

Малая теорема Ферма

1 октября • 9 класс

1. Пусть a – некоторое число, которое не делится на простое p . Рассмотрим числа

$$0 \cdot a, 1 \cdot a, \dots, (p-1) \cdot a$$

- . Докажите, что все эти числа имеют разные остатки при делении на p .
2. Докажите, что $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (Малая теорема Ферма).

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите остаток от деления 25^{1200} на 41.
2. Докажите, что $300^{3000} - 1$ делится на 1001.
3. Докажите, что если a не кратно 17, то $a^8 - 1$ или $a^8 + 1$ делится на 17.
4. Докажите, что число $40^{81} + 17^{160}$ – составное.
5. Найдите все такие простые числа p , что $5^{p^2} + 1$ кратно p .
6. Шестизначное число кратно 7. Его первую цифру стёрли и затем записали последней цифрой числа. Докажите, что полученное число тоже кратно 7.
7. Пусть p – простое число, отличное от 2, 3, 5. Докажите, что число, составленное из $p-1$ единицы делится на p .
8. Математические хулиганы Гриша и Вова катаются на лифте 17-этажного дома. Они садятся в лифт на этаже с номером n возводят в квадрат номер этажа на котором находятся, и едут на этаж с номером, равным остатку от деления результата на 17. Какое максимальное количество поездов уместится им совершить таким способом?
9. Докажите, что для любого простого p число $11 \dots 1122 \dots 22 \dots 99 \dots 99$, состоящее из $9p$ цифр, при делении на p даёт тот же остаток, что и 123456789.
10. Отметим на бумаге произвольным образом $(p-1)$ точку. Каждой точке сопоставим какой-то ненулевой остаток при делении на p . Проведем из остатка k стрелочку в остаток pk . Убедитесь, что из каждой точки выходит одна стрелочка, и в каждую точку входит одна стрелочка. Поймите, что тогда все точки разбиваются на циклические маршруты. Докажите, что у всех циклических маршрутов одна и та же длина и она делит $p-1$. Выведите отсюда малую теорему Ферма.

Малая теорема Ферма

1 октября • 9 класс

1. Пусть a – некоторое число, которое не делится на простое p . Рассмотрим числа

$$0 \cdot a, 1 \cdot a, \dots, (p-1) \cdot a$$

- . Докажите, что все эти числа имеют разные остатки при делении на p .
2. Докажите, что $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ (Малая теорема Ферма).

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите остаток от деления 25^{1200} на 41.
2. Докажите, что $300^{3000} - 1$ делится на 1001.
3. Докажите, что если a не кратно 17, то $a^8 - 1$ или $a^8 + 1$ делится на 17.
4. Докажите, что число $40^{81} + 17^{160}$ – составное.
5. Найдите все такие простые числа p , что $5^{p^2} + 1$ кратно p .
6. Шестизначное число кратно 7. Его первую цифру стёрли и затем записали последней цифрой числа. Докажите, что полученное число тоже кратно 7.
7. Пусть p – простое число, отличное от 2, 3, 5. Докажите, что число, составленное из $p-1$ единицы делится на p .
8. Математические хулиганы Гриша и Вова катаются на лифте 17-этажного дома. Они садятся в лифт на этаже с номером n возводят в квадрат номер этажа на котором находятся, и едут на этаж с номером, равным остатку от деления результата на 17. Какое максимальное количество поездов уместится им совершить таким способом?
9. Докажите, что для любого простого p число $11 \dots 1122 \dots 22 \dots 99 \dots 99$, состоящее из $9p$ цифр, при делении на p даёт тот же остаток, что и 123456789.
10. Отметим на бумаге произвольным образом $(p-1)$ точку. Каждой точке сопоставим какой-то ненулевой остаток при делении на p . Проведем из остатка k стрелочку в остаток pk . Убедитесь, что из каждой точки выходит одна стрелочка, и в каждую точку входит одна стрелочка. Поймите, что тогда все точки разбиваются на циклические маршруты. Докажите, что у всех циклических маршрутов одна и та же длина и она делит $p-1$. Выведите отсюда малую теорему Ферма.