

Разнобой

1. На сколько частей разделяют n -угольник его диагонали, если никакие три диагонали не пересекаются в одной точке?
2. Петя Торт умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $n : (n + 1)$, где n — любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы разделить отрезок на любое количество одинаковых частей. Прав ли он?
3. Середины противоположных сторон шестиугольника соединены отрезками. Оказалось, что точки попарного пересечения этих отрезков образуют равносторонний треугольник. Докажите, что проведенные отрезки равны.
4. Докажите, что при любых действительных x, y, z выполнено неравенство $x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$.
5. Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не может быть полным квадратом.
6. По неподвижной окружности, касаясь ее изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Какую траекторию описывает фиксированная точка K подвижной окружности?
7. Правда ли, что из того, что $b > a + c > 0$, следует, что $ax^2 + bx + c$ имеет ровно два корня?
8. Даны шесть отрезков, такие, что из любых трех можно составить треугольник. Верно ли, что из них можно составить тетраэдр?
9. Назовем пару последовательных натуральных чисел интересной, если каждое из них делится на произведение своих цифр. Среди каких чисел больше интересных пар — среди 2016-значных или среди 2017-значных?
10. Найдите все $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, такие, что $f(1) = 2$ и $f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1$ при всех $x, y \in \mathbb{Q}$.