Геометрические неравенства

1. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки A', B' и C' выбраны на его соответственных сторонах BC, AC и AB. Докажите, что минимум периметра треугольника $A'B'C'$ достигается, когда его вершины являются вершинами ортотреугольника ABC.

2. В треугольнике одна из средних линий больше одной из медиан. Докажите, что этот треугольник тупоугольный.

3. Даны n точек A_1, A_2, …, A_n и окружность радиуса 1. Докажите, что на окружности можно выбрать точку P так, что $PA_1 + \ldots + PA_n \geqslant n$.

4. Докажите, что среднее арифметическое длин сторон произвольного выпуклого многоугольника меньше среднего арифметического длин всех его диагоналей.

5. Внутри выпуклого многоугольника лежит другой выпуклый многоугольник. **(a)** Докажите, что периметр внешнего многоугольника больше, чем периметр внутреннего. **(b)** Для точки O внутри треугольника ABC периметра P докажите неравенство $P/2 < OA + OB + OC < P$.

6. Площади треугольников ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ равны S, S_1, S_2 соответственно, причём $AB = A_1B_1 + A_2B_2$, $AC = A_1C_1 + A_2C_2$, $BC = B_1C_1 + B_2C_2$. Докажите, что $S \geqslant 4\sqrt{S_1S_2}$.

7. Докажите, что сумма площадей пяти треугольников, образованных парами соседних сторон и соответствующими диагоналями выпуклого пятиугольника, больше площади всего пятиугольника.

8. Докажите, что периметр остроугольного треугольника не меньше $4R$.

9. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC взята точка D, а на боковой стороне AB — точки E и M, так что $AM = ME$ и отрезок DM параллелен AC. Докажите, что $AD + DE > AB + BE$.

10. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются в точке M. Докажите, что, если угол AMB не тупой, то $AC + BC > 3AB$.

---

11 класс • Кружок в Хамовниках • 24 ноября 2013 г.

Геометрические неравенства

1. Дан остроугольный треугольник ABC. Точки A', B' и C' выбраны на его соответственных сторонах BC, AC и AB. Докажите, что минимум периметра треугольника $A'B'C'$ достигается, когда его вершины являются вершинами ортотреугольника ABC.

2. В треугольнике одна из средних линий больше одной из медиан. Докажите, что этот треугольник тупоугольный.

3. Даны n точек A_1, A_2, …, A_n и окружность радиуса 1. Докажите, что на окружности можно выбрать точку P так, что $PA_1 + \ldots + PA_n \geqslant n$.

4. Докажите, что среднее арифметическое длин сторон произвольного выпуклого многоугольника меньше среднего арифметического длин всех его диагоналей.

5. Внутри выпуклого многоугольника лежит другой выпуклый многоугольник. **(a)** Докажите, что периметр внешнего многоугольника больше, чем периметр внутреннего. **(b)** Для точки O внутри треугольника ABC периметра P докажите неравенство $P/2 < OA + OB + OC < P$.

6. Площади треугольников ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ равны S, S_1, S_2 соответственно, причём $AB = A_1B_1 + A_2B_2$, $AC = A_1C_1 + A_2C_2$, $BC = B_1C_1 + B_2C_2$. Докажите, что $S \geqslant 4\sqrt{S_1S_2}$.

7. Докажите, что сумма площадей пяти треугольников, образованных парами соседних сторон и соответствующими диагоналями выпуклого пятиугольника, больше площади всего пятиугольника.

8. Докажите, что периметр остроугольного треугольника не меньше $4R$.

9. В равнобедренном треугольнике ABC на основании BC взята точка D, а на боковой стороне AB — точки E и M, так что $AM = ME$ и отрезок DM параллелен AC. Докажите, что $AD + DE > AB + BE$.

10. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются в точке M. Докажите, что, если угол AMB не тупой, то $AC + BC > 3AB$.