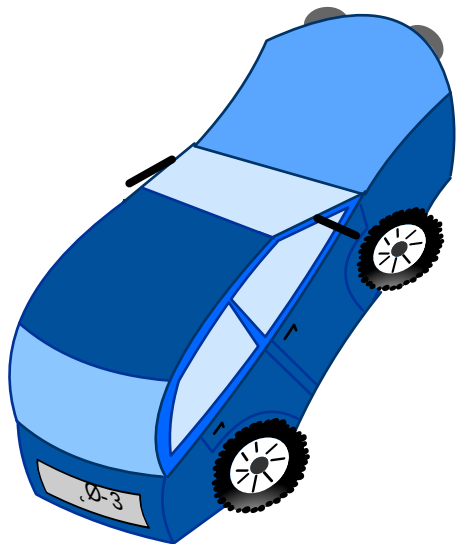


III олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Финал. 8 класс

1. Определите, с какой стороны расположен руль у изображенного на рисунке автомобиля.



2. Восстановите прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$) по вершинам A , C и точке на биссектрисе угла B .
3. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре подобных треугольника. Докажите, что его можно разрезать на два равных треугольника.
4. Найдите геометрическое место точек пересечения высот треугольников, у которых даны середина одной стороны и основания высот, опущенных на две другие.
5. Медианы AA' и BB' треугольника ABC пересекаются в точке M , $\angle AMB = 120^\circ$. Докажите, что углы $AB'M$ и $BA'M$ не могут быть оба острыми или оба тупыми.
6. Назовем два неравных треугольника *похожими*, если можно обозначить их ABC и $A'B'C'$, так чтобы выполнялись равенства $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ и $\angle B = \angle B'$. Существуют ли три попарно похожих треугольника?

III олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Финал. 9 класс

1. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Докажите, что радиус этой окружности меньше суммы радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD .
2. На основании AD и боковой стороне AB равнобедренной трапеции $ABCD$ взяты точки E, F соответственно так, что $CDEF$ — также равнобедренная трапеция. Докажите, что $AE \cdot ED = AF \cdot FB$.
3. В шестиугольнике $ABCDEF$ $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$ и $\angle A = \angle C = \angle E$. Докажите, что главные диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.
4. Дан треугольник ABC . Точка P лежит на окружности ABH , где H — ортоцентр треугольника. Прямые AP, BP пересекают противоположные стороны треугольника в точках A', B' . Найдите ГМТ середин отрезков $A'B'$.
5. Постройте треугольник, если даны центр вписанной в него окружности, середина одной из сторон и основание опущенной на эту сторону высоты.
6. Куб с ребром $2n + 1$ разрезают на кубики с ребром 1 и бруски размера $2 \times 2 \times 1$. Какое наименьшее количество единичных кубиков может при этом получиться?

III олимпиада по геометрии им. И.Ф.Шарыгина

Финал. 10 класс

1. В остроугольном треугольнике отметили отличные от вершин точки пересечения описанной окружности с высотами, проведенными из двух вершин, и биссектрисой, проведенной из третьей вершины, после чего сам треугольник стерли. Восстановите его.
2. Точки A' , B' , C' — основания высот остроугольного треугольника ABC . Окружность с центром B и радиусом BB' пересекает прямую $A'C'$ в точках K и L (точки K и A лежат по одну сторону от BB'). Докажите, что точка пересечения прямых AK и CL лежит на прямой BO , где O — центр окружности, описанной около ABC .
3. Даны две окружности, пересекающиеся в точках P и Q . C — произвольная точка одной из окружностей, отличная от P и Q ; A , B — вторые точки пересечения прямых CP , CQ с другой окружностью. Найдите геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольников ABC .
4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Точки C' , D' симметричны ортоцентрам треугольников ABD и ABC относительно O . Докажите, что если прямые BD и BD' симметричны относительно биссектрисы угла B , то прямые AC и AC' симметричны относительно биссектрисы угла A .
5. Каждое ребро выпуклого многогранника параллельно перенесли на некоторый вектор так, что ребра образовали каркас нового выпуклого многогранника. Обязательно ли он равен исходному?
6. Даны две концентрические окружности. Каждая из окружностей b_1 и b_2 касается внешним образом одной окружности и внутренним — другой, а каждая из окружностей c_1 и c_2 касается внутренним образом обеих окружностей. Докажите, что 8 точек, в которых окружности b_1 , b_2 пересекают c_1 , c_2 , лежат на двух окружностях, отличных от b_1 , b_2 , c_1 , c_2 . (Некоторые из этих окружностей могут вырождаться в прямые.)