Изогональное сопряжение

1. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Точка Q симметрична точке A относительно середины отрезка BC. Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены.

2. Точки P и Q изогонально сопряжены с треугольнике ABC. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из этих точек на стороны треугольника, лежат на одой окружности.

3. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка B_0 — середина стороны AC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой A_1C_1.

4. Докажите, что при изогональном сопряжении окружность, проходящая через вершины B и C и отличная от описанной окружности, переходит в окружность, проходящую через вершины B и C.

5. AA_0, BB_0, CC_0 — высоты треугольника ABC, H — ортоцентр, M — произвольная точка. A_1 — точка симметричная M относительно BC; аналогично определим точки B_1, C_1. Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 конкурентны.

6. Из некоторой точки P опущены перпендикуляры PA_1 и PA_2 на сторону BC треугольника ABC и на высоту AA_3. Аналогично определяются точки B_1, B_2 и C_1, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке или параллельны.

7. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

8. Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P, лежащей внутри треугольника. Известно, что $PA_1 = PB_1 = PC_1$. Докажите, что перпендикуляры, восставленные в точках A_1, B_1 и C_1 к сторонам треугольника ABC, пересекаются в одной точке.

---

11 класс • Кружок в Хамовниках • 3 марта 2014 г.

Изогональное сопряжение

1. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Точка Q симметрична точке A относительно середины отрезка BC. Докажите, что точки P и Q изогонально сопряжены.

2. Точки P и Q изогонально сопряжены с треугольнике ABC. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из этих точек на стороны треугольника, лежат на одой окружности.

3. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Точка B_0 — середина стороны AC. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов ABC и AHC соответственно, лежит на прямой A_1C_1.

4. Докажите, что при изогональном сопряжении окружность, проходящая через вершины B и C и отличная от описанной окружности, переходит в окружность, проходящую через вершины B и C.

5. AA_0, BB_0, CC_0 — высоты треугольника ABC, H — ортоцентр, M — произвольная точка. A_1 — точка симметричная M относительно BC; аналогично определим точки B_1, C_1. Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 конкурентны.

6. Из некоторой точки P опущены перпендикуляры PA_1 и PA_2 на сторону BC треугольника ABC и на высоту AA_3. Аналогично определяются точки B_1, B_2 и C_1, C_2. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке или параллельны.

7. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

8. Чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P, лежащей внутри треугольника. Известно, что $PA_1 = PB_1 = PC_1$. Докажите, что перпендикуляры, восставленные в точках A_1, B_1 и C_1 к сторонам треугольника ABC, пересекаются в одной точке.