

Инвариант

1. На столе стоят 16 стаканов. Из них 15 стаканов стоят правильно, а один перевернут доньшком вверх. Разрешается одновременно переворачивать любые четыре стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы правильно?
2. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 19, 20$. Разрешается стереть любые два числа a и b и вместо них написать число $a + b - 1$. Какое число может остаться на доске после 19 таких операций?
3. На доске написаны шесть чисел: $1, 2, 3, 4, 5, 6$. За один ход разрешается к любым двум из них одновременно добавлять по единице. Можно ли за несколько ходов все числа сделать равными?
4. На чудо-яблоне растут бананы и ананасы. За один раз разрешается сорвать с неё два плода. Если сорвать два банана или два ананаса, то вырастет ещё один ананас, а если сорвать один банан и один ананас, то вырастет один банан. В итоге остался один плод. Какой это плод, если известно, сколько бананов и ананасов росло вначале?
5. Хулиганы Петя и Вася рвут школьную стенгазету. Петя рвет каждую часть на 4 куска, а Вася — на 7 кусков. Смогут ли они из целой газеты получить 2015 кусочков?
6. На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя Торт стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифметическое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, записанных на доске вечером 1999-го дня.
7. Можно ли обойти доску 5×5 шахматным конем и вернуться обратно?
8. На доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 1974$. Разрешается стереть любые два числа и записать вместо них сумму или разность. После многократного повторения этой операции на доске осталось лишь одно число. Доказать, что это число не может быть нулем.
9. В каждой клетке доски 5×5 сидит жук. В некоторый момент каждый из жуков переполз на соседнюю по стороне клетку. Докажите, что теперь найдется пустая клетка.
10. Круг разделен на 6 секторов, в котором по часовой стрелке стоят числа $1, 0, 1, 0, 0, 0$. Можно прибавлять по единице к любым числам, стоящим в двух соседних секторах. Можно ли сделать все числа равными?