Двенадцатая олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Двенадцатой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

В олимпиаде могут участвовать школьники последних четырех классов средней школы. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов российской школы (на момент проведения олимпиады) она предназначена. В тех странах, где количество классов в школе другое, ученики последнего класса решают задачи 11 класса, ученики предпоследнего класса — задачи 10 класса и т.д. Можно решать задачи и для более старших классов (решенные задачи для более младших классов при подведении итогов не учитываются).

Полное решение любой задачи или любого ее пункта, если задача имеет пункты, оценивается в 7 баллов. Неполное решение, в зависимости от степени продвижения, оценивается от 1 до 6 баллов. При отсутствии заметного продвижения ставится 0 баллов. Результатом участника является сумма баллов по всем задачам.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая отчетливые чертежи достаточного размера. *Если в задаче требуется дать ответ на некоторый вопрос (например, найти значение какой-нибудь величины), то этот ответ следует привести перед решением.* Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении каким-то фактом из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и не обязательно) указать в работе, какие задачи Вам понравились. Нам будет интересно узнать Ваше мнение.

Решения задач на русском или английском языке должны быть представлены в электронной форме не раньше 8 января и не позднее 1 апреля 2016 года. Для этого нужно зайти на сайт **http://geom.informatics.msk.ru** и следовать приведенным там инструкциям.

Внимание: решение каждой задачи должно содержаться в отдельном файле формата pdf, doc или jpg. Желательно выполнять работу на компьютере или сканировать, а не фотографировать. *В последних двух случаях необходимо убедиться, что файл хорошо читается.*

При возникновении технических проблем с загрузкой работы обращайтесь по адресу **geomolymp@mccme.ru**.

Допускается также присылка решений по электронной почте на адрес **geompapers@yandex.ru** (*в случае присылки на любой другой адрес нет гарантии, что работа будет получена оргкомитетом*). В этом случае работа все равно будет загружена на сервер. Чтобы не усложнять процесс, рекомендуем авторам работ сделать это самим. Если все же работа послана по электронной почте, то необходимо соблюдать следующие правила.

1. Каждую работу следует посылать отдельным письмом с уведомлением о прочтении.

2. Если работа содержится в нескольких файлах, следует присылать их в виде архива.

3. В теме письма нужно написать "олимпиада Шарыгина" и указать фамилию и имя участника, а в тексте должны содержаться следующие сведения об участнике:

— фамилия, имя, отчество;

— E-mail, телефон, полный почтовый адрес с индексом;

— класс, в котором сейчас учится школьник;

— количество классов при школьном обучении;

— номер и адрес школы;

— ФИО учителей математики и/или руководителей кружка.

При невозможности представить работу в электронной форме сообщите об этом в оргкомитет, вопрос будет решен индивидуально.

Победители заочного тура — учащиеся 8–10 классов будут приглашены на финальный тур, который состоится летом 2016 года под Москвой. Победители заочного тура — выпускники школ получат грамоты оргкомитета олимпиады. Списки победителей будут опубликованы на сайте **www.geometry.ru** не позднее 1 июня 2016 г. Свои результаты Вы сможете узнать в это же время по адресу **geomolymp@mccme.ru**.

1. (8) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC такая, что $AB = BD$. Пусть M — середина стороны DC. Докажите, что $\angle MBC = \angle BCA$.

2. (8) На клетчатой бумаге отметьте три узла так, чтобы в образованном ими треугольнике сумма двух меньших медиан равнялась полупериметру.

3. (8) В остроугольном треугольнике ABC AH_1, BH_2 — высоты, D — проекция H_1 на AC, E — проекция D на AB, F — точка пересечения ED и AH_1. Докажите, что $H_2F \parallel BC$.

4. (8) В четырехугольнике$ABCD$ $\angle B = \angle D = 90^\circ$ и $AC = BC + DC$. Точка P на луче BD такова, что $BP = AD$. Докажите, что прямая CP параллельна биссектрисе угла ABD.

5. (8) В четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$, M и K — середины BC и AD. Докажите, что угол между MK и AC равен полусумме углов BAC и DCA.

6. (8) Из середины M стороны AC треугольника ABC опущены перпендикуляры MD и ME на стороны AB и BC соответственно. Около треугольников ABE и BCD описаны окружности. Докажите, что расстояние между центрами этих окружностей равно $AC/4$.

7. (8–9) В некотором выпуклом n-угольнике ($n > 3$) все расстояния между верши- нами различны.

   а) Назовем вершину неинтересной, если самая близкая к ней вершина — соседняя с ней. Каково наименьшее возможное количество неинтересных вершин (при данном n)?

   б) Назовем вершину необычной, если самая дальняя от нее вершина — соседняя с ней. Каково наибольшее возможное количество необычных вершин (при данном n)?

8. (8–9) Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность, причцм $\angle B + \angle E = \angle C + \angle D$. Докажите, что $\angle CAD < \pi/3 < \angle A$.

