IV Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 8 класс. Первый день

30 июля 2008 года *«Ратмино», Дубна*

1. Существует ли выпуклый четырехугольник без параллельных сторон, который можно разрезать на четыре равных треугольника?

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC и $\angle A = 50^\circ$. Точки K и L на катете BC таковы, что $\angle KAC = \angle LAB = 10^\circ$. Найдите CK/LB.

3. В выпуклом четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями равны два противолежащих угла. Докажите, что в него можно вписать окружность.

4. Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A', B', прямые AA' и BB' пересекаются в точке C_1. Докажите, что $\angle C_1CA = \angle C_0CB$.

5. Даны два треугольника ABC, $A'B'C'$. Обозначим через α угол между высотой и медианой треугольника ABC, проведенными из вершины A. Аналогично определим углы β, γ, α', β', γ'. Известно, что $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$. Обязательно ли треугольники подобны?

Ягубов.РФ

IV Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 8 класс. Первый день

30 июля 2008 года *«Ратмино», Дубна*

1. Существует ли выпуклый четырехугольник без параллельных сторон, который можно разрезать на четыре равных треугольника?

2. Дан прямоугольный треугольник $\boldsymbol{ABC}$ с гипотенузой $\boldsymbol{AC}$ и $\angle\boldsymbol{A} = \mathbf{50}^\circ$. Точки $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$ на катете $\boldsymbol{BC}$ таковы, что $\angle\boldsymbol{KAC} = \angle\boldsymbol{LAB} = \mathbf{10}^\circ$. Найдите $\boldsymbol{CK/LB}$.

3. В выпуклом четырехугольнике с перпендикулярными диагоналями равны два противолежащих угла. Докажите, что в него можно вписать окружность.

4. Пусть $\boldsymbol{CC_0}$ — медиана треугольника $\boldsymbol{ABC}$, серединные перпендикуляры к $\boldsymbol{AC}$ и $\boldsymbol{BC}$ пересекают $\boldsymbol{CC_0}$ в точках $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{B'}$, прямые $\boldsymbol{AA'}$ и $\boldsymbol{BB'}$ пересекаются в точке $\boldsymbol{C_1}$. Докажите, что $\angle\boldsymbol{C_1CA} = \angle\boldsymbol{C_0CB}$.

5. Даны два треугольника $\boldsymbol{ABC}$, $\boldsymbol{A'B'C'}$. Обозначим через $\boldsymbol{\alpha}$ угол между высотой и медианой треугольника $\boldsymbol{ABC}$, проведенными из вершины $\boldsymbol{A}$. Аналогично определим углы $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\alpha'}$, $\boldsymbol{\beta'}$, $\boldsymbol{\gamma'}$. Известно, что $\boldsymbol{\alpha = \alpha'}$, $\boldsymbol{\beta = \beta'}$, $\boldsymbol{\gamma = \gamma'}$. Обязательно ли треугольники подобны?

Ягубов.РФ

IV Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 9 класс. Первый день

30 июля 2008 года *«Ратмино», Дубна*

1. Выпуклый многоугольник можно разрезать на 2008 равных четырехугольников. Обязательно ли у него есть центр или ось симметрии?

2. На плоскости дан четырёхугольник $ABCD$. Для произвольной точки P на плоскости обозначим через K, L, M, N ее проекции на прямые AB, BC, CD, DA, соответственно. Найдите ГМТ P таких, что $KM \perp LN$.

3. Докажите неравенство
$$\frac{1}{\sqrt{2\sin A}} + \frac{1}{\sqrt{2\sin B}} + \frac{1}{\sqrt{2\sin C}} \leqslant \sqrt{\frac{p}{r}},$$
где p — полупериметр, а r — радиус вписанной окружности треугольника ABC.

4. Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A_c, B_c, прямые AA_c и BB_c пересекаются в точке C_1. Аналогично определим точки A_1, B_1. Докажите, что описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

5. Можно ли оклеить поверхность правильного тетраэдра одинаковыми правильными шестиугольниками в один слой?

ЯгубовРФ

IV Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 9 класс. Первый день

30 июля 2008 года *«Ратмино», Дубна*

1. Выпуклый многоугольник можно разрезать на 2008 равных четырехугольников. Обязательно ли у него есть центр или ось симметрии?

2. На плоскости дан четырёхугольник $ABCD$. Для произвольной точки P на плоскости обозначим через K, L, M, N ее проекции на прямые AB, BC, CD, DA, соответственно. Найдите ГМТ P таких, что $KM \perp LN$.

3. Докажите неравенство
$$\frac{1}{\sqrt{2\sin A}}+\frac{1}{\sqrt{2\sin B}}+\frac{1}{\sqrt{2\sin C}} \leqslant \sqrt{\frac{p}{r}},$$
где p — полупериметр, а r — радиус вписанной окружности треугольника ABC.

4. Пусть CC_0 — медиана треугольника ABC, серединные перпендикуляры к AC и BC пересекают CC_0 в точках A_c, B_c, прямые AA_c и BB_c пересекаются в точке C_1. Аналогично определим точки A_1, B_1. Докажите, что описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

5. Можно ли оклеить поверхность правильного тетраэдра одинаковыми правильными шестиугольниками в один слой?

ЯгубовРФ

IV Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 10 класс. Первый день

30 июля 2008 года *«Ратмино», Дубна*

1. Вписанно-описанный n-угольник разрезан прямой линией на два вписанно-описанных многоугольника с разным количеством сторон. При каких n это возможно?

2. Пусть $A_1B_1C_1$ — треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно центра окружности, вписанной в его серединный треугольник. Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей треугольника ABC.

3. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в двух точках X и Y, а третья окружность ω касается внутренним образом окружностей ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно. Отрезок XY пересекает окружность ω в двух точках M и N. Лучи PM и PN пересекают ω_1 в точках A и D, а лучи QM и QN пересекают ω_2 в точках B и C соответственно.
Докажите, что $AB = CD$.

4. На прямой l даны три точки C_0, C_1, C_2. Найдите геометрическое место центров окружностей вписанных в треугольники ABC, у которых сторона AB лежит на прямой l, а основания медианы, биссектрисы и высоты, проведенных из вершины C, совпадают с C_0, C_1, C_2.

5. Сечение правильной четырехугольной пирамиды является правильным пятиугольником. Найдите отношение его стороны к стороне основания пирамиды.

Ягубов.РФ

IV Всероссийская олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина
Финал. 10 класс. Первый день

30 июля 2008 года *«Ратмино», Дубна*

1. Вписанно-описанный n-угольник разрезан прямой линией на два вписанно-описанных многоугольника с разным количеством сторон. При каких n это возможно?

2. Пусть $A_1B_1C_1$ — треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно центра окружности, вписанной в его серединный треугольник. Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, образованного центрами вневписанных окружностей треугольника ABC.

3. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в двух точках X и Y, а третья окружность ω касается внутренним образом окружностей ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно. Отрезок XY пересекает окружность ω в двух точках M и N. Лучи PM и PN пересекают ω_1 в точках A и D, а лучи QM и QN пересекают ω_2 в точках B и C соответственно.
Докажите, что $AB = CD$.

4. На прямой l даны три точки C_0, C_1, C_2. Найдите геометрическое место центров окружностей вписанных в треугольники ABC, у которых сторона AB лежит на прямой l, а основания медианы, биссектрисы и высоты, проведенных из вершины C, совпадают с C_0, C_1, C_2.

5. Сечение правильной четырехугольной пирамиды является правильным пятиугольником. Найдите отношение его стороны к стороне основания пирамиды.

Ягубов.РФ