Остатки

Группа 7–8

6.12.2016

1. Известно, что $5x + 8y - 1$ делится на 13.
 - (а) Докажите, что $5x + 60y - 1$ делится на 13.
 - (б) Найдите остаток от деления $18x - 31y$ на 13
 - (с) Найдите остаток от деления $x - y$ на 13.
2. Пусть a — чётное число, не кратное 4. Докажите, что разность $a^2 - 4$
 - (а) делится на 16;
 - (б) делится на 32.
3. На доске записаны два числа: единица и двойка. Каждую минуту Маша умножает два самых больших числа, написанных на доске, прибавляет к ним 1 и записывает полученное число на доску. Докажите, что Маша никогда не запишет число, делящееся на 4.
4. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 2 даёт остаток 1, при делении на 3 даёт остаток 2, при делении на 4 даёт остаток 3, при делении на 5 даёт остаток 4, при делении на 6 даёт остаток 5.
5. Пусть N — наименьшее натуральное число, которое дает различные остатки от деления на $2, 4, \dots, 2016$. Какой остаток это число дает от деления на 2016?
6. Назовем число n *удобным*, если $n^2 + 1$ делится на 1000001. Докажите, что среди чисел $1, 2, \dots, 1000000$ чётное число удобных.