# IX Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
## Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Девятой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

В олимпиаде могут участвовать школьники 8–11 классов. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов (на момент проведения олимпиады) она предназначена. Впрочем, можно решать также задачи и для более старших классов (решенные задачи для более младших классов при подведении итогов не учитываются). Полное решение любой задачи или любого её пункта, если задача имеет пункты, оценивается в 7 баллов. Неполное решение, в зависимости от степени продвижения, оценивается от 1 до 6 баллов. При отсутствии заметного продвижения ставится 0 баллов. Результатом участника является сумма баллов по всем задачам.

Решения задач на русском языке должны быть посланы не позднее 1 апреля 2013 года. Решения следует присылать по электронной почте в форматах pdf, doc или jpg (сканы, а не фотографии) на адрес geomolymp@mccme.ru. При этом во избежание потери работы нужно соблюдать следующие правила.

*1. Каждую работу следует посылать отдельным письмом с уведомлением о прочтении. Объем письма не должен превышать 10 Мб.*

*2. Если работа содержится в нескольких файлах, желательно присылать их в виде архива.*

*3. Если объем работы превышает 10 Мб, разбейте ее на несколько писем.*

*4. В теме письма нужно написать "олимпиада Шарыгина" и указать фамилию участника, а в тексте привести следующие сведения об участнике:*

*- фамилию, имя, отчество;*

*- E-mail, телефон, полный почтовый адрес с индексом;*

*- класс, в котором сейчас учится школьник;*

*- номер и адрес школы;*

*- ФИО учителей математики и/или руководителей кружка.*

Если у Вас нет возможности прислать работу в электронном виде, пришлите ее простой бандеролью (или принесите сами) по адресу: *119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11., МЦНМО. На олимпиаду им. Шарыгина.* На обложке работы **обязательно** укажите все сведения, перечисленные выше в п.4.

Рекомендуется выполнять работу на специальных бланках, которые можно получить на сайте www.blank.geomolymp.mccme.ru. Это сделает проверку Вашей работы более быстрой и качественной. Если Вы набираете свою работу на компьютере, то следует получить с указанной страницы файл бланка и имеющийся там штрихкод (квадрат с узором в правом верхнем углу бланка) скопировать в свой файл как рисунок. Если работа содержится в нескольких файлах, то нужно скопировать тот же штрихкод во все файлы, это позволяет идентифицировать автора работы.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая отчетливые чертежи достаточного размера. Если в задаче требуется дать ответ на некоторый вопрос (например, найти значение какой-нибудь величины), то этот ответ следует привести перед решением. Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении каким-то фактом из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему или факт Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Можно (хотя и не обязательно) указать в работе, какие задачи Вам понравились. Жюри будет интересно узнать Ваше мнение.

Победители заочного тура — учащиеся 8–10 классов будут приглашены на финальный тур, который состоится летом 2013 года в г. Дубна под Москвой. Победители заочного тура — выпускники школ получат Грамоты оргкомитета олимпиады. Списки победителей будут опубликованы на сайте www.geometry.ru не позднее конца мая 2013 г. Свои результаты Вы сможете узнать по электронной почте в это же время.

1. (8) В треугольнике $ABC$ $AB = BC$. Из точки $E$ на стороне $AB$ опущен перпендикуляр $ED$ на $BC$. Оказалось, что $AE = DE$. Найдите угол $DAC$.

2. (8) В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($AC = BC$) угол при вершине $C$ равен $20^\circ$. Биссектрисы углов $A$ и $B$ пересекают боковые стороны треугольника соответственно в точках $A_1$ и $B_1$. Докажите, что треугольник $A_1OB_1$ (где $O$ — центр окружности, описанной около треугольника $ABC$) является равносторонним.

3. (8) Вневписанная окружность, соответствующая вершине $A$ прямоугольного треугольника $ABC$ ($\angle B = 90^\circ$), касается продолжений сторон $AB$, $AC$ в точках $A_1$, $A_2$ соответственно; аналогично определим точки $C_1$, $C_2$. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из точек $A$, $B$, $C$ на прямые $C_1C_2$, $A_1C_1$, $A_1A_2$, пересекаются в одной точке.

