

# VI Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

## Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура Шестой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

В олимпиаде могут участвовать школьники 8–11 классов. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов (на момент проведения олимпиады) она предназначена. Впрочем, можно решать также задачи и для более старших классов (решенные задачи для младших классов при подведении итогов не учитываются).

Решения задач на русском языке должны быть посланы не позднее 1 апреля 2010 года. Рекомендуется присыпать решения по электронной почте в форматах pdf, doc или jpg на адрес [geomolymp@mccme.ru](mailto:geomolymp@mccme.ru). При этом во избежание потери работы нужно соблюдать следующие правила.

1. Каждую работу следует посыпать отдельным письмом.
2. Если работа содержиться в нескольких файлах, желательно присыпать их в виде архива.
3. В теме письма нужно написать "работа на олимпиаду им.Шарыгина", а в тексте привести следующие сведения об участнике:
  - фамилию, имя, отчество;
  - полный почтовый адрес с индексом, телефон, E-mail;
  - класс, в котором сейчас учится школьник;
  - номер и адрес школы;
  - ФИО учителей математики и/или руководителей кружка.

Если у Вас нет возможности присыпать работу в электронном виде, пришлите ее простой бандеролью (или принесите сами) в обычной тетради, не сворачивая тетрадь в трубку, по адресу: 119002, Москва Г-002, Большой Власьевский пер., д. 11., МЦНМО. На олимпиаду им. И.Ф.Шарыгина. На обложке тетради **обязательно** укажите все сведения, перечисленные выше в п.3.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая аккуратные чертежи. Если задача на вычисления, в конце ее решения должен быть отчетливо выделенный ответ. Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении какой-то известной теоремой или фактом, приведенным в задаче из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему или факт Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Ваши работы будут тщательно проверены, и Вы получите (не позднее середины мая 2010 г.) ответ жюри. Победители заочного тура — учащиеся 8–10 классов будут приглашены на финальный тур, который состоится летом 2010 года в г. Дубна под Москвой. Победители заочного тура — выпускники школ получат Грамоты оргкомитета олимпиады.

1. (8) Существует ли треугольник, в котором одна сторона равна какой-то из его высот, другая — какой-то из биссектрис, а третья — какой-то из медиан?

2. (8) В прямоугольном треугольнике  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) биссектрисы  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются в точке  $I$ . Пусть  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $CA_1B_1$ . Докажите, что  $OI \perp AB$ .
3. (8) Точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  лежат на сторонах  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  треугольника  $ABC$ . Точка  $X$  такова, что  $\angle AXB = \angle A'C'B' + \angle ACB$  и  $\angle BXC = \angle B'A'C' + \angle BAC$ . Докажите, что четырёхугольник  $XA'BC'$  — вписанный.
4. (8) Диагонали вписанного четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $N$ . Окружности, описанные вокруг треугольников  $ANB$  и  $CND$ , повторно пересекают стороны  $BC$  и  $AD$  в точках  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . Докажите, что четырёхугольник  $A_1B_1C_1D_1$  вписан в окружность с центром  $N$ .
5. (8–9) На высоте  $BD$  треугольника  $ABC$  взята точка  $E$  такая, что  $\angle AEC = 90^\circ$ . Точки  $O_1$  и  $O_2$  — центры описанных окружностей треугольников  $AEB$  и  $CEB$ ;  $F, L$  — середины отрезков  $AC$  и  $O_1O_2$ . Докажите, что точки  $L, E, F$  лежат на одной прямой.
6. (8–9) На стороне  $BC$  равностороннего треугольника  $ABC$  взяты точки  $M$  и  $N$  ( $M$  лежит между  $B$  и  $N$ ) такие, что  $\angle MAN = 30^\circ$ . Описанные окружности треугольников  $AMC$  и  $ANB$  пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что прямая  $AK$  содержит центр описанной окружности треугольника  $AMN$ .
7. (8–9) Через вершину  $B$  треугольника  $ABC$  проведена прямая, перпендикулярная медиане  $BM$ . Эта прямая пересекает высоты, выходящие из  $A$  и  $C$  (или их продолжения), в точках  $K$  и  $N$ . Точки  $O_1$  и  $O_2$  — центры описанных окружностей треугольников  $ABK$  и  $CBN$  соответственно. Докажите, что  $O_1M = O_2M$ .
8. (8–10) В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $AH$ . Точки  $I_b$  и  $I_c$  — центры вписанных окружностей треугольников  $ABH$  и  $ACH$ ;  $L$  — точка касания вписанной окружности треугольника  $ABC$  со стороной  $BC$ . Найдите угол  $LI_bI_c$ .
9. (8–10) Назовём точку внутри треугольника хорошей, если три чевианы через неё равны. В треугольнике  $ABC$  стороны  $AB$  и  $BC$  равны, а количество хороших точек нечётно. Чему оно может быть равно?
10. (8–11) Дан треугольник  $ABC$ . С помощью двусторонней линейки, проведя не более восьми линий, постройте на стороне  $AB$  такую точку  $D$ , что  $AD/BD = BC/AC$ .
11. (8–11) Выпуклый  $n$ -угольник разрезан на 3 выпуклых многоугольника. У одного из них  $n$  сторон, у другого — больше, чем  $n$ , у третьего — меньше, чем  $n$ . Каковы возможные значения  $n$ ?
12. (9) В прямоугольном треугольнике  $ABC$   $AC$  — больший катет,  $CH$  — высота, проведенная к гипотенузе. Окружность с центром  $H$  и радиусом  $CH$  пересекает катет  $AC$  в точке  $M$ . Точка  $B'$  симметрична точке  $B$  относительно  $H$ . В точке  $B'$  восстановлен перпендикуляр к гипотенузе, который пересекает окружность в точке  $K$ . Докажите, что:
- $B'M \parallel BC$ ;
  - $AK$  — касательная к окружности.

