11 класс • Кружок в Хамовниках • 28 мая 2014 г.

Кривые второго порядка

1. Докажите фокальное свойство параболы (ну и для эллипса с гиперболой, если не знаете).

2. Дан эллипс с фокусами F_1, F_2 и точка X вне этого эллипса. Из неё проведены касательные XP и XQ к этому эллипсу. Докажите, что $\angle PXF_1 = \angle QXF_2$.

3. (a) Из фокуса F эллипса α опущены перпендикуляры FH на всевозможные касательные к α. Докажите, что ГМТ M есть окружность.

(b) Для касательной l к α выберем на ней точку M такую, что $\angle(l, MF) = \beta = \text{const}$. Докажите, что ГМТ M по всем возможным касательным l есть окружность. Покажите, что если $\beta < \beta_0$, то эта окружность касается эллипса в двух точках, если $\beta = \beta_0$, то касается в одной точке, а если $\beta > \beta_0$, то не касается. Чему равно β_0?

4. (a) Докажите ещё раз, что образ при изогональном сопряжении прямой, не проходящей через вершины треугольника есть коника, проходящая через вершины треугольника.

(b) Докажите, что точки A, B, C, I, H лежат на одной гиперболе (**гипербола Фейербаха**).

(c) Докажите, что точки Жергонна и Нагеля также лежат на этой гиперболе.

(d) Докажите, что асимптоты гиперболы Фейербаха взаимно перпендикулярны.

(e) Докажите, что центром гиперболы Фейербаха является точка Фейербаха.

5. (a) Прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах треугольника). Докажите, что существует единственная коника, касающаяся в точках A_1, B_1, C_1 сторон треугольника. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

(b) Докажите, что фокусы любой такой коники изогонально сопряжены. Покажите и обратное: если даны две изогонально сопряжённые точки, то существует единственная коника с фокусами в этих точках, касающаяся сторон треугольника.

(c) Докажите, что фокус параболы, вписанной в треугольник лежит на её описанной окружности.

6. (a) Покажите, что двойственной к конике фигурой является коника.

(b) Покажите, что двойственной к эллипсу фигурой, если брать двойственность в одном из фокусов, является окружность.

(c) Покажите, что по для любых n точек и $5-n$ прямых достаточно общего положения существует единственная коника, проходящая через эти n точек и касающаяся этих $5-n$ прямых. (частичные продвижения тоже интересны; можно пользоваться утверждением для $n = 5$)

(d) Покажите, что существует бесконечно много пар точек изогонально сопряжённых относительно данного четырёхугольника.

(e) Покажите, что для данного четырёхугольника существует ровно одна парабола, которая касается всех его сторон.

(f) Через предыдущий пункт этой задачи и через последний пункт предыдущей задачи докажите существование точки Микеля.

7. Пусть прямая пересекает гиперболу в точках A и B, а её асимптоты — в точках X и Y. Доказать, что $AX = BY$.

8. Пусть A — фиксированная точка параболы Γ. Докажите, что все хорды Γ, видимые из A под прямым углом, пересекаются в одной точке.

9. В пространстве даны два эллипса с общим фокусом. Два эллипсоида получены вращением этих эллипсов относительно больших осей. Докажите, что все плоскости, касающиеся данных эллипсоидов проходят через одну точку или параллельны одной прямой.

10. Назовём *эллипсоидом вращения* поверхность, получающуюся вращением эллипса относительно его большей оси. *Фокусами* эллипсоида вращения называются фокусы исходного эллипса. Докажите, что пересечение двух эллипсоидов вращения с общим фокусом лежит в одной плоскости.

11. На плоскости дана прямая l и точка A. Найдите множество точек, которые могут быть фокусами парабол с вершиной A и касательной l.

Ягубов.РФ