

# Метод Штурма

10 класс

17.10.13

1. Докажите, что при сближении двух чисел с сохранением их суммы

- Их произведение увеличивается.
- Их сумма квадратов уменьшается.
- Их сумма  $n$ -ных степеней уменьшается.

2. Докажите, что при сближении двух чисел с сохранением их произведения

- Их сумма уменьшается.
- Их сумма квадратов уменьшается.

3. Докажите неравенства между средними (слева на право: среднее гармоническое, геометрическое, арифметическое, квадратическое)

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

4. Пусть неотрицательные числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  таковы, что  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ .  
Докажите, что тогда

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)}{x_1 x_2 \dots x_n} \geq (n-1)^n$$

5. Пусть неотрицательные числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  таковы, что  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{1}{2}$ .  
Докажите, что тогда

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)}{(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)} \geq \frac{1}{3}$$

6. Докажите, что  $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$ , при  $x, y, z \geq 0$  и  $x + y + z = 1$ .

7. Докажите, что  $abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd$ , где  $a, b, c, d > 0$  и  $a + b + c + d = 1$ .

8. Докажите, что из всех выпуклых  $n$ -угольников, вписанных в данную окружность, наибольшим является периметр правильного.

9. Докажите неравенство для положительных  $a_1, a_2, \dots, a_n$ :

$$\left(1 + \frac{1}{a_1(1+a_1)}\right) \left(1 + \frac{1}{a_2(1+a_2)}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{a_n(1+a_n)}\right) \geq \left(1 + \frac{1}{a(1+a)}\right)^n$$

, где  $a$  - среднее геометрическое чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .