

Теорема Эйлера

15 октября • 9 класс

Опр. Обозначим через $\varphi(n)$ количество натуральных чисел не больших n и взаимно простых с n . Функция φ называется функцией Эйлера.

Теорема Эйлера. $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Следствие (Теорема Ферма.) $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Свойства функции Эйлера. 1. Если $(a, b) = 1$, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

2. Если p – простое, то $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$.

3. Если n – произвольное, то ...

Задачи для самостоятельного решения.

1. Докажите, что $3^{100} - 3^{60} - 3^{40} + 1$ делится на 77.

2. Докажите, что любая арифметическая прогрессия $x_n = a + nd$, где a и b – натуральные числа и n взаимно просто с n , содержит бесконечно много палиндромов.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите последние две цифры десятичной записи числа 19^{321} и 131^{61} .

2. Найдите остаток от деления $3^{200} + 7^{200}$ на 101 и $9^{65} + 11^{65}$ на 80.

3. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на 0001?

4. Докажите, что $n^{84} - n^4$ делится на 20400 для любого n .

5. Найдите сумму всех правильных несократимых дробей со знаменателем n .

6. Докажите, что $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

7. Доказать, что для любого натурального числа существует число с суммой цифр n , делящееся на n .

8. Докажите, что в любой арифметической прогрессии составленной из натуральных чисел, есть бесконечно много членов, в разложение которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа.