

Начала общей топологии в $\mathbb{R}^n$

Определение. Множество S называется **открытым**, если с каждой своей точкой $x \in S$ оно содержит открытый шар с центром в x . Множество называется **замкнутым**, если его дополнение открыто.

1. Какие из приведённых множеств являются открытыми — какие замкнутыми? (a) $\emptyset$, отрезок, интервал, полуинтервал, окружность, треугольник; (b) график $y = x^2$, решение неравенства $y^2 - x^2 < 1$ и $y^2 + x^2 + z^2 \geq 5$; (c) объединение (пересечение) конечного числа открытых (замкнутых) множеств; (d) предыдущий пункт с бесконечным количеством множеств.

2. Докажите, что любое непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде (a) объединения шаров; (b)* *счётного* объединения шаров; (c)* а на прямой (т.е. $n = 1$) в виде дизъюнктного объединения интервалов, т.е. когда объединяемые элементы попарно не пересекаются.

Свойство действительных чисел: у любого ограниченного множества M существует точная верхняя грань, т.е. такое число c , что $c \geq x, \forall x \in M$ и $\nexists b < c: b \geq x, \forall x \in M$.

3. Докажите, что последовательность вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю, имеет единственную общую точку.

Определение. Семейство множеств $\{U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ называется покрытием множества X , если $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \supset X$.

Определение. Множество точек A пространства $\mathbb{R}^n$ называется **компактным** (**компактом**), если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

4. Let M be a compact set. Prove that (a) M is closed; (b) its intersection with any closed set is compact.

5. Докажите, что любая последовательность на отрезке имеет на нем хотя бы одну предельную точку.

6. Докажите, что отрезок $[0, 1]$ — компакт.

7. Докажите, что (a) декартово произведение компактов компактно; (b) объединение конечного числа компактных множеств компактно.

8*. Докажите, что множество в $\mathbb{R}^n$ замкнуто, если и только если оно содержит все свои предельные точки.

9. Докажите, что множество в $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

10. Компактны ли на плоскости (a) окружность; (b) прямая; (c) отрезок; (d) замкнутый круг; (e) график произвольной непрерывной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; (f) график непрерывной функции $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Определение. Отображение $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества открыт.

11. Докажите, что образ компакта при непрерывном отображении есть компакт.