9. (8–9) В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C опущена высота CH. В треугольники ACH и BCH вписали окружности; O_1 и O_2 — их центры; P_1 и P_2 — их точки касания с AC и BC. Докажите, что прямые O_1P_1 и O_2P_2 пересекаются на AB.

10. (8–9) По стороне AB треугольника ABC движется точка X, а по описанной около треугольника окружности — точка Y так, что прямая XY проходит через середину дуги AB. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников IXY, где I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

11. (8–10) Восстановите треугольник ABC по вершине B, центру тяжести и точке пересечения симедианы из B с описанной окружностью.

12. (9–10) Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC. Пусть BB_1 — его симедиана. Луч BB_1 вторично пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке L. Пусть H_A, H_B, H_C — основания высот треугольника ABC. Луч BH_B вторично пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке T. Докажите, что H_A, H_C, T, L лежат на одной окружности.

13. (9–10) Дан треугольник ABC и прямая ℓ, пересекающая BC, AC, AB в точках L_a, L_b, L_c. Перпендикуляр из L_a к BC пересекает AB и AC в точках A_B и A_C соответственно. Точка O_a — центр окружности, описанной около треугольника AA_bA_c. Аналогично определим O_b и O_c. Докажите, что O_a, O_b и O_c лежат на одной прямой.

14. Дан треугольник ABC. Рассмотрим три окружности, первая из которых касается описанной в вершине A, а вписанной внешним образом в какой -то точке A_1. Аналогично определяются точки B_1 и C_1.

    а) (9–10) Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

    б) (10–11) Пусть A_2 — точка касания вписанной окружности со стороной BC. Докажите, что прямые AA_1 и AA_2 симметричны относительно биссектрисы угла A.

15. (9–11) В треугольнике O, M, N — центр описанной окружности, центр тяжести и точка Нагеля соответственно. Докажите, что угол MON прямой тогда и только тогда, когда один из углов треугольника равен 60°.

16. (9–11) Пусть BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC. Касательные к описанной окружности треугольника AB_1C_1 в точках B_1 и C_1 пересекают прямые AB и AC в точках M и N соответственно. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников AMN и AB_1C_1 лежит на прямой Эйлера треугольника ABC.

17. (9–11) На стороне BC треугольника ABC взята произвольная точка D. Через D и A проведены окружности ω_1 и ω_2 так, что BA касается ω_1, CA касается ω_2 соответственно. BX — вторая касательная из точки B к окружности ω_1, CY — вторая касательная из точки C к окружности ω_2. Докажите, что описанная окружность треугольника XDY касается BC.

18. (9–11) Вокруг прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность, на меньших дугах AC и BC взяты их середины — K и P соответственно. Отрезок KP пересекает катет AC в точке N. Центр вписанной окружности треугольника ABC — I. Найти угол NIC.

19. (9–11) Правильный шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Точки P и Q выбраны на касательных, проведенных, к этой окружности в точках A и D соответственно, так, что PQ касается меньшей дуги EF этой окружности. Найдите угол между прямыми PB и QC.

20. (10–11) Окружность ω, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, AC и AB в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Биссектрисы углов B и C пересекают серединный перпендикуляр к отрезку AA_0 в точках Q и P соответственно. Докажите, что прямые PC_0 и QB_0 пересекаются на окружности ω.

21. (10–11) Прямоугольники P и Q равновелики, но у P диагональ больше. Двумя копиями P можно накрыть Q. Докажите, что двумя копиями Q можно накрыть P.

22. (10–11) Пусть M_A, M_B, M_C — середины сторон неравнобедренного треугольника ABC, точки H_A, H_B, H_C, отличные от M_A, M_B, M_C, лежащие на соответственных сторонах, такие, что $M_AH_B = M_AH_C$, $M_BH_A = M_BH_C$, $M_CH_A = M_CH_B$. Докажите, что H_A, H_B, H_C — основания высот треугольника ABC.

23. (10–11) Дан тетраэдр, в который можно вписать сферу, касающуюся всех его ребер. Пусть отрезки касательных из вершин равны a, b, c и d. Всегда ли можно из из этих четырех отрезков сложить какой-нибудь треугольник? (Не обязательно использовать для этого все отрезки. Разрешается образовывать сторону треугольника из двух отрезков)

24. (11) В призму $ABCA'B'C'$ вписана сфера, касающаяся боковых граней $BCC'B'$, $CAA'C'$, $ABB'A'$ в точках A_0, B_0, C_0 соответственно. При этом $\angle A_0BB' = \angle B_0CC' = \angle C_0AA'$.

    а) Чему могут равняться эти углы (укажите все возможные значения)?

    б) Докажите, что отрезки AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в одной точке.

    в) Докажите, что проекции центра сферы на прямые $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ образуют правильный треугольник.