V Олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Заочный тур

Приводим условия задач заочного тура пятой геометрической олимпиады им. И.Ф.Шарыгина.

В олимпиаде могут участвовать школьники 8–11 классов. В списке задач, приведенном ниже, после порядкового номера каждой задачи указано, учащимся каких классов (на момент проведения олимпиады) она предназначена. Впрочем, можно решать также задачи и для более старших классов (решенные задачи для младших классов при подведении итогов не учитываются).

Решения задач на русском языке должны быть посланы не позднее 1 апреля 2009 года. Рекомендуется присылать решения по электронной почте в форматах pdf, doc или jpg на адрес geomolymp@mccme.ru. При этом во избежание потери работы нужно соблюдать следующие правила.

1. Каждую работу следует посылать отдельным письмом.

2. Если работа содержится в нескольких файлах, желательно присылать их в виде архива.

3. В теме письма нужно написать "работа на олимпиаду им.Шарыгина", а в тексте привести следующие сведения об участнике:

- фамилию, имя, отчество;

- полный почтовый адрес с индексом, телефон, E-mail;

- класс, в котором сейчас учится школьник;

- номер и адрес школы;

- ФИО учителей математики и/или руководителей кружка.

Если у Вас нет возможности прислать работу в электронном виде, пришлите ее простой бандеролью (или принесите сами) в обычной тетради, не сворачивая тетрадь в трубку, по адресу: *119002, Москва Г-002, Большой Власьевский пер., д. 11., МЦНМО. На олимпиаду им. И.Ф.Шарыгина.* На обложке тетради обязательно укажите все сведения, перечисленные выше в п.3.

Решение каждой задачи начинайте с новой страницы: сначала надо переписать условие, затем записать решение, причем старайтесь писать подробно, приводя основные рассуждения и выкладки, делая аккуратные чертежи. Если задача на вычисления, в конце ее решения должен быть отчетливо выделенный ответ. Пишите аккуратно, ведь Вы же заинтересованы в том, чтобы Вашу работу можно было понять и справедливо оценить!

Если Вы пользуетесь в решении какой-то известной теоремой или фактом, приведенным в задаче из школьного учебника, можно просто на это сослаться (чтобы было понятно, какую именно теорему или факт Вы имеете в виду). Если же Вам необходим факт, не встречающийся в школьном курсе, его обязательно надо доказать (или сообщить, из какого источника он взят).

Ваши работы будут тщательно проверены, и Вы получите (не позднее середины мая 2009 г.) ответ жюри. Победители заочного тура — учащиеся 8–10 классов будут приглашены на финальный тур, который состоится летом 2009 года в г. Дубна под Москвой. Победители заочного тура — выпускники школ получат Грамоты оргкомитета олимпиады.

1. (8) Точки B_1 и B_2 лежат на луче AM, а точки C_1 и C_2 на луче AK. Окружность с центром O вписана в треугольники AB_1C_1 и AB_2C_2. Докажите, что углы B_1OB_2 и C_1OC_2 равны.

2. (8) Через каждую вершину неравнобедренного треугольника ABC проведен отрезок, разбивающий его на два треугольника с равными периметрами. Верно ли, что все эти отрезки имеют разные длины?

3. (8) Биссектрисы углов трапеции образуют при пересечении четырехугольник с перпендикулярными диагоналями. Докажите, что трапеция равнобокая.

4. (8–9) Две окружности пересекаются в точках P и Q. Из точки Q пустили в каждую из окружностей по одному лучу, которые отражаются от окружностей по закону "угол падения равен углу отражения". Точки касания траектории первого луча — $A_1, A_2, \ldots$ второго — $B_1, B_2, \ldots$.

   Оказалось, что точки A_1, B_1 и P лежат на одной прямой. Докажите, что тогда все прямые A_iB_i проходят через точку P.

5. (8–9) Дан треугольник ABC и построена вневписанная окружность с центром O, касающаяся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Точка O_1 симметрична точке O относительно прямой BC. Найдите величину угла A, если известно, что точка O_1 лежит на описанной около треугольника ABC окружности.

6. (8–9) Найдите геометрическое место центров всех вневписанных окружностей прямоугольных треугольников, имеющих данную гипотенузу.

7. (8–9) Дан треугольник ABC. Из вершин B и C опущены перпендикуляры BM и CN на биссектрисы углов C и B соответственно. Докажите, что прямая MN пересекает стороны AC и AB в точках их касания со вписанной окружностью.

