

**ЗАДАЧИ ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ  
ЗА КУРС СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ (1999/2000 учебный год)**

**Иррациональные уравнения и неравенства.**

1. Решите уравнение

1)  $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 3x - 5} = x^2 - 1$ ;

2)  $\sqrt{x^4 + 2x^2 + 5x + 11} = x^2 + 1$ ;

3)  $\sqrt{x - 1999} = x - 1999$ ;

4)  $\sqrt{2000 - x} = 2000 - x$ ;

5)  $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 4 - x$ ;

6)  $\sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - x$ ;

7)  $\sqrt{(x-5)(x+3)} = (x-1)^2 - 22$ ;

8)  $\sqrt{(x+1)^2 + 16} = (x+3)(x-1)$ ;

9)  $(x^2 + 3x - 10)\sqrt{x+4} = 0$ ;

10)  $(x^2 - x - 12)\sqrt{x+3} = 0$ .

**Тригонометрия.**

1. Найдите значение выражения

1)  $\frac{\cos 35^\circ + \sqrt{3} \sin 35^\circ}{\sin 1505^\circ}$ ;

2)  $\frac{2\sqrt{2}(\cos 35^\circ - \sin 35^\circ)}{\cos 1160^\circ}$ .

2. Решите уравнение

1)  $2 \sin \frac{x}{2} = 1$ ;

2)  $2 \cos 2x = \sqrt{3}$ ;

3)  $2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{4} \right) = 1$ ;

4)  $1 = 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - x \right)$ ;

5)  $3 \sin 6x - \sqrt{37} \cos 3x = 0$ ;

6)  $2 \sin 8x + \sqrt{17} \sin 4x = 0$ ;

7)  $\sin^2 x - \cos^2 x = (\cos x - \sin x)^2$ ;

8)  $\cos^2 x - \sin^2 x = (\sin x + \cos x)^2$ ;

9)  $\cos^2 x - \sin^2 x = 3(\cos x - \sin x)$ ;

$$10) \frac{1}{4}(\sin^2 x - \cos^2 x) = \cos x + \sin x;$$

$$11) 1 + \sin^2 5x = \frac{3}{2} \sin 10x;$$

$$12) 3 + \cos^2 3x = \frac{7}{2} \sin 6x;$$

$$13) 2 \sin 6x - 5 \cos 3x = 0;$$

$$14) 3 \sin 4x + 7 \cos 2x = 0;$$

$$15) 2 \cos^2 \left( \frac{1999\pi}{2} + x \right) - 3 \sin(2000\pi + x) + 1 = 0;$$

$$16) 2 \cos^2(2000\pi - x) + 3 \sin \left( \frac{1999\pi}{2} - x \right) + 1 = 0;$$

$$17) \sqrt{1 - 4 \cos x - \cos^2 x} = \sin x;$$

$$18) \sqrt{1 + 3 \sin x - \sin^2 x} = \cos x.$$

3. Решите неравенство

$$1) \sin^2 x - 4 \cos x + 4 \leq 0;$$

$$2) 3 \sin x - 3 - \cos^2 x \geq 0.$$

### Показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

1. Найдите значение выражения

$$1) \left( \sqrt{\sin^2 60^\circ - 2 \log_5 \sqrt[4]{5}} \right)^{-1};$$

$$2) \left( \sqrt{3 \log_7 \sqrt[4]{7} - \cos^2 45^\circ} \right)^{-1};$$

$$3) \sqrt{\log_2 \sin \frac{\pi}{6} + 25^{-\cos \frac{2\pi}{3}}};$$

$$4) \sqrt{9^{\sin \frac{5\pi}{6}} - \log_2 \cos \frac{\pi}{3}};$$

2. Решите уравнение

$$1) 3^{2x+5} + 3^{2x+3} = 90;$$

$$2) 2^{3x+4} - 2^{3x+1} = 56;$$

$$3) 3 \cdot 5^{2x} - 14 \cdot 5^x - 5 = 0;$$

$$4) 2 \cdot 7^{2x} - 13 \cdot 7^x - 7 = 0;$$

$$5) \left( \frac{1}{4} \right)^x + 2^{3-x} = 9;$$

$$6) 3^{1-x} + \left(\frac{1}{9}\right)^x = 18;$$

$$7) 9^{-x+\frac{1}{2}} - 26 \cdot 3^{-x} - 9 = 0;$$

$$8) 4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 = 0;$$

$$9) \log_3(x^2 + 3x - 1) = 2;$$

$$10) \log_2(x^2 + x - 4) = 3;$$

$$11) \log_4(x^4 - x^2 + 3x - 7) = \log_4(x^4 + x^2 - 5x + 1);$$

$$12) \log_4(x^4 + x^2 - 7x + 4) = \log_4(x^4 - x^2 - 9x + 8);$$

$$13) \log_3(x-2) + \log_3(x+4) = 3;$$

$$14) \log_2(x+5) + \log_2(x+1) = 5;$$

$$15) \log_2^2 x - 3|\log_2 x| + 2 = 0;$$

$$16) \log_3^2 x - 4|\log_3 x| + 3 = 0;$$

$$17) \log_2 \sin x - \log_2 \cos x = \log_2 \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1};$$

