

## Линейность возвращается

1. В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит параллелограмм  $ABCD$ . Докажите, что для любой точки  $O$  внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров  $OSAB$  и  $OSCD$  равна сумме объёмов тетраэдров  $OSCB$  и  $OSAD$ .
2. Через вершины  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  проводится окружность. Её вторые точки пересечения со сторонами  $AB$  и  $AC$  — точки  $C'$  и  $B'$ . Докажите, что прямые  $BB'$ ,  $CC'$  и  $HH'$  пересекаются в одной точке, где  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ , а  $H'$  — треугольника  $AB'C'$ .
3. С помощью циркуля и линейки постройте квадрат с вершинами на четырёх заданных прямых.
4. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  выбирается точка  $P$ . Точка  $Q$  симметрична ей относительно середины  $BC$ . Прямые  $AP$  и  $AQ$  вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках  $P'$  и  $Q'$  соответственно. Докажите, что все прямые  $P'Q'$  проходят через фиксированную точку.
5. На высоте  $BH$  треугольника  $ABC$  выбрана произвольная точка  $P$ . Прямые  $AP$  и  $CP$  пересекают прямые  $BC$  и  $AB$  в точках  $A_1$  и  $C_1$  соответственно. Докажите, что  $HB$  — биссектриса угла  $A_1HC_1$ .
6. Даны две непересекающиеся окружности  $\omega$  и  $\gamma$  и к ним проведены одна их общая внешняя касательная  $l$  и одна общая внутренняя касательная  $k$ . Из точки  $A$ , лежащей на прямой  $k$  проведены вторые касательные к окружностям  $AB$  и  $AC$  ( $B$  и  $C$  лежат на  $l$ ), так что обе окружности лежат внутри треугольника  $ABC$ . Покажите, что если точка  $A$  двигается по прямой  $k$ , то центр  $I$  вписанной окружности треугольника  $ABC$  тоже двигается по прямой.
7. Докажите, что изогональный образ прямой, не проходящей через вершины треугольника, есть коника.
8. \*Пусть  $A_1, B_1, A_2$  и  $B_2$  — основания высот и биссектрис треугольника  $ABC$  соответственно. Обозначим центр вписанной и описанной окружностей треугольника  $ABC$  через  $I$  и  $O$  соответственно. Докажите, что то, что  $O$  лежит на  $A_2B_2$  равносильно тому, что  $I$  лежит на  $A_1B_1$ .
9. \*\*Докажите, что если прямая пересекает три из четырех высот тетраэдра, то она пересекает и четвертую (или она ей параллельна).

## Линейность возвращается

1. В основании четырёхугольной пирамиды  $SABCD$  лежит параллелограмм  $ABCD$ . Докажите, что для любой точки  $O$  внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров  $OSAB$  и  $OSCD$  равна сумме объёмов тетраэдров  $OSCB$  и  $OSAD$ .
2. Через вершины  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  проводится окружность. Её вторые точки пересечения со сторонами  $AB$  и  $AC$  — точки  $C'$  и  $B'$ . Докажите, что прямые  $BB'$ ,  $CC'$  и  $HH'$  пересекаются в одной точке, где  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ , а  $H'$  — треугольника  $AB'C'$ .
3. С помощью циркуля и линейки постройте квадрат с вершинами на четырёх заданных прямых.
4. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  выбирается точка  $P$ . Точка  $Q$  симметрична ей относительно середины  $BC$ . Прямые  $AP$  и  $AQ$  вторично пересекают описанную окружность треугольника в точках  $P'$  и  $Q'$  соответственно. Докажите, что все прямые  $P'Q'$  проходят через фиксированную точку.
5. На высоте  $BH$  треугольника  $ABC$  выбрана произвольная точка  $P$ . Прямые  $AP$  и  $CP$  пересекают прямые  $BC$  и  $AB$  в точках  $A_1$  и  $C_1$  соответственно. Докажите, что  $HB$  — биссектриса угла  $A_1HC_1$ .
6. Даны две непересекающиеся окружности  $\omega$  и  $\gamma$  и к ним проведены одна их общая внешняя касательная  $l$  и одна общая внутренняя касательная  $k$ . Из точки  $A$ , лежащей на прямой  $k$  проведены вторые касательные к окружностям  $AB$  и  $AC$  ( $B$  и  $C$  лежат на  $l$ ), так что обе окружности лежат внутри треугольника  $ABC$ . Покажите, что если точка  $A$  двигается по прямой  $k$ , то центр  $I$  вписанной окружности треугольника  $ABC$  тоже двигается по прямой.
7. Докажите, что изогональный образ прямой, не проходящей через вершины треугольника, есть коника.
8. \*Пусть  $A_1, B_1, A_2$  и  $B_2$  — основания высот и биссектрис треугольника  $ABC$  соответственно. Обозначим центр вписанной и описанной окружностей треугольника  $ABC$  через  $I$  и  $O$  соответственно. Докажите, что то, что  $O$  лежит на  $A_2B_2$  равносильно тому, что  $I$  лежит на  $A_1B_1$ .
9. \*\*Докажите, что если прямая пересекает три из четырех высот тетраэдра, то она пересекает и четвертую (или она ей параллельна).