Планиметрия-2

1. Ромб и равнобокая трапеция описаны около одного круга и имеют равную площадь. Сравните их острые углы.

2. Сторону AB треугольника ABC продолжили за вершину B и выбрали на луче AB точку A_1 так, что точка B — середина отрезка AA_1. Аналогично сторону BC продолжили за вершину C и отметили на продолжении точку B_1 так, что C — середина BB_1. Так же продолжили сторону CA за вершину A и отметили на продолжении точку C_1 так, что A — середина CC_1. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 1.

3. В треугольнике ABC середины сторон AC и BC, вершина C и точка пересечения медиан лежат на одной окружности. Найдите длину стороны AB, если длина медианы треугольника ABC, проведенной из вершины C, равна m.

4. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K, а на стороне AC — точка M. Отрезки BM и CK пересекаются в точке P. Оказалось, что углы APB, BPC, CPA равны по 120°, а площадь четырехугольника $AKPM$ равна площади треугольника BPC. Найдите угол BAC.

5. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно. Известно, что точка пересечения медиан треугольника AMN является точкой пересечения высот треугольника ABC. Найдите угол ABC.

6. Точка M — середина хорды AB некоторой окружности. Хорда CD пересекает AB в точке M. На CD как на диаметре построена полуокружность. Точка E лежит на этой полуокружности, и ME — перпендикуляр к CD. Найдите угол AEB.

7. Дан треугольник ABC, в котором $AC = \frac{AB+BC}{2}$. Докажите, что центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC, середины сторон AB и BC и вершина B лежат на одной окружности.

8. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружности с центрами A и C проходят через точку B, вторично пересекаются в точке F и пересекают описанную около треугольника ABC окружность ω в точках D и E. Отрезок BF пересекает окружность ω в точке O. Докажите, что O — центр описанной окружности треугольника DEF.