13. (9) В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$   $AB = BC$ . На диагонали  $BD$  выбрана точка  $K$  такая, что  $\angle AKB + \angle BKC = \angle A + \angle C$ . Докажите, что  $AK \cdot CD = KC \cdot AD$ .
14. (9–10) На стороне  $AD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  нашлась такая точка  $M$ , что  $CM$  и  $BM$  параллельны  $AB$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что  $S_{ABCD} \geq 3S_{BCM}$ .
15. (9–11) В остроугольном треугольнике  $ABC$   $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  — высоты. Прямые  $AA_1$  и  $B_1C_1$  пересекаются в точке  $K$ . Окружности, описанные вокруг треугольников  $A_1KC_1$  и  $A_1KB_1$  вторично пересекают прямые  $AB$  и  $AC$  в точках  $N$  и  $L$  соответственно. Докажите, что
- сумма диаметров этих окружностей равна стороне  $BC$ .
  - $A_1N/BB_1 + A_1L/CC_1 = 1$ .
16. (9–11) В угол с вершиной  $A$  вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках  $B$  и  $C$ . Прямая, проходящая через  $A$ , пересекает окружность в точках  $D$  и  $E$ . Хорда  $BX$  параллельна прямой  $DE$ . Докажите, что отрезок  $XC$  проходит через середину отрезка  $DE$ .
17. (9–11) Постройте треугольник по высоте и биссектрисе, проведенным из одной вершины, и медиане, проведенной из другой вершины.
18. (9–11) На хорде  $AC$  окружности  $\omega$  выбрали точку  $B$ . На отрезках  $AB$  и  $BC$  как на диаметрах построили окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$ , которые пересекают  $\omega$  второй раз в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Лучи  $O_1D$  и  $O_2E$  пересекаются в точке  $F$ . Лучи  $AD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $G$ . Докажите, что прямая  $FG$  проходит через середину  $AC$ .
19. (9–11) Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность с центром  $O$ . Точки  $P$  и  $Q$  диаметрально противоположны  $C$  и  $D$  соответственно. Касательные к окружности в этих точках пересекают прямую  $AB$  в точках  $E$  и  $F$  ( $A$  лежит между  $E$  и  $B$ ,  $B$  — между  $A$  и  $F$ ). Прямая  $EO$  пересекает  $AC$  и  $BC$  в точках  $X$  и  $Y$ , а прямая  $FO$  пересекает  $AD$  и  $BD$  в точках  $U$  и  $V$ . Докажите, что  $XV = YU$ .
20. (10) Вписанная окружность остроугольного треугольника  $ABC$  касается его сторон  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  в точках  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  соответственно. Пусть  $A_2$ ,  $B_2$  — середины отрезков  $B_1C_1$ ,  $A_1C_1$  соответственно,  $O$  — центр описанной окружности треугольника,  $P$  — одна из точек пересечения прямой  $CO$  с вписанной окружностью. Прямые  $PA_2$  и  $PB_2$  вторично пересекают вписанную окружность в точках  $A'$  и  $B'$ . Докажите, что прямые  $AA'$  и  $BB'$  пересекаются на высоте треугольника, опущенной на  $AB$ .
21. (10–11) Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ . Известно, что  $\angle ABD + \angle ACD > \angle BAC + \angle BDC$ . Докажите, что  $S_{ABD} + S_{ACD} > S_{BAC} + S_{BDC}$ .
22. (10–11) Окружность с центром  $F$  и парабола с фокусом  $F$  пересекаются в двух точках. Докажите, что на окружности найдутся такие четыре точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , что прямые  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  касаются параболы.

23. (10–11) Шестиугольник  $ABCDEF$  вписан в окружность. Известно, что  $AB \cdot CF = 2BC \cdot FA$ ,  $CD \cdot EB = 2DE \cdot BC$ ,  $EF \cdot AD = 2FA \cdot DE$ . Докажите, что прямые  $AD$ ,  $BE$  и  $CF$  пересекаются в одной точке.
24. (10–11) Данна прямая  $l$  в пространстве и точка  $A$ , не лежащая на ней. Для каждой прямой  $l'$ , проходящей через  $A$ , построим общий перпендикуляр  $XY$  ( $Y$  лежит на  $l'$ ) к прямым  $l$  и  $l'$ . Найдите ГМТ точек  $Y$ .
25. (11) Среди вершин двух неравных икосаэдров можно выбрать шесть, являющихся вершинами правильного октаэдра. Найдите отношение ребер икосаэдров.