4. (8) Дан неравнобедренный треугольник $ABC$. Точка $O$ — центр описанной около него окружности, а точка $K$ — центр окружности $w$, описанной около треугольника $BCO$. Высота треугольника, проведенная из точки $A$, пересекает окружность $w$ в точке $P$. Прямая $PK$ пересекает описанную окружность треугольника в точках $E$ и $F$. Докажите, что один из отрезков $EP$ и $FP$ равен отрезку $PA$.

5. (8) Точка внутри выпуклого четырехугольника соединена с вершинами. Получились четыре равных треугольника. Верно ли, что четырехугольник — ромб?

6. (8–9) Диагонали $AC$, $BD$ трапеции $ABCD$ пересекаются в точке $P$. Описанные окружности треугольников $ABP$, $CDP$ пересекают прямую $AD$ в точках $X$, $Y$. Точка $M$ — середина $XY$. Докажите, что $BM = CM$.

7. (8–9) Пусть $BD$ — биссектриса треугольника $ABC$. Точки $I_a$, $I_c$ — центры вписанных окружностей треугольников $ABD$, $CBD$. Прямая $I_aI_c$ пересекает прямую $AC$ в точке $Q$. Докажите, что $\angle DBQ = 90^\circ$.

8. (8–9) Вокруг треугольника $ABC$ описана окружность. Пусть $X$ — точка внутри окружности, $K$ и $L$ — точки пересечения окружности и прямых $BX$ и $CX$ соответственно. Прямая $LK$ пересекает $BA$ в точке $E$, а прямую $AC$ в точке $F$. Найдите геометрическое место таких точек $X$, что окружности, описанные около треугольников $AFK$ и $AEL$, касаются.

9. (8–9) Пусть $T_1$, $T_2$ — точки касания вневписанных окружностей треугольника $ABC$ со сторонами $BC$ и $AC$ соответственно. Оказалось, что точка, симметричная центру вписанной окружности треугольника относительно середины $AB$, лежит на окружности, описанной около треугольника $CT_1T_2$. Найдите угол $BCA$.

10. (8–9) Окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается стороны $AB$ в точке $C'$. Окружность, вписанная в треугольник $ACC'$, касается сторон $AB$ и $AC$ в точках $C_1$, $B_1$; окружность, вписанная в треугольник $BCC'$, касается сторон $AB$ и $BC$ в точках $C_2$, $A_2$. Докажите, что прямые $B_1C_1$, $A_2C_2$ и $CC'$ пересекаются в одной точке.

11. (8–9) а) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть $r_1 \le r_2 \le r_3 \le r_4$ — взятые в порядке возрастания радиусы окружностей, вписанных в треугольники $ABC$, $BCD$, $CDA$, $DAB$. Может ли оказаться, что $r_4 > 2r_3$?

    б)В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке $E$. Пусть $r_1 \le r_2 \le r_3 \le r_4$ — взятые в порядке возрастания радиусы окружностей, вписанных в треугольники $ABE$, $BCE$, $CDE$, $DAE$. Может ли оказаться, что $r_2 > 2r_1$?

12. (8–11) На каждой стороне треугольника $ABC$ отмечены две различные точки. Известно, что это основания высот и биссектрис.

    (а) Пользуясь только линейкой без делений, определите, где высоты, а где биссектрисы.

    (б) Решите пункт (а), проведя только три прямых.

13. (9–10) Пусть $A_1$ и $C_1$ — точки касания вписанной окружности со сторонами $BC$ и $AB$ соответственно, а $A'$ и $C'$ — точки касания вневписанной окружности треугольника, вписанной в угол $B$, с продолжениями сторон $BC$ и $AB$ соответственно. Докажите, что ортоцентр $H$ треугольника $ABC$ лежит на $A_1C_1$ тогда и только тогда, когда прямые $A'C_1$ и $BA$ перпендикулярны.

14. (9–11) Точки $M$, $N$ — середины диагоналей $AC$, $BD$ прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = \angle D = 90°$). Описанные окружности треугольников $ABN$, $CDM$ пересекают прямую $BC$ в точках $Q$, $R$. Докажите, что точки $Q$, $R$ равноудалены от середины отрезка $MN$.

15. (9–11) а) В треугольник $ABC$ вписаны треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ так, что $C_1A_1 \perp BC$, $A_1B_1 \perp CA$, $B_1C_1 \perp AB$, $B_2A_2 \perp BC$, $C_2B_2 \perp CA$, $A_2C_2 \perp AB$. Докажите, что эти треугольники равны.

    б) Внутри треугольника $ABC$ взяли точки $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ так, что $A_1$ - на отрезке $AB_1$, $B_1$ - на отрезке $BC_1$, $C_1$ - на отрезке $CA_1$, $A_2$ - на отрезке $AC_2$, $B_2$ - на отрезке $BA_2$, $C_2$ - на отрезке $CB_2$ и углы $BAA_1, CBB_1, ACC_1, CAA_2, ABB_2, BCC_2$ равны. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.

16. (9–11) Вписанная в треугольник $ABC$ окружность касается сторон $BC$, $CA$, $AB$ в точках $A'$, $B'$, $C'$ соответственно. Перпендикуляр из центра $I$ этой окружности на медиану из вершины $C$ пересекает прямую $A'B'$ в точке $K$. Докажите, что $CK \parallel AB$.

17. (9–11) Дан вписанный четырехугольник, острый угол между диагоналями которого равен $\phi$. Докажите, что острый угол между диагоналями любого другого четырехугольника с теми же длинами сторон меньше $\phi$.

18. (9–11) В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AD$. Точки $M$ и $N$ являются проекциями $B$ и $C$ на $AD$. Окружность с диаметром $MN$ пересекает $BC$ в точках $X$ и $Y$. Докажите, что $\angle BAX = \angle CAY$.

19. (10–11) а) Вписанная окружность треугольника $ABC$ касается сторон $AC$ и $AB$ в точках $B_0$ и $C_0$ соответственно. Биссектрисы углов $B$ и $C$ треугольника $ABC$ пересекают серединный перпендикуляр к биссектрисе $AL$ в точках $Q$ и $P$ соответственно. Докажите, что прямые $PC_0$ и $QB_0$ пересекаются на прямой $BC$.

    б) В треугольнике $ABC$ провели биссектрису $AL$. Точки $O_1$ и $O_2$ — центры описанных окружностей треугольников $ABL$ и $ACL$ соответственно. Точки $B_1$ и $C_1$ — проекции вершин $C$ и $B$ на биссектрисы углов $B$ и $C$ соответственно. Докажите, что прямые $O_1C_1$ и $O_2B_1$ пересекаются на прямой $BC$.

    в) Докажите, что точки, полученные в пп.а) и б), совпадают.

20. (10–11) На стороне $AB$ треугольника $ABC$ взята произвольная точка $C_1$. Точки $A_1$, $B_1$ на лучах $BC$ и $AC$ таковы, что $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1 = \angle ACB$. Прямые $AA_1$ и $BB_1$ пересекаются в точке $C_2$. Докажите, что все прямые $C_1C_2$ проходят через одну точку.

21. (10–11) Дана окружность $\omega$ и точка $A$ вне ее. Через $A$ проведены две прямые, одна из которых пересекает $\omega$ в точках $B$ и $C$, а другая — в точках $D$ и $E$ ($D$ лежит между $A$ и $E$). Прямая, проходящая через $D$ и параллельная $BC$, вторично пересекает $\omega$ в точке $F$, а прямая $AF$ — в точке $T$. Пусть $M$ — точка пересечения прямых $ET$ и $BC$, а $N$ — точка, симметричная $A$ относительно $M$. Докажите, что описанная около треугольника $DEN$ окружность проходит через середину отрезка $BC$.

22. (10–11) Общие перпендикуляры к противоположным сторонам пространственного четырехугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что они пересекаются.

23. (10–11) Выпуклые многогранники $A$ и $B$ не имеют общих точек. Многогранник $A$ имеет ровно 2012 плоскостей симметрии. Каково наибольшее возможное количество плоскостей симметрии у фигуры, состоящей из $A$ и $B$, если $B$ имеет а) 2012, б) 2013 плоскостей симметрии?

    в) Каков будет ответ в пункте (б), если плоскости симметрии заменить на оси симметрии?