8. (8–10) Многоугольник можно разрезать на две равные части тремя различными способами. Верно ли, что у него обязательно есть центр или ось симметрии?

9. (8–11) На плоскости задано n точек, являющихся вершинами выпуклого n-угольника, $n > 3$. Известно, что существует ровно k равносторонних треугольников со стороной 1, вершины которых — заданные точки.

   а) Докажите, что $k < \frac{2}{3}n$.

   б) Приведите пример конфигурации, для которой $k > 0,666n$.

10. (9) Пусть ABC — остроугольный треугольник, CC_1 — его биссектриса, O — центр описанной окружности. Точка пересечения прямой OC_1 с перпендикуляром из C на AB лежит на описанной окружности треугольника AOB. Найдите угол C.

11. (9) Дан четырехугольник $ABCD$. Оказалось, что окружность, описанная около треугольника ABC, касается стороны CD, а окружность, описанная около треугольника ACD, касается стороны AB. Докажите, что диагональ AC меньше, чем расстояние между серединами сторон AB и CD.

12. (9–10) В треугольнике ABC провели бисектрису CL. Точки A_1 и B_1 симметричны точкам A и B относительно CL, A_2 и B_2 симметричны точкам A и B относительно L. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников AB_1B_2 и BA_1A_2. Докажите, что углы O_1CA и O_2CB равны.

13. (9–10) В треугольнике ABC отметили центр вписанной окружности, основание высоты, опущенной на сторону AB, и центр вневписанной окружности, касающейся этой стороны и продолжений двух других. После этого сам треугольник стерли. Восстановите его.

14. (9–10) Дан треугольник ABC площади 1. Из вершины B опущен перпендикуляр BM на биссектрису угла C. Найдите площадь треугольника AMC.

15. (9–10) Даны окружность и не лежащая на ней точка. Из всех треугольников, одна вершина которых совпадает с данной точкой, а две другие лежат на окружности, выбран треугольник наибольшей площади. Докажите, что он равнобедренный.

16. (9–11) Три прямые проходят через точку O и образуют попарно равные углы. На одной из них взяты точки A_1, A_2, на другой — B_1, B_2, так что точка C_1 пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2 лежит на третьей прямой. Пусть C_2 — точка пересечения A_1B_2 и A_2B_1. Докажите, что угол C_1OC_2 прямой.

17. (9–11) Дан треугольник ABC и точки X, Y, не лежащие на его описанной окружности. Пусть A_1, B_1, C_1 — проекции X на BC, CA, AB, а A_2, B_2, C_2 — проекции Y. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из A_1, B_1, C_1 на, соответственно, B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда прямая XY проходит через центр окружности, описанной около ABC.

18. (9–11) На плоскости даны три параллельные прямые. Найдите геометрическое место центров вписанных окружностей треугольников, вершины которых расположены (по одной) на этих прямых.

19. (10–11) Дан выпуклый n-угольник $A_1 \dots A_n$. Пусть $P_i\,(i = 1, \dots, n)$ — такая точка на его границе, что прямая A_iP_i делит его площадь пополам. Дано, что все точки P_i не совпадают с вершинами и лежат на k сторонах n-угольника. Каково наименьшее и наибольшее возможное значение k при каждом данном n?

20. (10–11) В остроугольном треугольнике ABC точка H — ортоцентр, O — центр описанной окружности, AA_1, BB_1 и CC_1 — высоты. Точка C_2 симметрична C относительно A_1B_1. Докажите, что H, O, C_1 и C_2 лежат на одной окружности.

21. (10–11) Дан четырехугольник $ABCD$, противоположные стороны которого пересекаются в точках P и Q. Две прямые, проходящие через эти точки, пересекают стороны четырехугольника в четырех точках, являющихся вершинами параллелограмма. Докажите, что центр этого параллелограмма лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей $ABCD$.

22. (10–11) Постройте четырехугольник, в который можно вписать и около которого можно описать окружность, по радиусам этих окружностей и углу между диагоналями.

23. (10–11) Верно ли, что при любом n правильный $2n$-угольник является проекцией некоторого многогранника, имеющего не более, чем $n + 2$ грани?

24. (11) Дана четырёхугольная пирамида, в которую можно вписать сферу. Точку касания этой сферы с основанием пирамиды спроектировали на рёбра основания. Докажите, что все проекции лежат на одной окружности.