

Сравнения

7–8 класс

18.04.2017

Определение. Если два числа дают одинаковые остатки при делении на число m , то говорят, что они сравнимы по модулю m . Записывают это так: $a \equiv b$ или $a \equiv b \pmod{m}$.

Упражнение. Числа a и b сравнимы по модулю m тогда и только тогда, когда число $a - b$ сравнимо с 0 по модулю m .

Свойства сравнений:

(a) если $a \equiv b$, $b \equiv c$, то $a \equiv c$;

(b) $a \equiv a + km$, где k — целое число;

(c) если $a \equiv b$, то $a + c \equiv b + c$;

(d) если $a \equiv b$ и $c \equiv d$, то $a + c \equiv b + d$;

(e) если $a \equiv b$, то $ac \equiv bc$;

(f) если $a \equiv b$ и $c \equiv d$, то $ac \equiv bd$.

1. Доказать упражнение и все свойства сравнений.

2. (a) Докажите, что если $a \equiv b$, то $a^k \equiv b^k$, где k — натуральное число.

(b) Приведите пример, когда $ac \equiv bc$, но не выполняется $a \equiv b$.

(c) Сформулируйте, когда можно сокращать на одно и то же число обе части сравнения, и докажите это свойство.

3. Найдите остаток от деления:

(a) $2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$ на 11;

(b) $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$ на 1000;

(c) $2015 \cdot 2014 \cdot 2013 + 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$ на 2016.

4. Найдите остаток от деления:

(a) $9^{2016} + 13^{2016}$ на 11;

(b) $9^{2015} + 13^{2015}$ на 11.

5. (a) Докажите, что $2^{2016} \equiv_5 3^{2016}$.

(b) Докажите, что $2^{2016} \equiv_{13} 3^{2016}$.

(c) Найдите еще хотя бы одно простое число p , для которого $2^{2016} \equiv_p 3^{2016}$.

6. Пусть A — произведение всех нечётных чисел от 1 до 2017, а B — произведение всех чётных чисел от 2 до 2018. Докажите, что $A + B$ делится на 2019.

7. Докажите, что число $(5^n - 1)^n - 6$ делится на $5^n - 6$.

8. Первоклассник Петя знает только цифры 1 и 2. Докажите, что он может написать число, делящееся на 123456789.

9. Число $1 \underbrace{33 \dots 33}_k$ — простое. Докажите, что k — нечетное.