Графы - 2

19 ноября • 6 класс

Напоминание:

★ *Графом* называется некоторый набор точек плоскости (*вершин* графа), соединенных кривыми (*ребрами* графа).

★ Ребро, которое начинается и заканчивается в одной и той же вершине, называется *петлей.*

★ Граф называется *связным*, если между любыми двумя его вершинами есть путь по ребрам.

★ Количество ребер, выходящих из данной вершины v графа Г, называется степенью вершины v. По определению полагают, что степень петли (кратности 1) равна 2.

Лемма (о рукопожатиях). Сумма всех степеней вершин графа равна удвоенному числу его ребер.

Теорема. Число вершин нечётной степени в графе — чётно.

Задачи на разбор.

1. Докажите лемму о рукопожатиях и теорему.

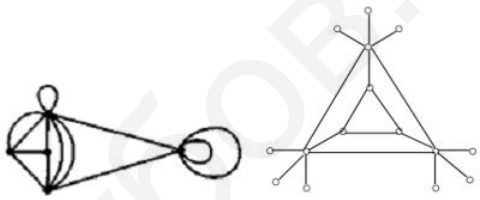
2. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

3. У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассального баронства 1,5 или 9 соседних баронств?

4. В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь от любого города можно добраться до любого другого.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Проверьте лемму о рукопожатиях и теорему на следующих графах:



2. В некотором государстве 2014 городов, из каждого из которых выходит по 3 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

3. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

4. В некотором государстве из каждого города выходит по 16 дорог. Может ли в нем быть 2014 дорог?

5. Докажите, что число людей, живших когда-либо на Земле и сделавших нечетное количество рукопожатий - чётно.

6. Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там, на заколдованном озере имеются 7 островов, с каждого из которых ведет 1,3 или 5 мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

7. Какое наименьшее число соединений требуется для организации проводной сети связи из 10 узлов, чтобы при выходе из строя любых двух узлов связи сохранялась возможность передачи информации между любыми двумя оставшимися (хотя бы по цепочке через другие узлы)?

8. В Тридевятом царстве только один вид транспорта – ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковролиния, из города Дальний – одна, а из всех остальных городов, – по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в город Дальний.

9. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

10. Назовем граф «хлипким», если степень любой его вершины равна 1,3 или 6 . Доказать, что из связного «хлипкого» графа, содержащего 34 ребра, можно выкинуть ребро так, что он перестанет быть связным.

Дополнительная задача.

1. В некоторой стране столица соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединен авиалиниями ровно с десятью городами (если А соединён с В, то В соединён с А). Известно, что из каждого города можно попасть в любой другой (может быть, с пересадками). Доказать, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так, что возможность попасть из каждого города в любой другой сохранится.

ЛУГОВ.РФ