$$18) \log_3 \sin x + \log_3 \cos x = \log_3(1 - \cos 60^\circ);$$

### 3. Решить неравенство

$$1) (0,2)^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5;$$

$$2) \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} > 125;$$

$$3) 5^{4x+6} - 5^{4x+5} \geq 100;$$

$$4) 3^{5x-4} - 3^{5x-5} \geq 54;$$

$$5) 2^{x^2+3x-3} - 2^{x^2+3x-5} - 96 \geq 0;$$

$$6) 3^{x^2-x-6} - 3^{x^2-x-8} - 648 \leq 0;$$

$$7) 5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}-1} + 5^{\sqrt{x}};$$

$$8) 3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}-1} - 3^{\sqrt{x}-2} < 11;$$

$$9) \log_2(3x-2) \leq 3;$$

$$10) \log_3(2x-3) \leq 2;$$

$$11) \log_{1999}(2x-5) \leq 1;$$

$$12) \log_{\frac{1}{2000}}(3x-4) \geq -1;$$

$$13) \log_{\frac{1}{2}}(3x-5) \geq -4;$$

$$14) \log_9(4-5x) \leq \frac{1}{2};$$

$$15) \log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) > -1;$$

$$16) \log_{\frac{1}{3}} \frac{8+x}{3-x} > -1;$$

$$17) \log_3(x+7) < \log_3(5-x) + \log_3(3-x);$$

$$18) \log_2 24 > \log_2(16-x) + \log_2(2x-6);$$

$$19) \frac{\lg x}{x^2 - x - 6} \geq 0;$$

$$20) \frac{\ln x}{x^2 + x - 8} \leq 0.$$

4. Найдите область определения функции

$$1) f(x) = \sqrt{14 + 5x - x^2} + \log_3(x-1);$$

$$2) f(x) = \log_2(2-x) + \sqrt{18 - 3x - x^2};$$

$$3) f(x) = \log_{\frac{2x-2}{x+3}}(x^2 + 3);$$

$$4) f(x) = \log_{\frac{3x+1}{x-3}}(x^2 + 1).$$

### Элементы математического анализа.

1. Найдите производную функции  $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 3x - 1999$  в точке  $x_0 = 2$ .

2. Найдите производную функции  $f(x) = x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 4x + 2000$  в точке  $x_0 = 3$ .

3. Найдите производную функции  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6\sqrt{x-1}$  в точке  $x_0 = 2$ .

4. Найдите производную функции  $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 8\sqrt{x+3}$  в точке  $x_0 = 1$ .

5. Дана функция  $f(x) = x^2 + 3x - 2\sin x$ . Найдите  $f'(0)$ .

6. Дана функция  $f(x) = x^2 - 2x + 2\cos x$ . Найдите  $f'(0)$ .

7. Определите, при каком значении  $x$  производная функции  $f(x) = \sqrt{3x-5}$  равна 0,15.

8. Определите, при каком значении  $x$  производная функции  $f(x) = \sqrt{5x+4}$  равна 0,3125.

9. Составьте уравнение касательной к графику функции  $f(x) = -3x^2 + 18x - 25$ , параллельной оси  $Ox$ .

10. Составьте уравнение касательной к графику функции  $f(x) = 2x^2 + 16x + 11$ , параллельной оси  $Ox$ .
11. В каких точках графика функции  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 - x + 7$  касательная к графику составляет с осью  $Ox$  угол  $135^\circ$ ?
12. В каких точках графика функции  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 6$  касательная к графику составляет с осью  $Ox$  угол  $45^\circ$ ?
13. Найдите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции  $f(x) = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 13$ .
14. Найдите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции  $f(x) = -12x^5 - 15x^4 + 40x^3 + 7$ .
15. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = 3x^5 + 5x^3 - 300x + 2000$  на промежутке  $[0; 3]$ .
16. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 180x - 1999$  на промежутке  $[-3; 0]$ .
17. Представьте число 61 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба первого слагаемого и второго, умноженного на 12, была наименьшей.
18. Представьте число 47 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба первого слагаемого и второго, умноженного на 27, была наименьшей.
19. Число 8 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма куба одного из слагаемых с квадратом второго слагаемого, умноженного на 6, была наименьшей.
20. Число 12 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма квадрата одного из слагаемых, умноженного на 9, и куба второго слагаемого была наименьшей.
21. Докажите, что функция  $F(x) = \ln x + 2\sqrt{3x-1} - 1999$  является первообразной функции  $f(x) = \frac{3x-1+3x\sqrt{3x-1}}{x(3x-1)}$  на промежутке  $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ .
22. Докажите, что функция  $F(x) = 2000 - \ln x - 4\sqrt{2x+1}$  является первообразной функции  $f(x) = \frac{2x+1+4x\sqrt{2x+1}}{x(2x+1)}$  на промежутке  $(0; +\infty)$ .
23. Найдите множество первообразных функции  $f(x) = \frac{8x^3 - 6x^2 + 4x - 5}{2x}$  на промежутке  $(-\infty; 0)$ .

24. Найдите множество первообразных функции  $f(x) = \frac{6x^3 + 3x^2 - 6x + 7}{4x}$  на промежутке  $(-\infty; 0)$ .
25. Найдите одну из первообразных функции  $f(x) = \frac{2}{(5x-3)^3} - \sin 2x + 3$ .
26. Найдите одну из первообразных функции  $f(x) = 5 + \cos 2x - \frac{3}{(4x+1)^2}$ .
27. Найдите ту первообразную функции  $f(x) = 2x - 6$ , график которой проходит через точку  $A(2; -3)$ , и постройте график этой первообразной.
28. Найдите ту первообразную функции  $f(x) = 2x + 6$ , график которой проходит через точку  $A(-1; 3)$ , и постройте график этой первообразной.
29. Найдите ту первообразную функции  $f(x) = -2x + 6$ , график которой имеет с прямой  $y = 1$  единственную общую точку.
30. Найдите ту первообразную функции  $f(x) = 2x + 4$ , график которой имеет с прямой  $y = -2$  единственную общую точку.
31. Найдите первообразную функции  $f(x) = x^2 - 2x + 4$ , график которой проходит через точку  $M(-3; 2)$ .
32. Найдите первообразную функции  $f(x) = x^2 + 4x - 2$ , график которой проходит через точку  $M(3; -1)$ .
33. Найдите первообразную функции  $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4x - 5$ , график которой проходит через точку  $A(2; -8)$ .
34. Найдите первообразную функции  $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 8x + 7$ , график которой проходит через точку  $A(-2; -22)$ .
35. Найдите первообразную функции  $f(x) = \frac{4x^2 - 3}{x}$ , график которой проходит через точку  $A(-1; 5)$ .
36. Найдите первообразную функции  $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x}$ , график которой проходит через точку  $A(-1; -2)$ .

### Нелинейные системы уравнений.

1. Решите систему уравнений

$$1) \begin{cases} 5^y \cdot 2^x = 200, \\ \log_5(x - y) = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 108, \\ \log_3(y-x) = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x-y) = 2, \\ 3x^2 - 4y^2 + 5xy = 38 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \log_{\sqrt{7}}(x-y) = 2, \\ x^2 + y^2 - xy = 39 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 3^{2x^2 - y^2} = 9, \\ \log_{14}(y-x) = 0 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 5^{x+y} = 125, \\ \log_{29}(x^2 + y^2) = 1 \end{cases}$$

### Задачи с параметром

1. При каких значениях  $a$  все корни уравнения  $x^2 + (1-2a)x + a^2 - a - 6 = 0$  находятся в промежутке  $[1900; 1999]$ ?
2. При каких значениях  $a$  все корни уравнения  $x^2 - (2a+3)x + a^2 + 3a - 4 = 0$  находятся в промежутке  $[1901; 2000]$ ?
3. При каких значениях  $a$  уравнение  $x^3 - 3x^2 - 24x + a = 0$  имеет ровно два разных корня?
4. При каких значениях  $a$  уравнение  $x^3 + 6x^2 - 15x + a = 0$  имеет ровно два разных корня?
5. При каких значениях  $m$  уравнение  $1999^{2x} - 4 \cdot 1999^x - 3m + m^2 = 0$  имеет единственный корень?
6. При каких значениях  $m$  уравнение  $2000^{2x} - 6 \cdot 2000^x + m^2 - 8m = 0$  имеет единственный корень?

### Нестандартные задачи

1. Решите уравнение

$$1) \sin \pi x + \cos \pi x = 2^{\log_3 \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{49}{16}}};$$

$$2) \sin \frac{3\pi x}{2} - \cos \frac{3\pi x}{2} = 2^{\log_5 \sqrt{x^2 - x + \frac{21}{4}}}.$$

2. Решите неравенство

$$1) (10x - x^2 - 24) \log_2 \left( \sin^2 \frac{\pi}{2} x + 1 \right) \geq 1;$$

$$2) (-x^2 - 8x - 15) \log_3 (\cos^2 \pi x + 1) \geq 1.$$

3. Найдите все такие пары чисел  $(x; y)$ , что  $\sqrt{x^2 + 8x + 20} = 2 \sin y$ .

4. Найдите все такие пары чисел  $(x; y)$ , что  $\sqrt{x^2 - 10x + 26} = \cos 2y$ .

ЯГубов.РФ