Лицей 1547, 9 класс

Транснеравенство

15 сентября 2016

1. Есть три кучки монет: по 2, по 5 и по 10 рублей. Разрешается выбрать 7 монет из одной кучки, 5 монет из другой и 2 – из третьей на выбор. Как набрать наибольшую, а как наименьшую сумму денег?

2. Пусть $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$. Что больше: $a_1b_1 + a_2b_2$ или $a_1b_2 + a_2b_1$?

3. **Транснеравенство.** Даны два набора по n чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Эти числа разбиваются на n пар так, что в каждой паре одно число из первого набора, а другое – из второго: a_1 и b_{i_1}, a_2 и $b_{i_2}, \ldots$, a_n и b_{i_n}. Затем числа в парах перемножают, и полученные произведения складывают: $V = a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + \ldots + a_nb_{i_n}$.

   Оказывается, что **наибольшее** значение V равно $a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$, а **наименьшее** равно $a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1$. Докажите это.

4. На доске a) 2×2; b) $n \times n$ расставлены не бьющие друг друга ладьи и в каждой клетке вписано произведение ее координат. Какова может быть максимальная сумма чисел под ладьями?

5. Известно, что $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Расположите следующие числа в порядке возрастания.

   a) $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$; b) a^2, b^2, c^2; c) $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}$; d) a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2; e) $\frac{c}{ab}, \frac{a}{bc}, \frac{b}{ca}$.

6. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geqslant a^2b + b^2c + c^2d + d^2a$, при $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant 0$. А что изменится, если $d \geqslant a \geqslant c \geqslant b \geqslant 0$.

7. Для положительных чисел x, y и z, таких что $x \geqslant y \geqslant z$ докажите, что
$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geqslant \frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}.$$

8. Докажите, что $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geqslant a + b + c$, при $a \geqslant b \geqslant c > 0$.

9. **Неравенство Чебышёва.** Пусть $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Докажите, что
$$n(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n) \geqslant (a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n).$$

Домашняя работа

10. Докажите, что $2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant ab(a + b) + bc(b + c) + ac(a + c)$, при $a, b, c \geqslant 0$.

11. Для положительных a, b и c докажите с помощью транснеравенства, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3$.