

Алгоритм Евклида

7–8 класс

12.05.2017

Определение 1. Наибольшим общим делителем двух целых чисел называется такой их общий делитель, который больше всех остальных общих делителей.

Определение 2. Наименьшим общим кратным двух целых чисел называется наименьшее положительное число, делящееся на оба этих числа.

Обозначение. НОД(a, b) = (a, b), НОК(a, b) = [a, b].

Определение 3. Если (a, b) = 1, то числа a и b называются взаимно простыми.

Алгоритм Евклида.

Пусть a и b – целые числа, не равные одновременно нулю, и последовательность чисел $a > b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \dots > r_n$ определена тем, что каждое r_k – это остаток от деления предпредыдущего числа на предыдущее, а предпоследнее делится на последнее нацело, то есть

$$\begin{aligned} a &= b \cdot q_0 + r_1 \\ b &= r_1 \cdot q_1 + r_2 \\ r_1 &= r_2 \cdot q_2 + r_3 \\ &\dots \\ r_{k-2} &= r_{k-1} \cdot q_{k-1} + r_k \\ &\dots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} &= r_n \cdot q_n \end{aligned}$$

Тогда $(a, b) = r_n$.

Упражнение. Найдите **a)** (1333, 372); **b)** (561, 4301); **c)** (9163, 3311).

1. Докажите следующий свойства НОД и НОК:
 - a) если m делится на n , то $(m, n) = n$, $[m, n] = m$;
 - b) $(a \cdot m, a \cdot n) = a \cdot (m, n)$;
 - c) если $(m, n) = d$, то $(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}) = 1$;
 - d) для любого целого числа a справедливо, что $(m, n) = (m - a \cdot n, n)$;
 - e) $(m, n) \cdot [m, n] = m \cdot n$.
2. **a)** Докажите, что $(n+3, 5n+14)$ взаимно просты при любом целом n .
b) Какие значения может принимать $(3n+2, 10n+23)$.
3. Вася посчитал НОК всех чисел от 1 до 1000, а Петя – всех чисел от 501 до 1000. У кого результат получился больше и во сколько раз?
4. Пусть m, n – целые взаимнопростые числа. Найдите наибольшее возможное значение

$$(n + 2016m, m + 2016n).$$

5. Пусть a и b – натуральные числа. Докажите, что среди чисел $a, 2a, 3a, \dots, ba$ ровно (a, b) чисел делится на b .
6. Изначально на доске записаны числа m и n . Каждую минуту Саша записывает в тетрадку квадрат наименьшего из чисел на доске, после чего Даша ищет разность чисел на доске и записывает ее вместо наибольшего из них, пока в какой-то момент не выпишет 0. Чему равна сумма чисел у Саши в тетради?