^{2x}\cdot\log_a x-3a^{2x}+6a^x-a^x\cdot\log_a^2 x+a^x\cdot\log_a x+2\log_a^2 x-6\log_a x\leqslant 0$$

имеет ровно 2018 целых решений.

Задача 19.1 (4 балла)

В каждой клетке таблицы 3×3 написано натуральное число, причем все числа попарно различны. Рассмотрим шесть троек чисел: три тройки чисел, стоящих в одной строке, и три тройки чисел, стоящих в одном столбце. Известно, что в каждой тройке числа образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию, причём имеется хотя бы одна тройка, образующая геометрическую прогрессию.
а) Могут ли все шесть троек образовывать геометрическую прогрессию?
б) Предположим, что тройки чисел в каждой из трёх строк образуют арифметическую прогрессию, а тройки в каждом из трёх столбцов – геометрическую. Докажите, что знаменатели геометрических прогрессий равны.
в) Какое наименьшее количество троек чисел, образующих геометрическую прогрессию, может оказаться в данной таблице?

Задача 19.2 (6 баллов)

Дан квадратичный трехчлен $f(x)$ и число a. Дана последовательность:

$$a,\ f(a),\ f(f(a)),\ \ldots,\ \underbrace{f(f(\ldots(f(a))\ldots))}_{n\ \text{раз}}$$

а) Может ли при $n=2$ последовательность быть непостоянной геометрической прогрессией?
б) Может ли при $n=2$ и $f(x)=bx^2+c$ последовательность быть непостоянной геометрической прогрессией со знаменателем $q>0$?
в) При каком наибольшем n последовательность может быть непостоянной геометрической прогрессией со знаменателем $q>0$?