*11 класс • Кружок в Хамовниках • 13 марта 2014 г.*

# Ориентированные графы

**Определение.** Назовём ориентированный граф *сильно связным*, если из любой вершины существует путь до любой другой.

**Определение.** Назовём ориентированный граф *транзитивным*, если в нём нет циклических маршрутов (идущих по стрелкам).

**Определение.** Назовём ориентированный граф *турниром*, если между любыми двумя вершинами есть ребро ровно в одну сторону.

**1.** В стране несколько городов, некоторые из них соединены дорогами с односторонним движением. Докажите, что можно разбить все города на области, так что города в одной области и дороги между ними образовывали сильно связный граф, а циклов, проходящих по городам из разных областей не существовало.

**2.** **(a)** Ориентированный граф на $n$ вершинах сильно связен. Докажите, что в нём можно оставить не более $2n-2$ рёбер так, чтобы он остался сильно связным.

**(b)** Ориентированный граф на $n$ вершинах сильно связен. Кроме того, известно, что существуют вершины $u$ и $v$ такие, что есть ребро $uv$, но нет ребра $vu$. Докажите, что можно оставить не более $2n-3$ рёбер так, чтобы граф остался сильно связным.

**3.** Дан сильно связный турнир на $n \geqslant 3$ вершинах.

**(a)** Докажите, что в нём есть цикл, проходящий по всем вершинам.

**(b)** Докажите, что в нём есть простой цикл (не проходящий ни по какой вершине дважды) любой длины, меньшей $n$ (ну, и хотя бы длины 3).

**(c)** Докажите, что через любую его вершину проходит простой цикл любой длины, меньшей $n$.

**(d)** Какое наименьшее количество простых циклов может быть в сильно связном турнире не $n$ вершинах?

**4.** Докажите, что в любом турнире нечётное число *гамильтоновых* путей (то есть, путей, проходящих по всем вершинам по одному разу).

---

*11 класс • Кружок в Хамовниках • 13 марта 2014 г.*

# Ориентированные графы

**Определение.** Назовём ориентированный граф *сильно связным*, если из любой вершины существует путь до любой другой.

**Определение.** Назовём ориентированный граф *транзитивным*, если в нём нет циклических маршрутов (идущих по стрелкам).

**Определение.** Назовём ориентированный граф *турниром*, если между любыми двумя вершинами есть ребро ровно в одну сторону.

**1.** В стране несколько городов, некоторые из них соединены дорогами с односторонним движением. Докажите, что можно разбить все города на области, так что города в одной области и дороги между ними образовывали сильно связный граф, а циклов, проходящих по городам из разных областей не существовало.

**2.** **(a)** Ориентированный граф на $n$ вершинах сильно связен. Докажите, что в нём можно оставить не более $2n-2$ рёбер так, чтобы он остался сильно связным.

**(b)** Ориентированный граф на $n$ вершинах сильно связен. Кроме того, известно, что существуют вершины $u$ и $v$ такие, что есть ребро $uv$, но нет ребра $vu$. Докажите, что можно оставить не более $2n-3$ рёбер так, чтобы граф остался сильно связным.

**3.** Дан сильно связный турнир на $n \geqslant 3$ вершинах.

**(a)** Докажите, что в нём есть цикл, проходящий по всем вершинам.

**(b)** Докажите, что в нём есть простой цикл (не проходящий ни по какой вершине дважды) любой длины, меньшей $n$ (ну, и хотя бы длины 3).

**(c)** Докажите, что через любую его вершину проходит простой цикл любой длины, меньшей $n$.

**(d)** Какое наименьшее количество простых циклов может быть в сильно связном турнире не $n$ вершинах?

**4.** Докажите, что в любом турнире нечётное число *гамильтоновых* путей (то есть, путей, проходящих по всем вершинам по одному разу).