

Графы

5 ноября • 6 класс

Опр. Графом называется некоторый набор точек плоскости (*вершин* графа), соединенных кривыми (*ребрами* графа).

Опр. Ребро, которое начинается и заканчивается в одной и той же вершине, называется *петлей*.

Опр. Количество ребер, выходящих из данной вершины v графа Γ , называется степенью вершины v . По определению полагают, что степень петли (кратности 1) равна 2.

Опр. Граф называется *связным*, если между любыми двумя его вершинами есть путь по ребрам.

Опр. Компонентой связности графа называется такая его связная часть, к которой нельзя добавить вершину так, чтобы она оставалась связной. Ясно, что если граф связан, то у него существует единственная компонента связности – он сам.

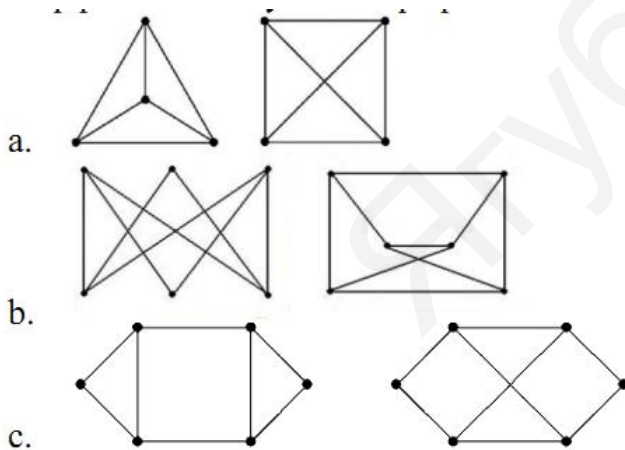
Опр. Говорят, что два графа *равны* (*изоморфны*), если:

- 1) У них одинаковое количество вершин;
- 2) существуют такие две нумерации их вершин (по одной на каждый граф), что две (одна) вершины одного графа соединены ребром (петлей) кратности тогда и только тогда, когда вершины(а) с такими же номерами соединены ребром (петлей) той же кратности.

Задачи на разбор.

1. Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам (в обе стороны): Земля-Меркурий, Плутон-Венера, Земля-Плутон, Плутон-Меркурий, Меркурий-Венера, Уран-Нептун, Нептун-Сатурн, Сатурн-Юпитер, Юпитер-Марс и Марс-Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

2. Какие из следующих пар графов изоморфны?

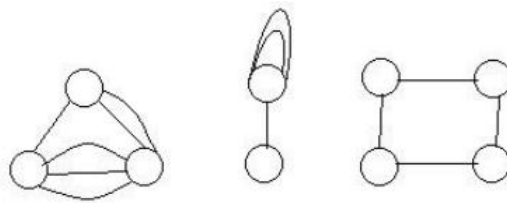


Задачи для самостоятельного решения.

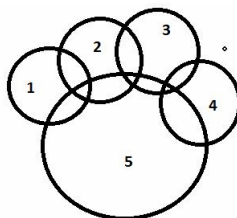
1. В деревне Гадюкино 9 домов. Известно, что у Петра соседи Иван и Антон, Максим сосед Ивану и Сергею, Виктор – Диме и Никите, а также по соседству живут Евгений с Никитой, Иван с Сергеем, Евгений с Димой, Сергей с Антоном и больше соседей в означенной деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Петр огородами пробраться к Никите за яблоками?

2. В стране Цифра есть городов с названиями 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9? Можно ли добраться из города 1 в город 7?

3. На рисунке ниже изображен один граф. Найти его компоненты связности, подсчитать степени вершин.



4. На рисунке изображены пересекающиеся круги. Граф определяется следующим образом: его вершины - числа 1,2,3,4,5. Вершины графа соединены ребром тогда и только тогда, когда круги с такими же номерами пересекаются. Требуется нарисовать граф.



5. Равны ли следующие графы:



6. На квадратной доске 3x3 расставлены 4 коня так, как показано на рис.1. Можно ли сделав несколько ходов конями, переставить их в положение, показанное на рис.2?

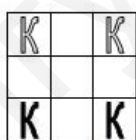


Рис. 1

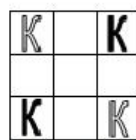


Рис. 2

7. В стране Семерка 15 городов, каждый из городов соединен дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из каждого города можно добраться в любой другой.

Дополнительные задачи.

1. Пешеход обошёл шесть улиц одного города, пройдя каждую ровно два раза, но не смог обойти их, пройдя каждую лишь раз. Могло ли это быть? Предполагается, что улицы могут пересекаться только в начале и в конце.

2. В кружке 20 учеников. Среди них есть ученик, имеющий среди кружковцев одного друга, ученик, имеющий среди кружковцев двух друзей, ... ученик, имеющий среди кружковцев 14 друзей. Докажите, что найдутся трое кружковцев, любые двое из которых дружат.